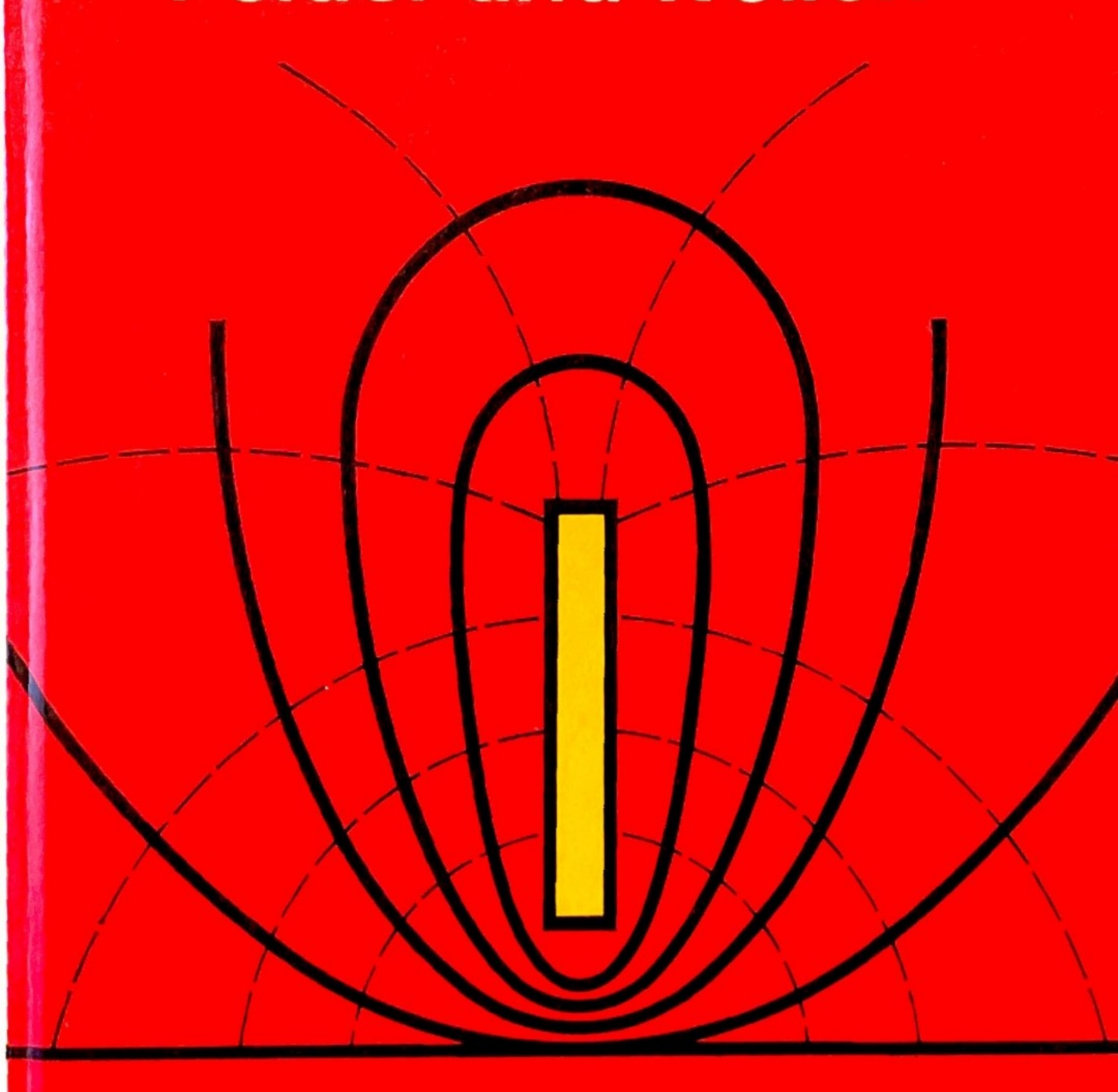
SCHILLING

Elektromagnetische Felder und Wellen



PHYSIK IN BEISPIELEN

Schilling · Elektromagnetische Felder und Wellen

Physik in Beispielen

Elektromagnetische Felder und Wellen

von Prof. Dr. rer. nat. habil. Heinz Schilling

Akademie der Wissenschaften der DDR, ZI für Physikalische Chemie

---

Mit 112 durchgerechneten Beispielen und 299 Aufgaben mit Lösungen

Alleinvertrieb
VERLAG HARRI DEUTSCH
Zürich und Frankfurt/Main

VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG

1. Auflage
Lizenznummer: 114-210/5/74
LSV 1154
Verlagslektor: Dipl.-Phys. Klaus Vogelsang
Gestaltung: Gottfried Leonhardt, Leipzig
Printed in GDR
Satz und Druck: VEB Druckhaus „Maxim Gorki“, 74 Altenburg
Redaktionsschluß: 15. 10. 1974
Bestellnummer: 545 984 3

Vorwort

Das Buch »Elektromagnetische Felder und Wellen« setzt die mit den Titeln »Physik in Beispielen« von HAJKO und »Statistische Physik in Beispielen« von SCHILLING begonnene Reihe »Physik in Beispielen« mit der Behandlung elektrischer und magnetischer Vorgänge fort. Die Darstellung physikalischer Effekte an Hand technischer Beispiele macht es besonders bei den elektrischen Erscheinungen erforderlich, Grundbegriffe aus der Elektrotechnik einzuführen. Neben den rein physikalischen Betrachtungen über Elektronen und Ionen und über elektrische und magnetische Größen in statischen, stationären, nieder- und hochfrequenten Feldern werden daher auch die Elemente der Vierpoltheorie, der Vorgänge in Kabeln und Leitungen und der Sende-, Empfangs- und Transistortechnik behandelt.
Wie in den vorangegangenen Bänden ist jeder Abschnitt in drei Teile untergliedert: einen kurzgehaltenen Lehrtext über die theoretischen Grundlagen, die ausführliche Lösung systematisch ausgewählter Probleme bis zum numerischen Ergebnis und eine große Zahl von Aufgaben mit Angabe der Lösungen am Schluß des Buches.
Für ihren Rat bei der Gestaltung des Buches danke ich besonders Herrn Prof. Dr. habil. SCHULTZ-PISZACHICH, Ingenieurhochschule Köthen, und Herrn Prof. Dr. habil. GERDES, Universität Rostock. Herr Ing. RING, Zentralinstitut für Kybernetik und Informationsprozesse der AdW, Berlin, Herr Dr. sc. PRINZLER und Herr Ing. HOFFMANN, Zentralinstitut für Elektronenphysik der AdW, Berlin, unterstützten mich mit speziellen Hinweisen zur Empfangs- und zur Transistortechnik. Meine Gattin, Frau Ing. R. SCHILLING, entwarf das Bildmaterial und die technischen Zeichnungen. Dem Verlag danke ich für die vielfältigen Beratungen und für die Unterstützung in jeder Phase der Entstehung des vorliegenden Werkes.

Der Verfasser

Inhaltsverzeichnis

* hinter der Nummer eines Problems oder einer Aufgabe weist auf besonderen Schwierigkeitsgrad hin.

1. Grundgesetze des elektromagnetischen Feldes

1.1. Elektrische und magnetische Grundgrößen

E Einführung

Zur Beschreibung der elektrischen und magnetischen Erscheinungen unterscheidet man zwischen den **Größen zur Darstellung des Feldes** und den **Größen zur Kennzeichnung des Mediums.** Das elektromagnetische Feld wird durch die **elektrische Feldstärke** $\mathfrak{E}$ und die **magnetische Feldstärke** $\mathfrak{H}$ charakterisiert. Dagegen werden die elektrischen und magnetischen Eigenschaften des Mediums durch die **elektrische Erregung oder Verschiebungsdichte** $\mathfrak{D}$, die **magnetische Induktion oder Flußdichte** $\mathfrak{B}$, die elektrische **Stromdichte** $\mathfrak{J}$ und die elektrische **Ladung** Q zum Ausdruck gebracht.
Quellen des **elektrischen Feldes** sind die elektrischen Ladungen Q. Ihre Messung erfolgt in der Einheit Coulomb (C):

$$1 \text{ Coulomb (C)} = 1 \text{ Amperesekunde (As)}.$$

Zwischen der elektrischen Elementarladung e und der Ladungseinheit 1 As besteht der Zusammenhang

$$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ As}. \tag{1}$$

Zur Definition der elektrischen Feldstärke betrachtet man eine Probeladung Q_{p}. Sie sei so klein, daß sie die vorhandene Ladungsverteilung nicht stört. Auf Q_{p} wirkt im elektrischen Feld eine Kraft $\mathfrak{F}$. Der Vektor $\mathfrak{F}$ ist im allgemeinen in jedem Raumpunkt nach Größe und Richtung verschieden. Als **elektrische Feldstärke** definiert man den Vektor

$$\boxed{\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{F}}{Q_{\mathrm{P}}}}. \tag{2}$$

Er hat nach (2) die Einheit

$$[|\mathfrak{E}|] = \frac{\text{Krafteinheit Newton}}{\text{Ladungseinheit Coulomb}} = \frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{kg m s}^{-2}}{\text{As}}.$$

Ein Newton (N) gibt die Kraft an, die auf eine Masse 1 kg wirkt, wenn sie die Beschleunigung 1 m s^{-2} erhält.
Die Arbeit bei der Bewegung längs einer vorgegebenen Kurve C ist nach (2) durch das Linienintegral

$$W = \int_C \mathfrak{F} \cdot d\mathfrak{s} = Q_P \int_C \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{s} \tag{3}$$

bestimmt. Als Spannung U bezeichnet man die skalare Größe

$$U = \int_C \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{s}. \tag{4}$$

Sie wird in Volt (V) gemessen und ist ebenfalls von der speziellen Form der Kurve C abhängig. Für die Maßeinheit der elektrischen Feldstärke erhält man aus (4) den in der Elektrik gebräuchlichen Ausdruck

$$[|\mathfrak{E}|] = \text{V m}^{-1}. \tag{5}$$

Die **elektrische Verschiebungsdichte** $\mathfrak{D}$ kennzeichnet die Elektrisierung des Mediums infolge der vorhandenen Ladungen. Von diesen geht eine Fernwirkung oder Erregung des ladungsfreien Raumes aus. Ein Beispiel für diese Fernwirkung ist die Kraftwirkung auf eine Probeladung. Zur Definition der elektrischen Erregung wird festgelegt, daß das Oberflächenintegral der elektrischen Erregung, erstreckt über eine beliebige, eine vorgegebene Ladung Q einschließende Fläche A, gleich der eingeschlossenen Ladung ist:

$$\oint\!\!\oint_A \mathfrak{D} \cdot d\mathfrak{A} = Q. \tag{6}$$

Die positiven elektrischen Ladungen können hiernach als Ausgangspunkt **elektrischer Feldlinien** angesehen werden. In den negativen Ladungen enden diese Feldlinien.
Zur expliziten Darstellung des Erregungsfeldes $\mathfrak{D}$ betrachtet man die Wirkung einer punktförmigen Ladung Q. Sie befinde sich im Mittelpunkt einer Kugel K vom Radius r. Jeder Punkt der Kugeloberfläche ist gleichberechtigt; die elektrische Erregung hat überall auf der Kugeloberfläche den gleichen Betrag. Daher kann man schreiben

$$Q = \oint\!\!\oint \mathfrak{D}_Q \cdot d\mathfrak{A} = \mathfrak{D}_Q \cdot \oint\!\!\oint d\mathfrak{A} = |\mathfrak{D}_Q|\, 4\pi r^2. \tag{7}$$

Die Richtung des Verschiebungsvektors $\mathfrak{D}_Q$ wird im vorliegenden Falle durch den Radiusvektor $\mathfrak{r}$ bestimmt, gezogen vom Ort der Ladung Q zum Aufpunkt P (vgl. Bild 1.1). Als Vektor der elektrischen Erregung im Falle einer punktförmigen Ladung Q folgt nach (7)

$$\boxed{\mathfrak{D}_Q = \frac{Q}{4\pi r^2}\frac{\mathfrak{r}}{r}}. \tag{8}$$

Bei mehreren im Raum verteilten Ladungen Q_i erhält man $\mathfrak{D}$ nach dem Superpositionsprinzip

$$\mathfrak{D} = \sum_i \mathfrak{D}_{Q_i} = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi r_i^2} \frac{\mathfrak{r}_i}{r_i}. \tag{9}$$

Als Einheit der elektrischen Erregung ist nach (6)

$$[|\mathfrak{D}|] = \frac{\text{As}}{\text{m}^2} \tag{10}$$

zu schreiben. Für die zeitliche Ableitung der elektrischen Verschiebungsdichte erhält man aus (10) die Einheit einer Stromdichte:

$$[|\dot{\mathfrak{D}}|] = \text{A m}^{-2}. \tag{10a}$$

Im Falle hochfrequenter Wechselfelder kann die Dichte $\dot{\mathfrak{D}}$ des Verschiebungsstromes maßgebliche Werte annehmen und die Größenordnung der Dichte $\mathfrak{J}$ des elektrischen Leitungsstromes erreichen. Bei der Messung hochfrequenter Ströme ist daher $\dot{\mathfrak{D}}$ stets in Rechnung zu stellen.

Die Einheit (10) der elektrischen Verschiebungsdichte $\mathfrak{D}$ deutet auf ein Verfahren zu ihrer **experimentellen Messung,** dessen exakte theoretische Grundlagen aus der MAXWELLschen Theorie (vgl. 1.4.) abgeleitet werden:

In einem idealen Leiter kann sich kein elektrisches Feld ausbilden, da sich Spannungsunterschiede hier sofort ausgleichen. Im idealen Leiter gilt also $\mathfrak{D} = 0$. Bringt man ein kleines, das vorhandene Feld nicht störendes Metallplättchen in das elek-

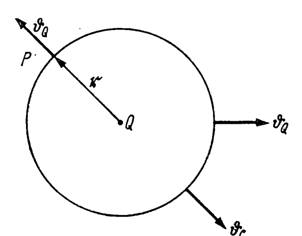


Bild 1.1. Zur Definition der elektrischen Erregung bzw. Verschiebungsdichte $\mathfrak{D}$

trische Feld, so muß an seiner Oberfläche das elektrische Feld enden. Die Metalloberfläche wird zum Ausgangs- oder Endpunkt der elektrischen Feldlinien. Elektrische Feldlinien gehen von positiven Ladungen aus und enden in negativer Ladung. Die auf der Oberfläche gemessene Ladungsdichte σ gibt daher die Größe der elektrischen Erregung $\mathfrak{D}$ an dieser Stelle des Feldes an:

$$\sigma_{\text{Leiter}} = \frac{Q}{\Delta A} = D. \tag{11}$$

Zwischen der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ und der Dichte $\mathfrak{J}$ des elektrischen Leitungsstromes besteht eine lineare Beziehung, die aus dem **Ohmschen Gesetz**

$$U = RI \tag{12}$$

abgeleitet werden kann. Es bedeutet

$$R = \frac{\Delta l}{\gamma\, \Delta A} \tag{13}$$

den ohmschen Widerstand, Δl die Länge der Leitung, ΔA die Querschnittfläche. Der **spezifische Widerstand** ist mit $1/\gamma$ bezeichnet. γ definiert die **Leitfähigkeit** des Materials (siehe Tafel 2). Ist dieses homogen, so gilt nach (4) bei einem konstanten Feld $\mathfrak{E}$ die Beziehung $U = E\,\Delta l$. Ferner ist $I = J\,\Delta A$. Diese letzten beiden Beziehungen zusammen mit (13) in (12) eingesetzt, ergibt für das OHMsche Gesetz die Form

$$\boxed{\mathfrak{J} = \gamma \mathfrak{E}}\,. \tag{14}$$

Stromdichte und Feldstärke sind also über die Leitfähigkeit γ des Materials linear miteinander verknüpft.
Eine weitere Materialbeziehung besteht zwischen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$. Sie wird in der Form

$$\boxed{\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}} \tag{15}$$

geschrieben. ε bezeichnet die **Dielektrizitätskonstante.** Ihre Einheit ist nach (11) und (5)

$$[\varepsilon] = \frac{[|\mathfrak{D}|]}{[|\mathfrak{E}|]} = \text{As V}^{-1}\,\text{m}^{-1}. \tag{16}$$

Im allgemeinen schreibt man

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \tag{16a}$$

und bezeichnet ε_r als Dielektrizitätszahl (relative Dielektrizitätskonstante) des Mediums (vgl. Tafel 1). $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ As V^{-1} m^{-1} gibt die elektrische Feldkonstante (absolute Dielektrizitätskonstante des Vakuums) an.
Die elektrische Polarisation $\mathfrak{P}$ ist durch

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E} = \varepsilon_0 \mathfrak{E} + \mathfrak{P} \tag{17}$$

definiert, woraus

$$\mathfrak{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\, \mathfrak{E} \tag{17a}$$

folgt.

Bei den Eigenschaften des **magnetischen Feldes** hat man zu berücksichtigen, daß die Pole der Magneten, im Gegensatz zu elektrischen Ladungen, stets paarweise auftreten und nicht getrennt werden können. Daher ist es unzweckmäßig, die magnetischen Feldgrößen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ durch Analogien zu den elektrischen Feldgrößen abzuleiten oder aus der Wirkung auf einen Magnetpol zu definieren.

Die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ läßt sich aus der Ablenkung einer Magnetnadel bestimmen. Diese eicht man als Meßinstrument, indem man sie in eine zylindrische Spule bringt. Der Öffnungsquerschnitt der Spule sei ein Kreis, dessen Radius klein ist gegen die Spulenlänge l. Unter dieser Voraussetzung hängt die magnetische Feldstärke im Spuleninnern nur noch von der Stromstärke I und von der spezifischen Windungszahl n/l ab (vgl. 3.1.):

$$\boxed{\text{Magnetische Feldstärke } H = \text{Stromstärke } I \cdot \text{Windungszahl } n/\text{Länge } l} \tag{18}$$

Die Magnetnadel zeigt daher überall in der Spule die gleiche Auslenkung. Das Magnetfeld hat die Richtung der Spulenachse (vgl. Bild 1.2). Durch Änderung der

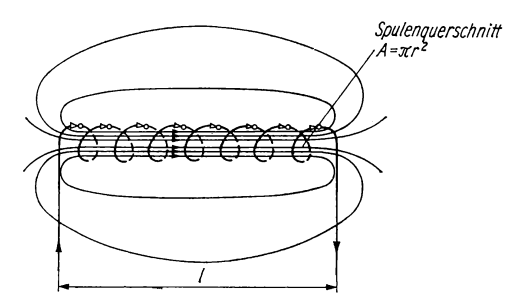


Bild 1.2. Die magnetischen Feldlinien einer kreiszylindrischen Spule

Stromstärke I wird der Magnet zum Meßinstrument geeicht. Mit diesem kann man die Stärke vorgegebener Felder bestimmen.
Nach (18) hat $\mathfrak{H}$ die Einheit

$$[|\mathfrak{H}|] = \mathrm{A\,m^{-1}}. \tag{19}$$

Die Messung und Definition der **magnetischen Flußdichte oder Induktion** $\mathfrak{B}$ erfolgt am einfachsten mit Hilfe des FARADAYschen Induktionsgesetzes.
Beim Aufbau des magnetischen Feldes $\mathfrak{B}$ in einer Zylinderspule aus n Windungen mit dem Querschnitt ΔA wird ein Spannungsstoß

$$\int U_{\text{ind}}\,\mathrm{d}t = -\iint_{\Delta A} n\mathfrak{B} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} \tag{20}$$

induziert. Diese Beziehung zwischen dem aufgebauten Magnetfeld und dem induzierten Spannungsstoß kann als Definitionsgleichung der magnetischen Flußdichte $\mathfrak{B}$ aufgefaßt werden.
Setzt man den Querschnitt ΔA als derart klein voraus, daß die Flußdichte in jedem Punkt der Querschnittsfläche ΔA den gleichen Wert hat, so folgt aus (20)

$$\boxed{B = \frac{-\int U_{\text{ind}}\,\mathrm{d}t}{n\Delta A}}. \tag{21}$$

Die Einheit der magnetischen Flußdichte ist hiernach

$$[B] = \mathrm{Vs\,m^{-2}} = \mathrm{Wb\,m^{-2}} = \mathrm{T}\ \text{(Tesla)} \tag{21a}$$

mit Vs = Wb (Weber).

Beispiel 1

In einer Spule aus 25000 Windungen mit der Querschnittsfläche $\Delta A = 4\ \mathrm{cm}^2$ wird während eines Einschaltvorganges von 10 s Dauer die konstante Spannung $U_{\mathrm{ind}} = 1{,}5$ V gemessen. Hieraus folgt als Betrag der magnetischen Flußdichte

$$|\mathfrak{B}| = \frac{1{,}5 \cdot 10}{0{,}0004 \cdot 25000}\ \mathrm{Vs\,m^{-2}} = 1{,}5\ \mathrm{Vs\,m^{-2}}.$$

Zwischen der magnetischen Flußdichte und der magnetischen Feldstärke besteht der lineare Zusammenhang

$$\boxed{\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H} = \mu_r\mu_0\mathfrak{H}}\,. \tag{22}$$

$\mu_0 = 1{,}257 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{Vs\,A^{-1}\,m^{-1}} = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{Vs\,A^{-1}\,m^{-1}}$ bedeutet die magnetische Feldkonstante (absolute Permeabilität des Vakuums), μ_r die Permeabilitätszahl (relative Permeabilität) des Mediums (vgl. Tafel 3). Bei fehlender Magnetisierung, d. h., wenn sich das betreffende Material wie das Vakuum verhält, ist $\mu = \mu_0$, $\mu_r = 1$.
Die **Magnetisierung** $\mathfrak{M}$ kennzeichnet die Bildung elementarer Magnete im Medium. Sie ist auf Grund der Zerlegung der magnetischen Induktion in

$$\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H} = \mu_0\mathfrak{H} + \mathfrak{M} \tag{23}$$

definiert. Der Vergleich von (22) und (23) ergibt

$$\mathfrak{M} = \mu_0(\mu_r - 1)\,\mathfrak{H} = \mu_0\varkappa\mathfrak{H}. \tag{23a}$$

Die Größe

$$\varkappa = \mu_r - 1$$

wird als **magnetische Suszeptibilität** des Mediums bezeichnet.
In Analogie zur elektrischen Spannung U definiert man als **magnetische Spannung** die Größe

$$U_M = \int_C \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{s}. \tag{24}$$

Sie hat die Einheit A. Ebenso wie die elektrische Spannung ist sie im allgemeinen von der Wegkurve C abhängig.
Die magnetische Umlaufspannung steht mit den fließenden Strömen durch das AMPÈREsche Verkettungsgesetz im Zusammenhang: Umfährt man eine Fläche ΔA einmal auf der geschlossenen Kurve C, so ist die magnetische Spannung gleich dem Strom I, der die umfahrene Fläche senkrecht durchsetzt. Es gilt also

$$\oint_C \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{s} = I. \tag{25}$$

Der Strom I enthält sowohl den Leitungsstrom

$$I = I_L = \iint_{\Delta A} \mathfrak{J} \cdot d\mathfrak{A} \tag{25a}$$

als auch den Verschiebungsstrom

$$I_V = \iint_{\Delta A} \dot{\mathfrak{D}} \cdot d\mathfrak{A}, \tag{25b}$$

d. h., man erhält I gemäß

$$I = I_L + I_V = \iint_{\Delta A} (\mathfrak{J} + \dot{\mathfrak{D}}) \cdot d\mathfrak{A}. \tag{26}$$

Darin bedeutet ΔA die von C eingeschlossene Fläche. Bei räumlich konstanter Stromdichte ist

$$I = (\mathfrak{J} + \dot{\mathfrak{D}}) \cdot \Delta\mathfrak{A}. \tag{26a}$$

Zwischen den vielfach noch verwendeten Einheiten des CGS-Systems und den in diesem Buch benutzten **Einheiten** des Internationalen Systems (SI) bestehen die folgenden Umrechnungsformeln:

$$1 \text{ Gauß} = 1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ Vsm}^{-2},$$

$$1 \text{ Oersted} = 1 \text{ Oe} = \frac{1000}{4\pi} \text{ A m}^{-1} = 79{,}6 \text{ Am}^{-1}.$$

Die Dielektrizitätskonstante ε und die Permeabilität μ sind mit der **Lichtgeschwindigkeit** c im Medium durch die Beziehung

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c_0}{n} = c} \tag{27}$$

verknüpft. Darin bedeutet n die Brechzahl des Mediums. Für das Vakuum erhält man

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 1{,}257 \cdot 10^{-6}}} \text{ m s}^{-1} = 2{,}998 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}.$$

Bei physikalischen Größen

$$L = L_0 \, e^{-i\omega t} \qquad \text{bzw.} \qquad L = L_0 \cos \omega t,$$

die sich harmonisch mit der Zeit verändern, ist der **Effektivwert** von Interesse. Diesen definiert man

$$L_{\text{eff}} = \sqrt{\overline{L^2}} = \sqrt{\frac{1}{\tau}\int_0^\tau L^2 \, dt} = \frac{\sqrt{2}}{2} L_0. \tag{28}$$

In (28) bedeutet $\tau = 2\pi/\omega$ die Dauer einer Periode.
Für Vektoren gilt genauso

$$\mathfrak{L}_{\text{eff}} = \sqrt{\overline{\mathfrak{L}^2}}\,. \tag{29}$$

Dieser Effektivwert ist eine skalare Größe.



Probleme

1.1.1. Elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ und dielektrische Verschiebung $\mathfrak{D}$

Ein Prüffeld enthält zwei Kugeln im Abstand 10 m. Ihre räumliche Ausdehnung bleibe unberücksichtigt. Die Koordinaten der Kugelmittelpunkte seien (−5, 0, 0) und (+5, 0, 0). Auf die erste Kugel wird eine positive elektrische Ladung von 10^{-8} C gebracht, auf die zweite eine gleich große negative Ladung. Berechnen Sie die elektrische Erregung $\mathfrak{D}$ (dielektrische Verschiebung) im Punkt (0, 0, 0). Wie groß ist dort die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$? Welche Kraft wirkt auf eine Probeladung $Q_P = 10^{-10}$ C? Die Rechnung ist für Vakuum als Zwischenmedium und für Wasser $\varepsilon_r = 81{,}1$ durchzuführen.

Lösung

Das Erregungsfeld $\mathfrak{D}$ baut sich nach (1.1./9) aus den Ladungen gemäß

$$\mathfrak{D} = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi r_i^2} \frac{\mathfrak{r}_i}{r_i} \tag{1}$$

auf. Hieraus erhält man auf Grund der Beziehung

$$\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\mathfrak{E} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{D}}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \tag{2}$$

die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$. Diese ist nach (1.1./2) als das Verhältnis $\mathfrak{E} = \mathfrak{F}/Q_P$ der Kraft $\mathfrak{F}$ zur Probeladung Q_P definiert. Es folgt damit aus (1) und (2)

$$\mathfrak{F} = Q_P\mathfrak{E} = Q_P \frac{\sum_i \frac{Q_i}{r_i^2} \frac{\mathfrak{r}_i}{r_i}}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\,. \tag{3}$$

Im vorliegenden Fall gilt für den Aufpunkt $P(0, 0, 0)$

$$\frac{\mathfrak{r}_1}{r_1} = \mathfrak{i}, \qquad \frac{\mathfrak{r}_2}{r_2} = -\mathfrak{i}.$$

Als elektrische Erregung des Punktes (0, 0, 0) ergibt sich damit

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{10^{-8}}{25}\,\mathfrak{i} + \frac{10^{-8}}{25}\,\mathfrak{i}\right) \text{As m}^{-2} = 6{,}37 \cdot 10^{-11}\,\mathfrak{i}\,\text{As m}^{-2},$$

d. h. ein Vektor in Richtung $\mathfrak{i}$ von der Größe $6{,}37 \cdot 10^{-11}$, gemessen in $\mathrm{Cm^{-2}}$. Für die elektrische Feldstärke erhält man aus (2), wenn das Zwischenmedium Vakuum ist,

$$\mathfrak{E} = \frac{6{,}37 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{As\,m^{-2}}}{8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{AsV^{-1}m^{-1}}}\,\mathfrak{i} = 7{,}20\,\mathfrak{i}\,\mathrm{Vm^{-1}},$$

dagegen für Wasser

$$\mathfrak{E}_\mathrm{W} = \frac{7{,}20}{81{,}1}\,\mathfrak{i}\,\mathrm{Vm^{-1}} = 8{,}88 \cdot 10^{-2}\,\mathfrak{i}\,\mathrm{Vm^{-1}}.$$

Die Kraft auf eine Probeladung von 10^{-10} C wird nach (3) gleich

$$\mathfrak{F} = 7{,}20 \cdot 10^{-10}\,\mathfrak{i}\,\mathrm{N} = 7{,}34 \cdot 10^{-11}\,\mathfrak{i}\,\mathrm{kp} = 7{,}20 \cdot 10^{-5}\,\mathfrak{i}\,\mathrm{dyn}$$

bzw. mit Wasser als Zwischenmedium

$$\mathfrak{F}_\mathrm{W} = 8{,}88\,\mathfrak{i} \cdot 10^{-12}\,\mathrm{N}.$$

1.1.2. Arbeit und Spannung im elektrischen Feld

Zur Messung der Geschwindigkeit von α-Teilchen läßt man diese in einem evakuierten Plattenkondensator gegen ein konstantes elektrisches Feld anlaufen. Die Kondensatorspannung beträgt $U = 10000$ V, der Plattenabstand $l = 10$ cm. Als Reichweite der Strahlen wird ein mittlerer Wert $r_0 = 6{,}5$ cm gemessen. Berechnen Sie daraus die Anfangsgeschwindigkeit der α-Teilchen beim Eintritt in das elektrische Feld. α-Teilchen sind identisch mit Heliumkernen. Der Heliumkern enthält zwei positive Elementarladungen. Die relative Atommasse des Heliums beträgt $A_\mathrm{He} = 4{,}00$.

Lösung

Im Plattenkondensator ist mit Ausnahme der Randzonen die elektrische Feldstärke konstant (vgl. 2.1.1.). Als Beziehung zwischen Spannung U und Feldstärke $\mathfrak{E}$ erhält man daher

$$U = \int_0^l \mathfrak{E} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{r} = |\mathfrak{E}|\,l \qquad \text{bzw.} \qquad |\mathfrak{E}| = \frac{U}{l}. \tag{1}$$

Mit den vorgegebenen Zahlen folgt

$$|\mathfrak{E}| = \frac{10000\,\mathrm{V}}{0{,}1\,\mathrm{m}} = 100000\,\mathrm{Vm^{-1}}.$$

Die Arbeit im elektrischen Feld ist durch (1.1./3) bestimmt. Im vorliegenden Fall ergibt sich

$$W_\mathrm{pot} = Q_\mathrm{P} \int_C \mathfrak{E} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{r} = Q_\mathrm{P} \int_0^{r_0} \mathfrak{E} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{r} = Q_\mathrm{P}\,|\mathfrak{E}|\,r_0. \tag{2}$$

Q_P bezeichnet die Ladung.
Beim Eintritt in das Feld haben die Teilchen die kinetische Energie

$$W_\mathrm{kin} = \frac{m}{2}\,v_0^2 = \frac{M_\mathrm{r}}{2N_\mathrm{A}}\,v_0^2. \tag{3}$$

(m Masse, M_r relative Molekülmasse, v_0 Anfangsgeschwindigkeit, $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{26}$ kmol^{-1} AVOGADROsche Konstante). Wir setzen (2) und (3) gleich und berücksichtigen (1). Das liefert

$$\frac{Q_P r_0 U}{l} = \frac{M_r v_0^2}{2N_A} \quad \text{bzw.} \quad v_0 = \sqrt{\frac{2N_A Q_P r_0 U}{M_r l}}. \tag{4}$$

Mit den vorgegebenen Zahlen folgt

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{26} \cdot 2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}065 \cdot 10^4}{4{,}00 \cdot 0{,}1}} \text{ m s}^{-1} = 7{,}9 \cdot 10^5 \text{ m s}^{-1},$$

d. h. knapp 800 km s^{-1}.

1.1.3. Flächenladungsdichte und elektrische Erregung an der Erdoberfläche

Die Erdoberfläche trägt eine negative elektrische Ladung, die durch positive Ladungen in der Luft kompensiert wird. Zur Messung des elektrischen Feldes der Erdoberfläche wird ein um die horizontale Achse drehbarer Plattenkondensator aufgestellt. Seine Platten haben die Größe $A_K = 2500$ cm^2. Sie werden abwechselnd vertikal und horizontal, d. h. parallel und orthogonal

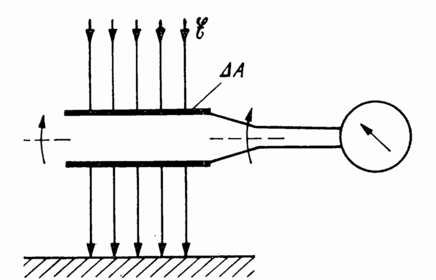


Bild 1.3. Messung der elektrischen Erregung mit einem drehbaren Plattenkondensator

zu den Feldlinien gestellt (vgl. Bild 1.3). Die Platten sind mit einem Galvanometer verbunden. Durch dieses fließt bei jedem Wechsel im Mittel die Ladung $I\,\Delta t = 2{,}95 \cdot 10^{-10}$ As. Die Messungen werden in 100 m Höhe wiederholt, wobei sich nur noch ein mittlerer Stromstoß von $2{,}81 \cdot 10^{-10}$ As ergibt. Berechnen Sie daraus die Ladung im Luftraum von 1 km^2 Grundfläche und 100 m Höhe.

Lösung

Wir berechnen die elektrische Verschiebungsdichte oder Erregung aus der Beziehung nach (1.1./6)

$$\iint_A \mathfrak{D} \cdot d\mathfrak{A} = Q, \tag{1}$$

wobei Q die eingeschlossene Ladung bezeichnet.
Auf der Kondensatorplatte in Bild 1.3 grenzen wir ein flaches Raumgebiet ΔV ab. Es habe die Grundfläche ΔA und die Höhe Δh. Im metallischen Medium der Kondensatorplatten ist $\mathfrak{D} = 0$. Um die Raumladung im Luftraum auszuschließen, lassen wir $\Delta h \to 0$ gehen und erfassen demzufolge nur noch die Ladung ΔQ auf dem Oberflächenstück ΔA des Kondensators. Damit erhalten wir aus (1)

$$\mathfrak{D} \cdot \Delta\mathfrak{A} = \mathfrak{D}_n\, \Delta A = \Delta Q. \tag{2}$$

ΔQ gibt die Ladung in ΔV an. Aus (2) ergibt sich für die Normalkomponente von $\mathfrak{D}$

$$\mathfrak{D}_\mathrm{n} = \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \sigma \qquad \text{bzw.} \qquad \mathfrak{D}_\mathrm{n} = \frac{I \Delta t}{A_\mathrm{k}}. \tag{3}$$

σ wird als Oberflächenladungsdichte bezeichnet. Die Feldlinien stehen senkrecht zur Erdoberfläche und sind in Richtung zur Erde orientiert. Aus der Messung von $\mathfrak{D}$ folgt $\mathfrak{E}$ gemäß

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{I \Delta t}{\varepsilon_0 A_\mathrm{k}}. \tag{4}$$

Mit den vorgegebenen Zahlen erhalten wir

$$D = \frac{-2{,}95 \cdot 10^{-10}}{0{,}25} \,\mathrm{As\,m^{-2}} = -1{,}180 \cdot 10^{-3} \,\mathrm{As\,m^{-2}},$$

$$E = \frac{-1{,}18 \cdot 10^{-9}}{8{,}85 \cdot 10^{-12}} \,\mathrm{Vm^{-1}} = -133 \,\mathrm{Vm^{-1}}.$$

Das Minuszeichen kennzeichnet den Richtungssinn des Feldes zur Erdoberfläche.
In $h = 100$ m Höhe folgt

$$D = -1{,}124 \cdot 10^{-9} \,\mathrm{As\,m^{-2}}, \qquad E = -127 \,\mathrm{Vm^{-1}}.$$

Zur Bestimmung der im Luftraum über der Erdoberfläche schwebenden Ladungen gehen wir aus von (1). Eine Luftschicht der Dicke dx besitze oben die Verschiebungsdichte $\mathfrak{D} + \mathrm{d}\mathfrak{D}$,

Bild 1.4. Zur Berechnung der Ladungsdichte ϱ und der Raumladung Q

unten $\mathfrak{D}$ (vgl. Bild 1.4). Dann ergibt sich aus (1)

$$(D + \mathrm{d}D)\,\Delta A - D\,\Delta A = \Delta Q. \tag{5}$$

Hieraus folgt die Raumladungsdichte ϱ

$$\varrho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{\Delta A \,\mathrm{d}D}{\Delta A \,\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}x}.$$

Im vorliegenden Fall ändert sich $\mathfrak{D}$, gemessen in vertikaler Richtung, um $0{,}056 \cdot 10^{-9}$ As m^{-2}. Daraus folgt

$$\varrho = \frac{0{,}056 \cdot 10^{-9}}{100} \,\mathrm{As\,m^{-3}} = 0{,}56 \cdot 10^{-12} \,\mathrm{C\,m^{-3}}.$$

Im vorgegebenen Raum befindet sich somit die Ladung

$$Q = 10^6 \cdot 10^2 \cdot 0{,}56 \cdot 10^{-12} \,\mathrm{As} = 56 \cdot 10^{-6} \,\mathrm{C}.$$

1.1.4. Magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$

Eine Zylinderspule der Länge $l = 20$ cm enthalte $n = 500$ Windungen. Der Radius des kreisförmigen Wicklungsquerschnitts sei $r = 1$ cm. Die Länge kann daher als groß gegen die Querschnittsabmessungen angesehen werden.
Es soll die Horizontalkomponente des magnetischen Feldes der Erde bestimmt werden. Hierzu wird eine kleine Magnetnadel in die Spule gebracht und ihre Ablenkung aus der Nord-Süd-Richtung in Abhängigkeit vom fließenden Strom I festgestellt. Dabei ergeben sich die Meßwerte nach Tabelle 1.

Tabelle 1. Ablenkung einer Magnetnadel

Strom	I in mA	4	8	12
Ablenkwinkel	φ in °	5	10	15

Die hiernach geeichte Magnetnadel zeigt im magnetischen Feld der Erde eine Abweichung von $\varphi_E = 7{,}5°$. Berechnen Sie daraus die Horizontalkomponente des Erdfeldes für den betreffenden Ort.

Lösung

Das Feld im Innern der Spule kann als räumlich konstant angesehen werden. Es hängt nur vom fließenden Strom I und von der spezifischen Windungszahl n/l ab:

$$|\mathfrak{H}| = \frac{In}{l}$$

Im vorliegenden Fall ergibt der Strom $I = 0{,}004$ A die magnetische Feldstärke

$$|\mathfrak{H}| = \frac{0{,}004 \cdot 500}{0{,}20} \text{ A m}^{-1} = 10 \text{ A m}^{-1}.$$

Die Auslenkung $\varphi_E = 7{,}5°$ bedeutet daher, daß die Horizontalkomponente des Erdfeldes

$$|\mathfrak{H}_E| = \frac{|\mathfrak{H}|}{\varphi}\,\varphi_E = \frac{10}{5} \cdot 7{,}5 \text{ A m}^{-1} = 15 \text{ A m}^{-1}$$

beträgt.

1.1.5. Messung der magnetischen Flußdichte $\mathfrak{B}$

Im Innern einer Feldspule befindet sich eine Induktionsspule aus $n_I = 1000$ Windungen mit der Querschnittfläche $\Delta A_I = 3$ cm². Durch einen variablen Widerstand wird der Strom in der Feldspule im Verlauf der Zeit $\Delta t = 8$ s gleichmäßig bis zu seinem Endwert gesteigert. Während dieses Prozesses wird in der Induktionsspule eine induzierte Spannung von $U_{\text{ind}} = 160$ µV gemessen. Berechnen Sie daraus die magnetische Flußdichte im Innern der Feldspule. Wie groß ist die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$, wenn sich in der Spule Luft befindet?

Lösung

Nach dem Induktionsgesetz (1.1./20) erzeugt die Änderung des magnetischen Flusses $\iint \mathfrak{B} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A}$ durch eine Fläche A in der Umrandung die Spannung

$$U_{\text{ind}} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_A \mathfrak{B} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A}. \tag{1}$$

Wir setzen eine so kleine Querschnittfläche ΔA_I voraus, daß wir in jedem ihrer Punkte mit dem gleichen Wert der magnetischen Flußdichte rechnen können. Insgesamt hat die Induktionsspule n_I Windungen. In jeder Windung wird beim Aufbau des magnetischen Feldes die gleiche Spannung induziert. Diese Spannungen summieren sich. Man erhält damit für den über die Zeit Δt erstreckten gleichmäßigen Prozeß als induzierte Spannung

$$U_{\text{ind}} = -n_I \, \Delta A_I \frac{\partial B}{\partial t}$$

bzw. für die Flußdichte

$$B = \frac{-\int_0^{\Delta t} U_{\text{ind}} \, \mathrm{d}t}{n_I \, \Delta A_I} = -\frac{U_{\text{ind}} \, \Delta t}{n_I \, \Delta A_I}. \tag{2}$$

Durch Einsetzen der Zahlenwerte ergibt sich

$$B = \frac{160 \cdot 10^{-6} \cdot 8}{1000 \cdot 3 \cdot 10^{-4}} \, \mathrm{Vs\,m^{-2}} = -4{,}3 \cdot 10^{-3} \, \mathrm{Vs\,m^{-2}}.$$

Für die magnetische Feldstärke folgt

$$\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{B}}{\mu_0},$$

mit speziellen Werten

$$H = \frac{-4{,}3 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7}} \, \mathrm{Am^{-1}} = -3{,}4 \cdot 10^{3} \, \mathrm{Am^{-1}}.$$

Das entspricht dem Feld im Innern einer 10 cm langen Spule aus 100 Windungen bei 3,4 A Stromstärke.



Aufgaben

A 1.1.1. Berechnen Sie die elektrische Erregung $\mathfrak{D}$ und die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ im Abstand $r = 10^{-10}$ m von einer Elementarladung $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ As ($\varepsilon = \varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ AsV^{-1} m^{-1}).

A 1.1.2. Wie groß ist die Kraft, mit der zwei entgegengesetzt geladene Elementarteilchen im Abstand $r = 10^{-10}$ m einander anziehen?

A 1.1.3. Im Mittelpunkt einer Kugel von einem Meter Durchmesser befindet sich eine negative Ladung von 10^{-6} C. Berechnen Sie die dielektrische Verschiebung und die elektrische Feldstärke auf der Kugel. Die Kugel ist aus einem Material mit $\varepsilon_r = 1{,}5$.

A 1.1.4. Zwischen zwei Kondensatorplatten beträgt die Spannung 220 V. Wie groß ist im Kondensator die elektrische Feldstärke? Der Plattenabstand beträgt 1 cm.

A 1.1.5. Welche Spannung ist erforderlich, um ein Elektron der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 10^7\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ auf die Geschwindigkeit Null abzubremsen? Elektronenmasse $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

A 1.1.6. Welche Kraft wirkt auf ein Schwebetröpfchen, das eine Elementarladung trägt, im homogenen Feld eines Kondensators mit der Spannung $U = 10^4$ V und dem Abstand $l = 1$ cm der Kondensatorplatten?

A 1.1.7. Ein kugelförmiges Schwebeteilchen der Dichte $\varrho = 1\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$ mit dem Durchmesser $2r = 1{,}0\ \mu\mathrm{m}$ befindet sich zwischen den Platten eines Kondensators. Die Spannung beträgt $U = 220$ V, der Plattenabstand $l = 1$ cm. Wie groß muß die Ladung Q sein, wenn die elektrischen Kräfte der Erdanziehung das Gleichgewicht halten sollen?

A 1.1.8. Wie groß ist der effektive Verschiebungsstrom durch eine Fläche von $5 \cdot 10^5\ \mathrm{m}^2$, wenn in der Nähe eines UKW-Senders die Frequenz $f = 100$ MHz $= 10^8$ Hz und die Feldstärke 0,5 $\mathrm{Vm^{-1}}$ betragen?

A 1.1.9. Wie groß ist die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ im Innern einer 20 cm langen Zylinderspule aus 16000 Windungen bei einem Strom von 0,5 A? Der Querschnitt ist kreisförmig.

A 1.1.10. Eine 10 cm lange Spule enthält 7000 Windungen. Der Radius des kreisförmigen Spulenquerschnittes beträgt 0,5 cm. Die Querschnittsfläche des Kupferdrahtes (spezifischer Widerstand $1/\gamma = 0{,}017\,\Omega\,\mathrm{mm^2\,m^{-1}}$) sei gleich 0,25 mm^2. Wie groß ist die magnetische Feldstärke im Innern der Spule, wenn eine Gleichspannung von 220 V anliegt?

A 1.1.11. Berechnen Sie zur vorangegangenen Aufgabe die induzierte Gegenspannung in der Spule, wenn der Strom in einer Zeit von $\Delta t = 0{,}001$ s abgeschaltet wird.

A 1.1.12. Um eine Feldspule ist eine Induktionsspule aus 4000 Windungen gewickelt. Die Induktionsspule sitzt unmittelbar auf der Feldspule, so daß die rückläufigen Feldlinien außerhalb der Feldspule die Messung nicht stören. Als Querschnittsfläche ist für beide Spulen $\Delta A = 5\ \mathrm{cm}^2$ zu setzen. Der in der Feldspule fließende Strom wird in der Zeit $\Delta t = 0{,}1$ s abgebaut. Dabei wird in der Induktionsspule eine mittlere Spannung von 30 V gemessen. Wie groß war die magnetische Flußdichte?

A 1.1.13. Berechnen Sie die magnetische Spannung bei der Bewegung zwischen dem Anfang und dem Ende im Innern einer Zylinderspule, bestehend aus 10000 Windungen, wenn in der Spule der Strom $I = 2$ A fließt. Störungen des homogenen Feldes an den Spulenrändern sind zu vernachlässigen. Wie groß ist die magnetische Spannung zwischen dem Anfangs- und dem Endpunkt, wenn man sich im Außenraum bewegt?

1.2. Potential und Gradient — elektrisches und magnetisches Moment

E Einführung

Ist eine skalare Größe Φ oder eine vektorielle Größe $\mathfrak{E}$ eine Funktion des Ortes, so spricht man von einem **skalaren oder vektoriellen Feld.** Um die vorzeitige Festlegung auf ein spezielles Koordinatensystem zu vermeiden, ist es zweckmäßig, die Abhängigkeit einer Feldgröße von den Raumkoordinaten als Funktion des **Ortsvektors** $\mathfrak{r}$ darzustellen. Skalare und vektorielle Felder sind also allgemein in der Form

$$\Phi = \Phi(\mathfrak{r}), \qquad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}(\mathfrak{r}) \tag{1}$$

gegeben. In Cartesischen Koordinaten x, y, z sind der Ortsvektor und sein Differential durch

$$\mathfrak{r} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathrm{d}\mathfrak{r} = \mathrm{d}x\,\mathfrak{i} + \mathrm{d}y\,\mathfrak{j} + \mathrm{d}z\,\mathfrak{k} \tag{2}$$

bestimmt.
Für die Änderung einer skalaren Größe Φ beim Fortschreiten im Raum erhält man in Cartesischen Koordinaten nach dem Satz vom totalen Differential

$$\mathrm{d}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\,\mathrm{d}z. \tag{3}$$

Hierin läßt sich die rechtsstehende Summe als skalares Produkt zweier Vektoren

$$\mathrm{d}\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,\mathfrak{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\,\mathfrak{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\,\mathfrak{k}\right) \cdot (\mathrm{d}x\,\mathfrak{i} + \mathrm{d}y\,\mathfrak{j} + \mathrm{d}z\,\mathfrak{k})$$

auffassen. Der erste Vektor rechts

$$\boxed{\operatorname{grad}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\,\mathfrak{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\,\mathfrak{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\,\mathfrak{k}} \tag{4}$$

definiert in Cartesischen Koordinaten den Gradienten. Durch Anwendung des Vektoroperators grad auf ein skalares Feld wird dieses in ein Vektorfeld umgewandelt.
Mittels (4) kann die **räumliche Änderung** der skalaren Größe Φ in der Form

$$\mathrm{d}\Phi = \operatorname{grad}\Phi \cdot \mathrm{d}\mathfrak{r} \tag{5}$$

dargestellt werden. Man schreibt den Gradienten (4) daher formal auch als Ableitung der skalaren Ortsfunktion $\Phi(\mathfrak{r})$ nach dem Ortsvektor $\mathfrak{r}$:

$$\operatorname{grad}\Phi = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\mathfrak{r}} = \left(\mathfrak{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi. \tag{5a}$$

Um zu einer **vom speziellen Koordinatensystem unabhängigen Definition** des Gradienten zu gelangen und seine Eigenschaften zu erkennen, betrachtet man die Niveau- oder Äquipotentialflächen der als differenzierbar vorausgesetzten skalaren Ortsfunktion $\Phi(\mathfrak{r})$. Bei der Bewegung auf einer Niveaufläche $\Phi = \Phi_0$ gilt $\mathrm{d}\Phi = 0$. Bezeichnet daher $\mathrm{d}\mathfrak{r}_0$ das Differential eines der **Tangentenvektoren** im Punkt P auf der Niveaufläche, so ergibt sich aus (5) als Beziehung zu dem im Punkt P errichteten Gradienten

$$(\mathrm{d}\Phi)_{\mathrm{d}\mathfrak{r}_0} = \operatorname{grad} \Phi \cdot \mathrm{d}\mathfrak{r}_0 = 0 .$$

Da weder $\operatorname{grad} \Phi$ noch $\mathrm{d}\mathfrak{r}_0$ gleich Null sind, müssen $\operatorname{grad} \Phi$ und $\mathrm{d}\mathfrak{r}_0$ aufeinander senkrecht stehen. Das bedeutet, daß der **Gradient auf der Niveaufläche senkrecht** steht (vgl. Bild 1.5).

Wie man aus der Beziehung (5) entnimmt, ist die Änderung der skalaren Ortsfunktion Φ bei vorgegebenem $\mathrm{d}\mathfrak{r}$ dem Betrage nach am größten, wenn $\operatorname{grad} \Phi$ und $\mathrm{d}\mathfrak{r}$

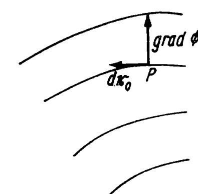


Bild 1.5. Gradient und Äquipotentialflächen
Äquipotentialfläche $\Phi(x, y, z) = \text{const}$, $\mathrm{d}\mathfrak{r}_0$ Differential eines Tangentenvektors an die Äquipotentialfläche im Punkte P

gleichgerichtet sind; der Gradient gibt somit die Richtung **stärkster Änderung der skalaren Ortsfunktion** an. Sein Betrag ist gleich dem Differentialquotienten in Richtung stärkster Änderung von Φ, also orthogonal zur Niveaufläche.

Für die Lösung vieler Probleme ist es zweckmäßig, Zylinder- oder Kugelkoordinaten einzuführen.

Der Zusammenhang zwischen Cartesischen und **Zylinderkoordinaten** ist durch

$$x = r \cos \varphi, \qquad y = r \sin \varphi, \qquad z = z \tag{6}$$

festgelegt.

Die Vektorgröße $\mathfrak{E}$ wird in Zylinderkoordinaten mittels

$$\boxed{\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_r \mathfrak{e}_r + \mathfrak{E}_\varphi \mathfrak{e}_\varphi + \mathfrak{E}_z \mathfrak{e}_z} \tag{7}$$

dargestellt. Hierbei stehen die drei Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_r$, $\mathfrak{e}_\varphi$, $\mathfrak{e}_z$ aufeinander senkrecht. $\mathfrak{e}_r$ gibt die Richtung wachsender Werte r an, wenn die übrigen beiden Koordinaten φ und z festgehalten werden. Analog sind $\mathfrak{e}_\varphi$ und $\mathfrak{e}_z$ definiert. $\mathfrak{e}_r$, $\mathfrak{e}_\varphi$, $\mathfrak{e}_z$ bilden ein Rechtssystem.

Die Vektorkomponenten $\mathfrak{E}_r$, $\mathfrak{E}_\varphi$, $\mathfrak{E}_z$ hängen mit den Cartesischen Komponenten gemäß

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}_r &= \mathfrak{E}_x \cos \varphi + \mathfrak{E}_y \sin \varphi , \\ \mathfrak{E}_\varphi &= -\mathfrak{E}_x \sin \varphi + \mathfrak{E}_y \cos \varphi , \\ \mathfrak{E}_z &= \mathfrak{E}_z \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

zusammen. Der Gradient schreibt sich in Zylinderkoordinaten

$$\boxed{\operatorname{grad} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \mathfrak{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \mathfrak{e}_\varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathfrak{e}_z}. \tag{9}$$

Kugelkoordinaten sind mit Cartesischen Koordinaten durch

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \qquad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \qquad z = r \cos \vartheta \tag{10}$$

verknüpft. Die Vektorgröße $\mathfrak{E}$ wird in Kugelkoordinaten gemäß

$$\boxed{\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_r \mathfrak{e}_r + \mathfrak{E}_\varphi \mathfrak{e}_\varphi + \mathfrak{E}_\vartheta \mathfrak{e}_\vartheta} \tag{11}$$

dargestellt mit

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}_r &= \mathfrak{E}_x \sin \vartheta \cos \varphi + \mathfrak{E}_y \sin \vartheta \sin \varphi + \mathfrak{E}_z \cos \vartheta, \\ \mathfrak{E}_\vartheta &= \mathfrak{E}_x \cos \vartheta \cos \varphi + \mathfrak{E}_y \cos \vartheta \sin \varphi - \mathfrak{E}_z \sin \vartheta, \\ \mathfrak{E}_\varphi &= -\mathfrak{E}_x \sin \varphi + \mathfrak{E}_y \cos \varphi. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Für den Gradienten ergibt sich in Kugelkoordinaten

$$\boxed{\operatorname{grad} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \mathfrak{e}_r + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \mathfrak{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \mathfrak{e}_\vartheta}. \tag{13}$$

Der Gradient ist für die Berechnung des Integrals über ein Vektorfeld bei vorgegebenem Weg $\mathfrak{C}$ von Bedeutung. In Cartesischen Koordinaten kann man das **Kurvenintegral** schreiben

$$\int_C \mathfrak{E} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{r} = \int_C (\mathfrak{E}_x \, \mathrm{d}x + \mathfrak{E}_y \, \mathrm{d}y + \mathfrak{E}_z \, \mathrm{d}z). \tag{14}$$

Im allgemeinen ist (14) von der Wegkurve C abhängig, d. h., die Integration über eine geschlossene Kurve hat ein von Null verschiedenes Ergebnis:

$$\oint \mathfrak{E} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{r} \neq 0. \tag{15}$$

Läßt sich dagegen das Vektorfeld $\mathfrak{E}(\mathfrak{r})$ als Gradient einer skalaren Ortsfunktion bzw. eines Potentials $-\Phi(\mathfrak{r})$ ausdrücken, gilt also

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{r}) = -\operatorname{grad} \Phi(\mathfrak{r}) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\mathfrak{r}}, \tag{16}$$

so folgt, (16) in (14) eingesetzt und (5) berücksichtigt,

$$\int_C \mathfrak{E} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{r} = -\int_C \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\mathfrak{r}} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{r} = -\int_{P_1}^{P_2} \mathrm{d}\Phi = \Phi(P_1) - \Phi(P_2). \tag{17}$$

P_1 und P_2 geben dabei Anfangs- und Endpunkt der Integration an. In einem Vektorfeld $\mathfrak{E}(\mathfrak{r})$, das sich als Gradient des Potentials $-\Phi(\mathfrak{r})$ ausdrücken läßt, ist somit das Linienintegral (14) nicht vom Weg C, sondern nur von Anfangs- und Endpunkt der Integration abhängig. Für das Integral über einen geschlossenen Weg C in einem derartigen Vektorfeld (16) erhält man (wenn $\Phi(\mathfrak{r})$ in dem von C eingeschlossenen Gebiet überall stetig ist)

$$\oint \mathfrak{E}(\mathfrak{r}) \cdot d\mathfrak{r} = -\oint \operatorname{grad} \Phi(\mathfrak{r}) \cdot d\mathfrak{r} = \Phi(P) - \Phi(P) = 0. \tag{15a}$$

Die nach (1.1./4) definierte **Spannung**

$$U = \int_C \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{r}$$

in einem elektrischen Feld $\mathfrak{E}$ ist im allgemeinen von der speziellen Form der Wegkurve C und nicht nur von den Endpunkten P_1 und P_2 abhängig. Nur wenn sich das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ als Gradient einer skalaren Ortsfunktion $-\Phi(\mathfrak{r})$ ausdrücken läßt, ist die Spannung vom Weg unabhängig. In diesem Falle folgt analog (17)

$$U = \int_{P_1}^{P_2} \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{r} = -\int_{P_1}^{P_2} \operatorname{grad} \Phi \cdot d\mathfrak{r} = \Phi(P_1) - \Phi(P_2), \tag{18}$$

d. h., die Spannung ergibt sich als **Differenz der Potentiale** in den beiden Punkten P_1 und P_2.

Das Potential ist bis auf eine willkürliche additive Konstante bestimmt, über die man so verfügen kann, daß $\Phi(\infty) = 0$ ist. Identifiziert man daher in (18) den Punkt P_1 mit einem vorgegebenen Punkt P_0 des Feldes und läßt P_2 ins Unendliche rücken, so folgt aus (18)

$$U = \int_{P_0}^{\infty} \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{r} = \Phi(P_0). \tag{19}$$

Das Potential $\Phi(P_0)$ eines Punktes P_0 im elektrischen Feld $\mathfrak{E}$ gibt also die Spannung U zwischen diesem Punkt und dem Unendlichen an. Die Ladung Q hat im elektrischen Feld $\mathfrak{E}$ die potentielle Energie

$$W_{\text{pot}} = Q\Phi(P_0). \tag{20}$$

Sie gibt die Arbeit an, die aufzuwenden ist, um die Ladung in das Unendliche zu transportieren.

Ein **elektrischer Dipol** wird von zwei gleich großen, entgegengesetzten elektrischen Ladungen gebildet, die im allgemeinen nahe benachbart sind. Gibt Q_D die positive elektrische Ladung des Dipols an und bezeichnet $\Delta\mathfrak{r}$ den Vektor, gezogen von der negativen zur positiven Ladung, so definiert man den Vektor

$$\boxed{\mathfrak{m}_e = Q_D \, \Delta\mathfrak{r}} \qquad [|\mathfrak{m}_e|] = \text{Am s} \tag{21}$$

als **elektrisches Moment** des Dipols. Die potentielle Energie eines Dipols mit dem elektrischen Moment $\mathfrak{m}_e$ in einem äußeren elektrischen Feld $\mathfrak{E}$ errechnet man aus den Potentialen der beiden entgegengesetzten Ladungen (vgl. 1.2.4.). Bezeichnet $\Phi(\mathfrak{r}) = \Phi$ das Potential am Ort der negativen Ladung, $\Phi(\mathfrak{r} + \Delta\mathfrak{r}) = \Phi + \Delta\Phi$ das am Ort der positiven Ladung, so folgt nach (20)

$$W_D = -Q_D\Phi + Q_D\left(\Phi + \frac{d\Phi}{d\mathfrak{r}} \cdot \Delta\mathfrak{r}\right) = -\mathfrak{m}_e \cdot \mathfrak{E}. \tag{22}$$

Die potentielle Energie eines Dipols ist also von der Stellung des Dipols im elektrischen Feld abhängig.
Für das Drehmoment $\mathfrak{M}$ eines elektrischen Dipols $\mathfrak{m}_e$ im elektrischen Feld $\mathfrak{E}$ erhält man das vektorielle Produkt

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{m}_e \times \mathfrak{E}. \tag{23}$$

Sein Betrag ist am größten, wenn $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{E}$ zueinander senkrecht stehen. Die Gleichgewichtslage $\mathfrak{M} = 0$ ergibt sich somit, wenn $\mathfrak{m}_e$ und $\mathfrak{E}$ parallel gerichtet sind.
Bei magnetischen Substanzen treten die entgegengesetzt wirkenden Pole stets paarweise auf und sind nicht voneinander zu trennen. Magnetische Körper sind also stets Dipole. Ihr **magnetisches Moment** $\mathfrak{m}_m$ ist durch das im homogenen Magnetfeld $\mathfrak{H}$ auf den Magneten wirksame Drehmoment

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{m}_m \times \mathfrak{H} \tag{24}$$

definiert. Das magnetische Moment hat die Einheit

$$[|\mathfrak{m}_m|] = \text{Vm s}. \tag{25}$$

Die Polstärke P wird durch die zu (21) analoge Formel

$$\mathfrak{m}_m = P\,\Delta\mathfrak{r} \tag{26}$$

definiert. $\Delta\mathfrak{r}$ ist vom magnetischen Südpol zum Nordpol gerichtet. Als Einheit der magnetischen Polstärke folgt aus (26)

$$[P] = \frac{[|\mathfrak{m}_m|]}{[|\Delta\mathfrak{r}|]} = \text{Vs} = \text{Wb}. \tag{27}$$

Für einen **Elektromagneten**, der aus einer vom Strom I durchflossenen Windung der Fläche ΔA besteht, beträgt das magnetische Moment

$$\mathfrak{m}_m = \mu I\,\Delta\mathfrak{A}. \tag{28}$$

Der Flächenvektor $\Delta\mathfrak{A}$ steht auf der vom Strom I umfahrenen Fläche senkrecht. Er ist so orientiert, daß in seiner Blickrichtung die Fläche vom Strom I im mathematisch positiven Drehsinn durchflossen wird. Bei einer Spule aus n Windungen beträgt das magnetische Moment

$$\boxed{\mathfrak{m}_m = \mu n I\,\Delta\mathfrak{A}}. \tag{29}$$



Probleme

1.2.1. Arbeit im inhomogenen elektrischen Feld

Im Punkt P_1 mit den Koordinaten $x_1 = -5$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$ befindet sich eine positive elektrische Ladung $Q_1 = Q = 10^{-8}$ C. Eine gleich große negative Ladung $Q_2 = -Q$ ist im Punkt P_2 mit den Koordinaten $x_2 = +5$, $y_2 = 0$, $z_2 = 0$ konzentriert. Vom Punkt A mit den Koordinaten $x_A = 0$, $y_A = 1$, $z_A = 0$ wird eine Ladung $Q_P = -10^{-10}$ C auf der verbindenden Geraden zum Punkt B mit den Koordinaten $x_B = 1$, $y_B = 0$, $z_B = 0$ gebracht. Berechnen Sie die hierfür erforderliche Arbeit. Wie groß ist diese, wenn der Ladungstransport auf der y-Achse von A nach dem Koordinatenanfangspunkt $O(0, 0, 0)$ und von dort nach B erfolgt? Wie groß ist die Spannung zwischen den genannten Punkten über die vorgeschriebenen Wegstrecken?

Lösung

Jede der beiden Ladungen erzeugt ein kugelsymmetrisches Feld. Das resultierende elektrische Feld ergibt sich daraus durch Überlagerung:

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{r_i^2} \frac{\mathfrak{r}_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{Q_i[(x - x_i)\,\mathfrak{i} + (y - y_i)\,\mathfrak{j} + (z - z_i)\,\mathfrak{k}]}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}^3}. \tag{1}$$

Das Linienelement des vorgegebenen Weges C schreiben wir als Vektor

$$\mathrm{d}\mathfrak{r} = \mathrm{d}x\,\mathfrak{i} + \mathrm{d}y\,\mathfrak{j} + \mathrm{d}z\,\mathfrak{k}. \tag{2}$$

Hieraus folgt für die Arbeit bei der Bewegung der Ladung Q_P

$$W = Q_P \int_C \mathfrak{E} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{r} = \frac{Q_P}{4\pi\varepsilon_0} \int_C \sum_i Q_i \frac{(x - x_i)\,\mathrm{d}x + (y - y_i)\,\mathrm{d}y + (z - z_i)\,\mathrm{d}z}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}^3}. \tag{3}$$

Den vorgegebenen Weg C stellen wir gemäß

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t) \tag{4}$$

dar. Der Parameter t läuft von $t_A = 0$ bis $t_B = 1$. Im Fall der geraden Verbindung zwischen den Punkten P_1 und P_2 ist

$$x(t) = t, \qquad y(t) = -t + 1, \qquad z(t) = 0; \qquad t_A = 0, \qquad t_B = 1.$$

Durch Einsetzen von (4) in (3) erhalten wir

$$W = \frac{Q_P}{4\pi\varepsilon_0} \int_{t_A}^{t_B} \sum_i Q_i \frac{\left[(x(t) - x_i)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + (y(t) - y_i)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + (z(t) - z_i)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right]}{\sqrt{[x(t) - x_i]^2 + [y(t) - y_i]^2 + [z(t) - z_i]^2}^3}\,\mathrm{d}t. \tag{5}$$

Dieser Ausdruck ist nur von den Endpunkten und nicht mehr von der Wegkurve C abhängig. Unsere Lösung ist daher für beide vorgegebenen Wegkurven identisch. Die Integration ergibt, wie man sich durch Differenzieren überzeugt,

$$W = \frac{Q_P}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i Q_i \left[\frac{-1}{\sqrt{[x(t) - x_i]^2 + [y(t) - y_i]^2 + [z(t) - z_i]^2}}\right]_{t_A}^{t_B}. \tag{6}$$

Zahlen eingesetzt, folgt

$$W = \frac{-10^{-10} \cdot 10^{-8}}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \left(\frac{-1}{\sqrt{26}} + \frac{1}{\sqrt{36}} + \frac{1}{\sqrt{26}} - \frac{1}{\sqrt{16}} \right) \mathrm{J} = 7{,}5 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J}.$$

Die Spannung zwischen den beiden Punkten beträgt somit

$$U = \frac{7{,}5 \cdot 10^{-10}}{10^{-10}}\,\mathrm{V} = 7{,}5\,\mathrm{V}.$$

1.2.2. Potential des elektrischen Feldes

In den Punkten P_1 und P_2 befinden sich die Ladungen $Q_1 = 10^{-7}$ C und $Q_2 = 2 \cdot 10^{-7}$ C. Die Ortsvektoren der Punkte P_1 und P_2 seien $\mathfrak{r}_1 = 2\mathfrak{i} - \mathfrak{j} + 4\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{r}_2 = -2\mathfrak{i} + \mathfrak{j} - 4\mathfrak{k}$. Bestimmen Sie das Potential des elektrischen Feldes, und berechnen Sie die Potentialdifferenz zwischen den Punkten $A(2, 1, 0)$ und $B(-2, -1, 0)$. Welche Gleichung hat die durch den Koordinatenanfangspunkt hindurchgehende Potentialfläche?

Lösung

Das elektrische Feld können wir in der Form

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{Q_i(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_i)}{\sqrt{(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_i)^2}^3} \tag{1}$$

schreiben. Für das Potential Φ gilt die Beziehung (vgl. 1.2./13)

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \Phi = -\frac{d\Phi}{d\mathfrak{r}}. \tag{2}$$

Daraus folgt

$$\Phi = -\int \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \sum_i \frac{Q_i(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_i)}{\sqrt{(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_i)^2}^3}\, d\mathfrak{r}. \tag{3}$$

Wir führen die Integration aus und erhalten

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{\sqrt{(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_i)^2}} + C. \tag{4}$$

Die Konstante C legen wir so fest, daß Φ die Arbeit angibt, um eine Ladung der Stärke $Q = 1$ As aus dem Unendlichen zum Punkt mit dem Ortsvektor $\mathfrak{r}$ zu bringen. Das bedeutet $\Phi(\mathfrak{r}) \to 0$, wenn $|\mathfrak{r}|$ unbeschränkt wächst, also

$$\lim_{|\mathfrak{r}| \to \infty} \Phi = 0. \tag{5}$$

Diese Bedingung ist nur erfüllt, wenn C den Wert Null hat. Somit gibt

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{\sqrt{(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_i)^2}} \tag{6}$$

bzw.

$$\Phi = \frac{1}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \left[\frac{10^{-7}}{\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2}} + \frac{2 \cdot 10^{-7}}{\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2}} \right] \mathrm{V} \tag{7}$$

das gesuchte Potential an.
Für die Äquipotentialflächen erhält man die Gleichung

$$\sum_i \frac{Q_i}{\sqrt{(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_i)^2}} = \text{const.} \tag{8}$$

Im vorliegenden Fall gilt, den Faktor 10^{-7} ausgeklammert,

$$\frac{1}{\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2}} + \frac{2}{\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2}} = \text{const.} \tag{9}$$

Die durch den Koordinatenanfangspunkt gehende Fläche ergibt sich, indem man die Konstante für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ bestimmt:

$$\frac{1}{\sqrt{4+1+16}} + \frac{2}{\sqrt{4+1+16}} = \frac{1}{7}\sqrt{21} = \text{const.}$$

Schließlich folgt aus (7) als Potentialdifferenz zwischen den Punkten $A(2, 1, 0)$ und $B(-2, -1, 0)$

$$U = \Phi(A) - \Phi(B) = \frac{10^{-7}}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \left(\frac{1}{\sqrt{20}} + \frac{2}{\sqrt{32}} - \frac{1}{\sqrt{32}} - \frac{2}{\sqrt{20}} \right) \mathrm{V} = -42\,\mathrm{V}.$$

1.2.3. Potential des kugelsymmetrischen Feldes

Berechnen Sie das Potential des elektrischen Feldes

$$\mathfrak{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \frac{\mathfrak{r}}{r} \tag{1}$$

mit $Q = 10^{-8}$ C. Wie groß ist das Potential im Abstand $r = 10$ m von der Ladung Q? Welche potentielle Energie hat dort die Ladung $Q_P = 10^{-6}$ C?

Lösung

Das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ ergibt sich aus dem Potential Φ gemäß

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \Phi. \tag{2}$$

$\mathfrak{E}$ hat die Richtung des Radiusvektors $\mathfrak{r}$. Es besteht in (1) nur eine Abhängigkeit von der Koordinate r. Wir verwenden daher Kugelkoordinaten. In diesen schreibt sich der Gradient nach (1.2./13)

$$\operatorname{grad} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \mathfrak{e}_r + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \mathfrak{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \mathfrak{e}_\vartheta. \tag{3}$$

Die elektrische Feldstärke besitzt nur eine Komponente in Richtung $\mathfrak{e}_r = \frac{\mathfrak{r}}{r}$. Daher muß das Potential sowohl von φ als auch von ϑ unabhängig sein:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = 0. \tag{4}$$

Für die Abhängigkeit von r ergibt sich aus (1), (2) und (3)

$$\frac{Q}{4\pi r^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r},$$

woraus durch Integration folgt

$$\Phi = -\int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{5}$$

Die Integrationskonstante ist gleich Null. Sie ist damit so festgelegt, daß das Potential für $r \to \infty$ verschwindet.
Auf einer Kugel im Abstand $r = 1$ m folgt als Potential

$$U = \frac{10^{-8}}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10}\ \mathrm{V} = 8{,}99\ \mathrm{V}.$$

Die potentielle Energie der Ladung $Q_\mathrm{P} = 10^{-6}$ C ist im Abstand $r = 1$ m somit gleich

$$W_\mathrm{pot} = 10^{-6} \cdot 8{,}99\ \mathrm{J} = 8{,}99\ \mu\mathrm{J}.$$

1.2.4. Elektrisches Moment eines Dipols

Im homogenen elektrischen Feld, dessen Potential in Abhängigkeit von den Raumkoordinaten durch

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1{}'x, \qquad \Phi_0 = 20000\ \mathrm{V}, \qquad \Phi_1{}' = 10000\ \mathrm{V\,m^{-1}} \tag{1}$$

gegeben ist, befindet sich ein elektrischer Dipol. Er trägt die Ladungen $\pm Q_\mathrm{D} = \pm 10^{-8}$ C, deren Abstand voneinander $l = |\Delta\mathfrak{r}| = 1$ cm beträgt. Berechnen Sie das auf diesen Dipol wirkende Drehmoment $\mathfrak{M}$, wenn der Dipol quer zu den elektrischen Feldlinien gestellt ist (vgl. Bild 1.6).

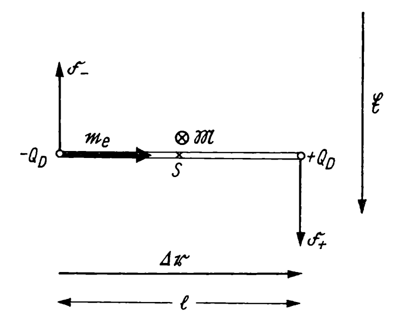


Bild 1.6. Das elektrische Moment $\mathfrak{m}_\mathrm{e}$ eines Dipols. Das Drehmoment $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}_\mathrm{e} \times \mathfrak{E}$ weist in die Zeichenebene, $\mathfrak{E}$ kennzeichnet ein homogenes Feld

Wie stark ist die Auslenkung, wenn der Dipol sich an einer drehbaren Aufhängung mit der Winkelrichtgröße $D^* = 10^{-4}$ Nm rad^{-1} befindet?

Lösung

Die potentielle Energie der Ladung $-Q_D$ an einem Punkt mit dem Potential Φ beträgt nach (1.2./20)

$$W_{pot} = -Q_D \Phi. \tag{2}$$

Wir berücksichtigen, daß sich das Potential bei Fortschreiten zum Ort der positiven Ladung Q_D verändert. Es hat dort den Wert

$$\Phi + d\Phi = \Phi + \operatorname{grad} \Phi \cdot \Delta \mathfrak{r}, \tag{3}$$

wobei $\Delta \mathfrak{r}$ die Änderung des Ortsvektors bezeichnet. Für die potentielle Energie des Dipols folgt somit, $\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \Phi$ beachtet,

$$W_D = -Q_D \Phi + Q_D(\Phi + \operatorname{grad} \Phi \cdot \Delta \mathfrak{r}) = -Q_D \, \Delta \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{E}. \tag{4}$$

Den Ausdruck

$$Q_D \, \Delta \mathfrak{r} = \mathfrak{m}_e \tag{5}$$

definieren wir als **elektrisches Moment des Dipols.** Es stellt einen Vektor dar, der von der negativen zur positiven Ladung gerichtet ist. Sein Betrag ist im vorliegenden Fall

$$|\mathfrak{m}_e| = 10^{-8} \cdot 10^{-2} \text{ Asm} = 10^{-10} \text{ Asm}.$$

Wir bezeichnen die auf die negative elektrische Ladung wirkende Kraft durch

$$\mathfrak{F}_- = -Q_D \mathfrak{E}. \tag{6}$$

Die auf die positive Ladung wirkende Kraft ist gleich

$$\mathfrak{F}_+ = Q_D \mathfrak{E}. \tag{7}$$

Beide Kräfte sind nur im homogenen elektrischen Feld dem Betrage nach gleich. Sie bewirken das Drehmoment

$$\mathfrak{M} = \sum_i \mathfrak{r}_i \times \mathfrak{F}_i = -\frac{1}{2} \Delta \mathfrak{r} \times \mathfrak{F}_- + \frac{1}{2} \Delta \mathfrak{r} \times \mathfrak{F}_+ = Q_D \, \Delta \mathfrak{r} \times \mathfrak{E}$$

bzw. nach Definition (5)

$$\boxed{\mathfrak{M} = \mathfrak{m}_e \times \mathfrak{E}}\,. \tag{8}$$

Das Drehmoment ist gleich dem Vektorprodukt aus elektrischem Moment und elektrischer Feldstärke.
Im vorliegenden Fall ist nach (1)

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \Phi = -\Phi_1{}' \mathfrak{i}.$$

Das elektrische Feld hat also die Richtung der negativen x-Achse. Steht der elektrische Dipol quer zu den Feldlinien, hat er also die Richtung der y-Achse, so folgt nach (8) als Drehmoment

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{m}_e \times \mathfrak{E} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ 0 & Q_D l & 0 \\ -\Phi_1' & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathfrak{k}\Phi_1' Q_D l .$$

Einsetzen der Zahlenwerte liefert für das in Richtung der z-Achse orientierte Drehmoment

$$\mathfrak{M}_z = 10000 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-2}\,\mathrm{J} = 10^{-6}\,\mathrm{J}.$$

Die Auslenkung φ wird durch die Beziehung

$$|\mathfrak{M}| = D\varphi$$

bestimmt. Hieraus folgt für den Auslenkwinkel

$$\varphi = \frac{|\mathfrak{M}|}{D} = \frac{10^{-6}}{10^{-4}}\,\mathrm{rad} = 0{,}57^\circ .$$

Das relativ starke elektrische Feld bewirkt eine nur geringe Auslenkung des hochgeladenen Dipols.

1.2.5. Potential und Feld des elektrischen Dipols

Ein elektrischer Dipol trägt die Ladungen $\pm Q_D = \pm 10^{-8}\,\mathrm{C}$. Der Abstand beider Ladungen ist gleich $l = |\Delta\mathfrak{r}| = 1\,\mathrm{cm}$. Bestimmen Sie das vom Dipol ausgehende elektrische Feld im Abstand $r = 2\,\mathrm{m}$.

Lösung

Nach (1.1./8) und (1.1./15) erzeugt die Ladung Q_D das kugelsymmetrische Feld

$$\mathfrak{E} = \frac{Q_D}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\frac{\mathfrak{r}}{r}. \tag{1}$$

Das Potential dieses Feldes ist gemäß 1.2.3. durch

$$\Phi = \frac{Q_D}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{2}$$

gegeben. Zwei entgegengesetzte Ladungen ergeben nach (1.1./9) und (1.1./15) das Feld

$$\mathfrak{E}_{+-} = \frac{Q_D}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+^2}\,\frac{\mathfrak{r}_+}{r_+} - \frac{1}{r^2}\,\frac{\mathfrak{r}_-}{r_-}\right). \tag{3}$$

Es läßt sich aus dem Potential

$$\Phi_{+-} = \frac{Q_D}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) \tag{4}$$

ableiten. In (3) und (4) bedeuten $\mathfrak{r}_+$ und $\mathfrak{r}_-$ die von den Ladungen $+Q_D$ und $-Q_D$ zum Aufpunkt P gezogenen Vektoren.
Für nahe benachbarte Ladungen schreiben wir

$$\mathfrak{r}_+ = \mathfrak{r} - \frac{\Delta\mathfrak{r}}{2}, \qquad \mathfrak{r}_- = \mathfrak{r} + \frac{\Delta\mathfrak{r}}{2}. \tag{5}$$

Nach dem Cosinussatz gilt für $|\Delta\mathfrak{r}| \ll |\mathfrak{r}|$

$$r_+ = \sqrt{r^2 + \frac{\Delta\mathfrak{r}^2}{4} - \mathfrak{r}\cdot\Delta\mathfrak{r}} = r - \frac{\mathfrak{r}\cdot\Delta\mathfrak{r}}{2r}, \tag{6}$$

$$r_- = \sqrt{r^2 + \frac{\Delta\mathfrak{r}^2}{4} + \mathfrak{r}\cdot\Delta\mathfrak{r}} = r + \frac{\mathfrak{r}\cdot\Delta\mathfrak{r}}{2r}. \tag{7}$$

Damit folgt aus (3) für das elektrische Feld des Dipols

$$\boxed{\mathfrak{E}_D = \frac{Q_D}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(-\Delta\mathfrak{r} + \frac{3\mathfrak{r}\cdot\Delta\mathfrak{r}}{r^2}\,\mathfrak{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(-\mathfrak{m}_e + \frac{3\mathfrak{m}_e\cdot\mathfrak{r}}{r^2}\,\mathfrak{r}\right)}, \tag{8}$$

aus (4) für das Potential

$$\Phi_D = \frac{Q_D}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\mathfrak{r}\cdot\Delta\mathfrak{r}}{r^3} = \frac{\mathfrak{m}_e\cdot\mathfrak{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}. \tag{9}$$

Für Aufpunkte P_1 und P_2 auf der verlängerten Dipolachse gilt

$$\mathfrak{m}_e\cdot\mathfrak{r} = \pm m_e r \tag{10}$$

(oberes Vorzeichen für gleiche, unteres für entgegengesetzte Orientierung von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{r}$). Daraus folgt

$$\mathfrak{E}_{P_1,P_2} = \pm\frac{m_e\mathfrak{r}}{2\pi\varepsilon_0 r^4} = \pm\frac{Q_D l}{2\pi\varepsilon_0 r^4}\,\mathfrak{r}. \tag{11}$$

Das Potential wird gleich

$$\Phi_{P_1,P_2} = \pm\frac{m_e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \pm\frac{Q_D l}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \tag{12}$$

Die Feldstärke ist im Punkt P_1 dem Radiusvektor gleich-, im Punkt P_2 entgegengerichtet. Für die Größe der Feldstärke ergibt sich

$$\frac{Q_D l}{2\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{10^{-8}\cdot 10^{-2}}{2\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 2^3}\ \mathrm{Vm^{-1}} = 0{,}225\ \mathrm{Vm^{-1}}.$$

Das Potential erhält man aus (12):

$$\Phi_{P_1,P_2} = \pm\frac{10^{-8}\cdot 10^{-2}}{4\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 2^2}\ \mathrm{V} = \pm 0{,}225\ \mathrm{V}.$$

Für Aufpunkte P_3 und P_4 oberhalb und unterhalb des Dipols folgt wegen $\mathfrak{m}_e \cdot \mathfrak{r} = 0$ aus (8) die Feldstärke

$$\mathfrak{E} = \frac{-\mathfrak{m}_e}{4\pi\varepsilon_0 r^3},$$

d. h. ein Feld entgegen dem Richtungssinne des elektrischen Moments der Größe

$$\frac{Q_D l}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{10^{-8} \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 2^3} \text{ Vm}^{-1} = 0{,}112 \text{ Vm}^{-1}.$$

In den Punkten P_3 und P_4 wird das Potential gleich Null.

1.2.6. Magnetisches Moment eines permanenten Magneten

Ein permanenter Magnet befindet sich in einer Aufhängung mit der Winkelrichtgröße $D = 5{,}5 \cdot 10^{-2}$ N m rad^{-1}. Es wird ein Magnetfeld der Stärke $2{,}5 \cdot 10^4$ A m^{-1} eingeschaltet, das senkrecht zur Ruhelage des aufgehängten Magneten gerichtet ist (vgl. Bild 1.7). Dieses Magnetfeld bewirkt eine Auslenkung aus der Ruhelage von $\varphi = 8{,}5°$. Berechnen Sie daraus das magne-

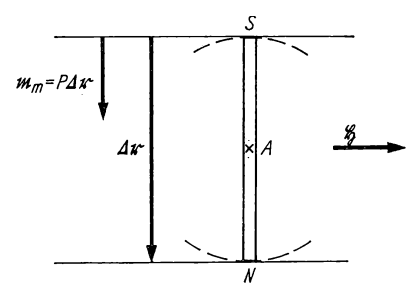


Bild 1.7. Permanenter Magnet SN im homogenen Magnetfeld $\mathfrak{H}$. A Aufhängepunkt (Schwerpunkt des Magneten)

tische Moment des permanenten Magneten. Welche Windungszahl muß eine Spule mit dem Öffnungsquerschnitt $\Delta A = 10$ cm^2 haben, die vom Strom 1 A durchflossen wird, wenn sie das gleiche magnetische Moment wie der permanente Magnet aufweisen soll?

Lösung

In Analogie zum elektrischen Moment definiert man nach (1.2./26) als magnetisches Moment den Ausdruck

$$\mathfrak{m}_m = P\,\Delta\mathfrak{r}. \tag{1}$$

Dabei ist $\Delta\mathfrak{r}$ im Magneten entgegen dem Feld $\mathfrak{B}$ vom Südpol zum Nordpol gerichtet. P bezeichnet die Polstärke eines Magneten. Das Drehmoment im Magnetfeld der Stärke $\mathfrak{H}$ wird gemäß (1.2./24) gleich

$$\boxed{\mathfrak{M} = \mathfrak{m}_m \times \mathfrak{H}.} \tag{2}$$

Die Auslenkung φ hängt vom rücktreibenden Drehmoment ab, das durch die Winkelrichtgröße D bestimmt ist. Für nicht zu große Auslenkungen gilt die Beziehung

$$\mathfrak{M} = D\vec{\varphi}. \tag{3}$$

$\vec{\varphi}$ hat die Richtung des Drehmomentes und den Betrag des Winkels φ. Wir setzen für $\mathfrak{M}$ den Zusammenhang (2) zwischen dem magnetischen Moment und der magnetischen Feldstärke ein. Daraus folgt als Auslenkwinkel

$$\vec{\varphi} = \frac{\mathfrak{m}_\mathrm{m} \times \mathfrak{H}}{D}. \tag{4}$$

Steht $\mathfrak{H}$ senkrecht zur Ruhelage des aufgehängten Magneten, so ergibt sich

$$\varphi = \frac{|\mathfrak{m}|\, H}{D} \quad \text{bzw.} \quad m_\mathrm{m} = \frac{D\varphi}{H}, \tag{5}$$

mit Zahlenwerten

$$m_\mathrm{m} = \frac{5{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot 8{,}5 \cdot \pi}{180 \cdot 2{,}5 \cdot 10^4}\,\mathrm{Vms} = 3{,}26 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Vms}. \tag{6}$$

Für einen Elektromagneten ist nach (1.2./28) sowie nach 3.2. das magnetische Moment durch

$$\mathfrak{m}_\mathrm{m} = \mu_0 n I\, \Delta\mathfrak{A} \tag{7}$$

bestimmt. Soll der Elektromagnet das magnetische Moment (6) besitzen, so muß die Windungszahl gleich

$$n = \frac{m_\mathrm{m}}{\mu_0 I\, \Delta A} = \frac{3{,}26 \cdot 10^{-7}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = 259$$

sein. Wenn also die Spulenfläche 10 cm² beträgt, sind bei 1 A Stromstärke $n = 259$ Windungen erforderlich, um elektromagnetisch die gleiche Wirkung wie mit dem permanenten Magneten zu erzielen.

1.2.7. Gaußsches Verfahren zur Messung der magnetischen Feldstärke und des magnetischen Moments

Es sollen die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}_0$ eines äußeren Feldes und das magnetische Moment $\mathfrak{m}_\mathrm{m}$ eines vorgegebenen Magneten bestimmt werden. Hierzu läßt man den Magneten $\mathfrak{m}_\mathrm{m}$ im Feld $\mathfrak{H}_0$ um seine stabile Gleichgewichtslage kleine Schwingungen ausführen und mißt die Periodendauer τ. Danach wird der Magnet $\mathfrak{m}_\mathrm{m}$ derart angeordnet, daß seine Achse senkrecht zum Feld $\mathfrak{H}_0$ gerichtet ist und genau auf den Schwerpunkt O' eines Hilfsmagneten $\mathfrak{m}'$ weist. Infolge des von $\mathfrak{m}_\mathrm{m}$ ausgehenden Feldes $\mathfrak{H}$ erfährt der Hilfsmagnet $\mathfrak{m}'$ eine Auslenkung aus der $\mathfrak{H}_0$-Richtung um den Winkel φ. Bestimmen Sie die Feldstärke $\mathfrak{H}_0$ und das magnetische Moment $\mathfrak{m}_\mathrm{m}$, wenn für die Periodendauer $\tau = 1{,}25$ s und für den Auslenkwinkel $\varphi = 2{,}15°$ gemessen werden. Das Trägheitsmoment des Magneten $\mathfrak{m}_\mathrm{m}$ beträgt $J = 2{,}4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$. Der Abstand zwischen den Schwerpunkten beider Magneten bei der Messung der Auslenkung des Hilfsmagneten ist gleich $r = 1{,}60$ m.

Lösung

Nach (1.2./24) wirkt im Magnetfeld $\mathfrak{H}_0$ auf einen Magneten mit dem magnetischen Moment $\mathfrak{m}_\mathrm{m}$ das Drehmoment

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{m}_\mathrm{m} \times \mathfrak{H}_0. \tag{1}$$

Ein freischwingender Magnet stellt sich daher so ein, daß das Drehmoment verschwindet, daß also $\mathfrak{m}_\mathrm{m}$ und $\mathfrak{H}_0$ gleichgerichtet sind. Dreht man den Magneten um den Winkel $\varphi \ll \pi$ aus der Gleichgewichtslage, so wirkt auf ihn ein rücktreibendes Richtmoment D, das durch

$$\mathfrak{M} = D\vec{\varphi} \tag{2}$$

bestimmt ist. Für kleine Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage kann man den Betrag des Drehmomentes in der Form

$$|\mathfrak{M}| = |\mathfrak{m}_\mathrm{m} \times \mathfrak{H}_0| = m_\mathrm{m}\, |\mathfrak{H}_0|\, |\sin \varphi| \approx m_\mathrm{m}\, |\mathfrak{H}_0|\, |\varphi| \tag{3}$$

schreiben. Hieraus folgt

$$D = m_\mathrm{m}\, |\mathfrak{H}_0|. \tag{4}$$

Die Periodendauer τ einer Drehschwingung ist durch

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m_\mathrm{m}\, |\mathfrak{H}_0|}} \tag{5}$$

festgelegt, wobei J das Trägheitsmoment des Magneten bedeutet. Aus der Messung der Größe τ läßt sich somit bei bekanntem J das Produkt aus der Feldstärke $\mathfrak{H}_0$ und dem magnetischen Moment $\mathfrak{m}_\mathrm{m}$ ermitteln.
Zur Bestimmung des vom Magneten $\mathfrak{m}_\mathrm{m}$ ausgehenden Feldes $\mathfrak{H}$ wenden wir die Formel (1.2.5./8) an und führen einen Analogieschluß von den in 1.2.5. betrachteten elektrischen auf magnetische

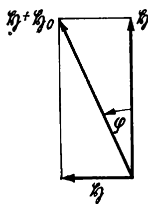


Bild 1.8. Auslenkung φ des Hilfsmagneten $\mathfrak{m}'$ im äußeren Feld und im Feld $\mathfrak{H}_0$ des untersuchten Magneten $\mathfrak{m}_\mathrm{m}$

Felder. Anstelle der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ haben wir die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$, anstelle der Dielektrizität ε die Permeabilität μ, anstelle des elektrischen Momentes $\mathfrak{m}_\mathrm{e}$ das magnetische Moment $\mathfrak{m}_\mathrm{m}$ zu setzen. Damit folgt

$$\boxed{\mathfrak{H} = \frac{1}{4\pi\mu_0 r^3}\left(-\mathfrak{m}_\mathrm{m} + \frac{3\mathfrak{m}_\mathrm{m}\cdot\mathfrak{r}}{r^2}\,\mathfrak{r}\right)}. \tag{6}$$

Liegt der Aufpunkt im Abstand $r \gg |\varDelta\mathfrak{r}|$ auf der verlängerten Magnetachse, so ergibt sich (vgl. 1.2.5./11)

$$\mathfrak{H} = \pm \frac{m_\mathrm{m}}{2\pi\mu_0 r^4}\,\mathfrak{r}. \tag{7}$$

Wir messen die vom Dipol erzeugte Feldstärke $\mathfrak{H}$ aus ihrer Wirkung auf den Hilfsmagneten $\mathfrak{m}'$. Dieser stellt sich in Richtung des resultierenden Feldes $\mathfrak{H} + \mathfrak{H}_0$ ein (vgl. Bild 1.8).
Der Auslenkwinkel aus der Richtung $\mathfrak{H}_0$ ist somit durch

$$\tan\varphi = \frac{\pm|\mathfrak{H}|}{|\mathfrak{H}_0|} = \pm\frac{m_\mathrm{m}}{2\pi\mu_0 r^3\,|\mathfrak{H}_0|} \tag{8}$$

bestimmt. Mit den vorgegebenen Werten folgt aus (5)

$$m_\mathrm{m}\,|\mathfrak{H}_0| = 4\pi^2\,\frac{J}{\tau^2} = 4\pi^2\cdot\frac{2{,}4\cdot 10^{-3}}{1{,}25}\,\mathrm{J} = 0{,}0606\,\mathrm{J}$$

und aus (8)

$$\frac{m_\mathrm{m}}{|\mathfrak{H}_0|} = 2\pi\mu_0 r^3\tan\varphi = 2\pi\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 1{,}6^3\cdot 0{,}0375\,\mathrm{Vm^2s\,A^{-1}} = 1{,}21\cdot 10^{-6}\,\mathrm{Vm^2s\,A^{-1}}.$$

Daraus ergibt sich

$$m_\mathrm{m} = 2{,}71\cdot 10^{-4}\,\mathrm{V\,m\,s}, \qquad |\mathfrak{H}_0| = 224\,\mathrm{A\,m^{-1}}.$$



Aufgaben

A 1.2.1. Wie lautet das Potential des elektrischen Feldes
$\mathfrak{E} = (10\,\mathrm{Vm^{-1}} + 20\,\mathrm{Vm^{-2}}\,x)\,\mathfrak{i} + (20\,\mathrm{Vm^{-1}} - 10\,\mathrm{Vm^{-2}}\,y)\,\mathfrak{j} - 15\,\mathrm{Vm^{-1}}\,\mathfrak{k}$?

A 1.2.2. Bestimmen Sie das Potential des elektrischen Feldes (in Zylinderkoordinaten) $\mathfrak{E} = C_1\left(\frac{z}{r^2}\,\mathfrak{e}_r - \frac{1}{r}\,\mathfrak{e}_z\right)$.

A 1.2.3. Berechnen Sie grad $\frac{1}{r^n}$, grad e^r, grad $(z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi r})$.

A 1.2.4. In den Punkten (1, 0, 0) und (−1, 0, 0) befinden sich elektrische Ladungen der Stärke 10^{-6} C. Wie groß ist die Spannung zwischen den Punkten (−0,9, 0, 0) und (+0,9, 0, 0)?

A 1.2.5. Wie groß ist in der vorangegangenen Aufgabe die Spannung zwischen den Punkten (−0,9, 0, 0) und (0, 0, 0)?

A 1.2.6. In einem Plattenkondensator mit dem Plattenabstand 20 cm wird die Feldstärke $|\mathfrak{E}| = 1000\,\mathrm{V\,m^{-1}}$ gemessen. Wie groß ist die Spannung?

A 1.2.7. Ein Elektron läuft in einem Plattenkondensator gegen eine Spannung von 1000 V an. Wie groß muß die Anfangsenergie des Elektrons sein, wenn es den Kondensator durchlaufen soll? Welcher Anfangsgeschwindigkeit entspricht das?

A 1.2.8. Bestimmen Sie zu Aufgabe A 1.2.4. das Potential.

A 1.2.9. Wie lautet zu Aufgabe A 1.2.4. die Gleichung der Potentialfläche durch den Punkt (2, 0, 0)?

A 1.2.10. Bestimmen Sie das Potential eines Plattenkondensators, dessen Platten senkrecht zur x-Achse stehen. Plattenabstand 10 cm, Spannung 220 V. Die positiv geladene Platte enthalte den Koordinatenanfangspunkt.

A 1.2.11. Wie groß ist die potentielle Energie eines elektrischen Dipols der Ladung $\pm 10^{-8}$ C mit dem Abstand der Ladungen $l = 10$ cm, wenn der Dipol quer zum Feld der Stärke $|\mathfrak{E}| = 20 \text{ V m}^{-1}$ steht. Berechnen Sie das elektrische Moment $\mathfrak{m}_e$ des Dipols und das Drehmoment.

A 1.2.12. Wie groß ist das magnetische Moment einer Spule mit $n = 5000$ Windungen, die von einem Strom der Stärke 0,1 A durchflossen wird, wenn der Spulenquerschnitt 5 cm^2 beträgt?

A 1.2.13. Berechnen Sie zur vorangegangenen Aufgabe das Drehmoment in einem Magnetfeld der Stärke 1000 A m^{-1}, wenn die Spule quer zum Feld steht.

A 1.2.14. Wie groß ist das magnetische Moment eines Elektrons, das auf der innersten BOHRschen Bahn mit dem Radius

$$r_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{e^2m}$$

den Wasserstoffkern mit der Kreisfrequenz

$$\omega_1 = \frac{e^4m}{16\pi^2\varepsilon_0{}^2\hbar^3}$$

umläuft? ($h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J s, $\hbar = h/2\pi$).

A 1.2.15. Im magnetischen Feld der Erde wird die Periodendauer einer horizontal aufgehängten Magnetnadel gemessen. Hierfür ergibt sich $\tau = 1{,}45$ s. Das Trägheitsmoment der Magnetnadel beträgt $J = 4{,}8 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$. Für die Horizontalkomponente des erdmagnetischen Feldes ist $|\mathfrak{H}_e| = 15 \text{ A m}^{-1}$ zu setzen. Berechnen Sie daraus das magnetische Moment der Magnetnadel.

A 1.2.16. Ein Magnet bewirkt im Abstand $r = 1{,}50$ m von einer Magnetnadel die Auslenkung $\varphi = 6°$. Die Magnetnadel befindet sich auf der verlängerten Achse des Magneten, der in Richtung Ost—West weist. Berechnen Sie das magnetische Moment des Magneten. Für die Horizontalkomponente des erdmagnetischen Feldes ist $|\mathfrak{H}_e| = 15 \text{ A m}^{-1}$ zu setzen. Die Mißweisung sei gleich Null.

A 1.2.17. Eine Spule aus 15000 Windungen mit der Querschnittfläche 10 cm^2 wird vom Strom $I = 1$ A durchflossen. Berechnen Sie das Magnetfeld im Abstand $r = 2$ m auf der verlängerten Spulenachse.

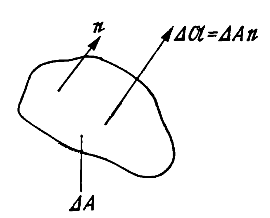
A 1.2.18. Wie groß ist in der vorangegangenen Aufgabe das Magnetfeld im Abstand $r = 4$ m senkrecht zur Magnetachse?

1.3. Rotation und Divergenz elektromagnetischer Felder

E

Einführung

Das **Umlaufintegral** über ein Vektorfeld $\mathfrak{E}(\mathfrak{r})$ ist nach (1.2./15) im allgemeinen von Null verschieden. Im folgenden wird vorausgesetzt, daß die geschlossene Wegkurve C in einer Ebene liegt.
Die von $\mathfrak{C}$ umfahrene Fläche wird durch den **Flächenvektor** $\Delta\mathfrak{A}$ dargestellt. Der Betrag des Vektors $\Delta\mathfrak{A}$ ist gleich dem Flächeninhalt ΔA. Seine Richtung steht normal zur umfahrenen Fläche. Den Vektor $\Delta\mathfrak{A}$ orientiert man derart, daß in Richtung $\Delta\mathfrak{A}$



blickend die Randkurve bei der Integration im mathematisch positiven Drehsinn umfahren wird.
Der Einheitsvektor in Richtung $\Delta\mathfrak{A}$ wird mit $\mathfrak{e}$ bezeichnet. Es gilt also

$$\Delta\mathfrak{A} = \Delta A\mathfrak{e}. \tag{1}$$

Das Umlaufintegral über die Vektorfunktion $\mathfrak{E}(\mathfrak{r})$ ist von der Randkurve C und der Größe der umfahrenen Fläche ΔA abhängig. Um vergleichbare Verhältnisse zu schaffen, betrachtet man daher den Ausdruck

$$\frac{1}{\Delta A}\oint_C \mathfrak{E}\cdot d\mathfrak{r}.$$

Zieht man die Umlaufkurve C auf einen Punkt zusammen, so ist der Grenzwert

$$\boxed{\lim_{\Delta A\to 0}\frac{1}{\Delta A}\oint \mathfrak{E}\cdot d\mathfrak{r} = \operatorname{rot}_{\mathfrak{e}}\mathfrak{E} = \mathfrak{e}\cdot\operatorname{rot}\mathfrak{E}} \tag{2}$$

nur noch eine Funktion der vorgegebenen Vektorfunktion $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(\mathfrak{r})$ und der Normalenrichtung $\mathfrak{e}$ des umfahrenen Flächenstücks. Dagegen hat die spezielle Form der Begrenzung C im Falle $\Delta A \to 0$ keinen Einfluß mehr auf den Ausdruck (2).
Durch (2) wird die **Rotation des Vektorfeldes** $\mathfrak{E}$ in einem Punkt P für eine beliebig vorgegebene Richtung $\mathfrak{e}$, d. h. in voller Allgemeingültigkeit definiert. Der **Rotor** ist ein Vektor, die Vektoroperation rot wird auf ein Vektorfeld angewandt.

Läßt sich das Vektorfeld $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(\mathfrak{r})$ als Gradient eines skalaren Feldes $\Phi = \Phi(\mathfrak{r})$ darstellen, so gilt nach 1.2. für sämtliche Umlaufkurven C (die keine Singularitäten einschließen)

$$\oint \mathfrak{E}(\mathfrak{r})\, d\mathfrak{r} = 0. \tag{3}$$

Nach (2) folgt, daß für ein Vektorfeld $\mathfrak{E} = -\text{grad}\, \Phi$ die Rotation verschwindet. Es gilt also

$$\boxed{\text{rot grad}\, \Phi = 0}. \tag{4}$$

Um festzustellen, ob ein Vektorfeld $\mathfrak{E}$ ein Potential besitzt, d. h., ob $\mathfrak{E}$ als Gradient einer skalaren Ortsfunktion Φ dargestellt werden kann, hat man lediglich den Rotor dieses Feldes zu bestimmen. Nur wenn in allen Raumpunkten

$$\text{rot}\, \mathfrak{E} = 0 \tag{5}$$

gilt, ist eine Darstellung

$$\mathfrak{E} = -\text{grad}\, \Phi \tag{6}$$

möglich.

In **Cartesischen Koordinaten** schreibt sich der Rotor, wie aus (2) nach längerer Ableitung folgt,

$$\text{rot}\, \mathfrak{E} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathfrak{E}_x & \mathfrak{E}_y & \mathfrak{E}_z \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Bei Verwendung Cartesischer Koordinaten müssen also die Beziehungen

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} \tag{8}$$

in jedem Punkt erfüllt sein, wenn $\mathfrak{E}$ in der Form (6) darstellbar sein soll.

In **Zylinderkoordinaten** lautet die Darstellung des Rotors

$$\text{rot}\, \mathfrak{E} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \mathfrak{E}_\varphi}{\partial z}\right) \mathfrak{e}_r + \left(\frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial r}\right) \mathfrak{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial [r\mathfrak{E}_\varphi]}{\partial r} - \frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial r}\right) \mathfrak{e}_z, \tag{7a}$$

in **Kugelkoordinaten**

$$\begin{aligned} \text{rot}\, \mathfrak{E} = &\left[\frac{1}{r \sin \vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \mathfrak{E}_\varphi) - \frac{\partial \mathfrak{E}_\vartheta}{\partial \varphi}\right)\right] \mathfrak{e}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (r\mathfrak{E}_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial \vartheta}\right] \mathfrak{e}_\varphi \\ &+ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin \vartheta}\frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r\mathfrak{E}_\varphi)\right] \mathfrak{e}_\vartheta. \end{aligned} \tag{7b}$$

Das Integral über eine geschlossene Kurve C, die nicht eben zu sein braucht, kann nach Bild 1.9 in Umlaufintegrale über kleine Flächenstücke ΔA_i unterteilt werden. Für jedes derartige Flächenstück gilt nach (2) im Grenzfall $\Delta A_i \to \mathrm{d}A_i$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A}_i = \oint_{C_i} \mathfrak{E} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{r}. \tag{9}$$

C_i bezeichnet die Begrenzung des Flächendifferentials $\mathrm{d}\mathfrak{A}_i$. Addiert man sämtliche Gleichungen (9), so hebt sich nach Bild 1.9 der Beitrag der Kurvenintegrale im Innern heraus, da über jede Strecke zweimal, jedoch in einander entgegengesetzten

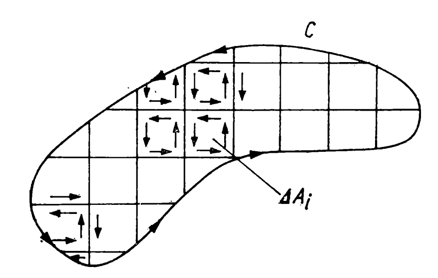


Bild 1.9. Zur Ableitung des STOKESschen Satzes

Richtungen integriert wird. Rechts verbleibt daher nur das Integral über die äußere Umlaufkurve C. Man erhält damit den **Stokesschen Satz**

$$\boxed{\iint_{\Delta A} \operatorname{rot} \mathfrak{E} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} = \oint_C \mathfrak{E} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{r}}\,. \tag{10}$$

Das Umlaufintegral des Vektorfeldes $\mathfrak{E}$, erstreckt über die Kurve C, ist gleich dem Flächenintegral von rot $\mathfrak{E}$, erstreckt über eine beliebige, von C eingeschlossene Fläche ΔA.

Zur Definition der **Divergenz** eines Vektorfeldes betrachtet man den Strom durch eine differentielle Fläche $\mathrm{d}\mathfrak{A}$.
Es bezeichne

$$\mathfrak{J} = \varrho \mathfrak{v} \tag{11}$$

den Vektor der Stromdichte. ϱ gibt in (11) die Dichte der strömenden Substanz an, $\mathfrak{v}$ ihre Strömungsgeschwindigkeit. Für den Strom $\mathrm{d}I$ durch die Fläche $\mathrm{d}\mathfrak{A}$ erhält man (vgl. Bild 1.10)

$$\mathrm{d}I = \mathfrak{J} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A}. \tag{12}$$

Der Strom $\mathrm{d}I$ ist am größten, wenn $\mathfrak{J}$ und $\mathrm{d}\mathfrak{A}$ parallel zueinander stehen. Er verschwindet bei orthogonaler Stellung von $\mathfrak{J}$ und $\mathrm{d}\mathfrak{A}$. Für den Strom ΔI durch die ge-

schlossene Fläche ΔA folgt durch Integration

$$\Delta I = \oint\!\!\oint_{\Delta A} \mathfrak{J} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A}. \tag{13}$$

Orientiert man die **Flächenvektoren** $\mathrm{d}\mathfrak{A}$ derart, daß diese aus dem von ΔA eingeschlossenen Raumgebiet ΔV **herausweisen,** so ist ΔJ **positiv,** wenn aus dem Volumen ΔV insgesamt Strom ausfließt. Die Größe ΔI kennzeichnet die Ergiebigkeit

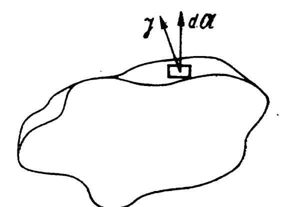


Bild 1.10. Der Strom $\mathrm{d}I = \mathfrak{J} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A}$ durch ein Flächenelement $\mathrm{d}\mathfrak{A} = \mathfrak{e}\,\mathrm{d}A$

des Volumens ΔV. Sie hängt bei vorgegebenem Feld $\mathfrak{J}$ sowohl von der Größe als auch von der Begrenzung des Volumens ΔV ab. Schrumpft ΔV im Grenzfall auf einen Punkt P zusammen, so wird die spezifische Ergiebigkeit

$$\boxed{\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint\!\!\oint \mathfrak{J} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} = \operatorname{div} \mathfrak{J}} \tag{14}$$

von der speziellen Form der Begrenzung unabhängig. (14) definiert die **Divergenz des Vektorfeldes** $\mathfrak{J}$. Sie gibt, bezogen auf das Volumen $\Delta V = 1\ \mathrm{m}^3$, die Ergiebigkeit des Vektorfeldes $\mathfrak{J}$ im Punkte P an. Durch den Vektoroperator div wird ein Vektorfeld in das Feld einer skalaren Ortsfunktion umgewandelt.

Die Ergiebigkeit eines Raumgebietes V läßt sich einmal als Summe der Ergiebigkeiten über sämtliche Punkte des Raumes V berechnen:

$$I = \iiint_V \operatorname{div} \mathfrak{J}\, \mathrm{d}V. \tag{15}$$

Andererseits muß die aus V in der Zeiteinheit austretende Substanz durch Integration über die Oberfläche A dieses Raumes folgen:

$$I = \oint\!\!\oint_A \mathfrak{J} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A}. \tag{16}$$

Es besteht daher für jedes Raumgebiet V die Beziehung

$$\boxed{\iiint_V \operatorname{div} \mathfrak{J}\, \mathrm{d}V = \oint\!\!\oint_A \mathfrak{J} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} \quad \textbf{(Gaußscher Integralsatz)}}\,. \tag{17}$$

Der GAUSSsche Integralsatz wandelt ein dreidimensionales Volumenintegral in ein zweidimensionales Oberflächenintegral um.

In **Cartesischen Koordinaten** ergibt sich die Divergenz eines Vektorfeldes $\mathfrak{J}$ nach der Formel

$$\operatorname{div} \mathfrak{J} = \frac{\partial \mathfrak{J}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{J}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{J}_z}{\partial z}. \tag{18}$$

Bei Verwendung von **Zylinderkoordinaten** gilt

$$\operatorname{div} \mathfrak{J} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mathfrak{J}_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{J}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathfrak{J}_z}{\partial z}. \tag{19}$$

In **Kugelkoordinaten** ist

$$\operatorname{div} \mathfrak{J} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \mathfrak{J}_r) \right] + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \mathfrak{J}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \mathfrak{J}_\vartheta) \right]. \tag{20}$$

Betrachtet man die drei Operatoren grad, div und rot in ihren Komponentendarstellungen, so erkennt man, daß sie durch einen symbolischen Vektor, den **Nabla-Operator**

$$\nabla = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathfrak{r}}, \tag{21}$$

zum Ausdruck gebracht werden können. In Cartesischen Koordinaten ist für ∇ zu schreiben

$$\nabla = \mathfrak{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k} \frac{\partial}{\partial z}. \tag{22}$$

Damit erhält man

$$\nabla \Phi = \mathfrak{i} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathfrak{j} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathfrak{k} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \operatorname{grad} \Phi, \tag{23}$$

$$\nabla \cdot \mathfrak{J} = \frac{\partial \mathfrak{J}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{J}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{J}_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathfrak{J}, \tag{24}$$

$$\nabla \times \mathfrak{E} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathfrak{E}_x & \mathfrak{E}_y & \mathfrak{E}_z \end{vmatrix} = \operatorname{rot} \mathfrak{E}. \tag{25}$$

Das skalare Produkt des Nabla-Operators mit sich selbst ergibt den **Laplace-Operator**

$$\triangle = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{26}$$

Der LAPLACE-Operator, auf ein skalares Feld Φ angewandt, liefert

$$\triangle \Phi = \nabla \cdot \nabla \Phi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}. \tag{27}$$

Auf ein Vektorfeld $\mathfrak{C}$ angewandt, ergibt der LAPLACE-Operator $\triangle$ in Cartesischen Koordinaten

$$\triangle\mathfrak{C} = \left(\frac{\partial^2\mathfrak{C}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathfrak{C}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathfrak{C}_x}{\partial z^2}\right)\mathfrak{i} + \left(\frac{\partial^2\mathfrak{C}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathfrak{C}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathfrak{C}_y}{\partial z^2}\right)\mathfrak{j} + \left(\frac{\partial^2\mathfrak{C}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathfrak{C}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathfrak{C}_z}{\partial z^2}\right)\mathfrak{k}. \tag{28}$$

In Zylinderkoordinaten ist

$$\triangle\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}, \tag{29}$$

in Kugelkoordinaten

$$\triangle\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\vartheta^2} + \frac{1}{r^2}\cot\vartheta\,\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}. \tag{30}$$

Bei physikalischen Berechnungen tritt gelegentlich der Operator $\mathfrak{a}\cdot\nabla$ auf. In Cartesischen Komponenten ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}\cdot\nabla\mathfrak{C} &= (a_x\mathfrak{i} + a_y\mathfrak{j} + a_z\mathfrak{k})\cdot\left(\mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(\mathfrak{C}_x\mathfrak{i} + \mathfrak{C}_y\mathfrak{j} + \mathfrak{C}_z\mathfrak{k})\\ &= \left(a_x\frac{\partial}{\partial x} + a_y\frac{\partial}{\partial y} + a_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(\mathfrak{C}_x\mathfrak{i} + \mathfrak{C}_y\mathfrak{j} + \mathfrak{C}_z\mathfrak{k}).\end{aligned} \tag{31}$$

Es lautet also z. B. die $\mathfrak{i}$-Komponente dieses Vektors

$$(\mathfrak{a}\cdot\nabla\mathfrak{C})\cdot\mathfrak{i} = a_x\frac{\partial\mathfrak{C}_x}{\partial x} + a_y\frac{\partial\mathfrak{C}_x}{\partial y} + a_z\frac{\partial\mathfrak{C}_x}{\partial z} = (\mathfrak{a}\cdot\nabla\mathfrak{C})_x. \tag{32}$$

Als **Spatprodukt** der drei Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bezeichnet man den Ausdruck

$$(\mathfrak{A}\times\mathfrak{B})\cdot\mathfrak{C} = (\mathfrak{C}\times\mathfrak{A})\cdot\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}\times\mathfrak{C})\cdot\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\cdot(\mathfrak{B}\times\mathfrak{C}). \tag{33}$$

In Cartesischen Komponenten ist

$$(\mathfrak{A}\times\mathfrak{B})\cdot\mathfrak{C} = \begin{vmatrix}\mathfrak{A}_x & \mathfrak{A}_y & \mathfrak{A}_z\\ \mathfrak{B}_x & \mathfrak{B}_y & \mathfrak{B}_z\\ \mathfrak{C}_x & \mathfrak{C}_y & \mathfrak{C}_z\end{vmatrix}, \tag{34}$$

woraus die in (33) aufgeführten Vertauschungsregeln folgen.



Probleme

1.3.1. Induktionsgesetz und Stokesscher Satz

Eine kreiszylindrische Feldspule mit $n = 15000$ Windungen hat die Länge $l = 30$ cm. Sie wird von einem Wechselstrom $I_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ durchflossen, dessen Amplitude die Größe $I_0 = 0{,}06$ A hat. Für die Kreisfrequenz ist $\omega = 2\pi \cdot 1000\ \mathrm{s}^{-1}$ zu setzen.
Unter einem Winkel von $\varphi = 30°$ gegen die Feldspule geneigt (vgl. Bild 1.11) befindet sich eine kreiszylindrische Induktionsspule mit $n_1 = 100$ Windungen, deren Radius $r_1 = 1$ cm beträgt.

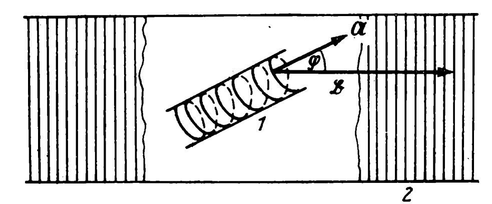


Bild 1.11. Induktionsspule *1* in einer Feldspule *2*

Berechnen Sie die induzierte Spannung in der Induktionsspule. Welcher Wert ergibt sich für die φ-Komponente des elektrischen Feldes an der Peripherie der Spule? Wie groß ist die Rotation des elektrischen Feldes?

Lösung

In der Feldspule wird die magnetische Flußdichte

$$|\mathfrak{B}| = \left| \mu_0 \frac{nI_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{l} \right| \tag{1}$$

erzeugt. Für ihre zeitliche Ableitung erhält man

$$|\dot{\mathfrak{B}}| = \left| -\mathrm{i}\mu_0\omega \frac{nI_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{l} \right|. \tag{2}$$

Das in der Feldspule erzeugte magnetische Feld trifft unter dem Winkel $\varphi = 30°$ auf den kreisförmigen Öffnungsquerschnitt der Induktionsspule. Sie sei ebenso wie die Feldspule mit Luft gefüllt, d. h., für beide Spulen beträgt die Permeabilität $\mu_0 = 1{,}257 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{V\,s\,A^{-1}\,m^{-1}}$. Wir erhalten damit für die Änderung der Durchflutung in der Induktionsspule

$$\iint_{A_1} \dot{\mathfrak{B}} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} = -\mathrm{i}\mu_0\omega \frac{nI_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{l} \cos\varphi A_1. \tag{3}$$

Hierdurch wird in jeder Windung der Induktionsspule die Umlaufspannung

$$U_{1\mathrm{ind}} = \oint \mathfrak{E} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{s} = -\iint_{A_1} \dot{\mathfrak{B}} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} \tag{4}$$

induziert (vgl. 1.1./20). Insgesamt enthält die Induktionsspule n_1 Windungen. Die induzierte Spannung wird somit gleich

$$U_{\text{ind}} = n_1 U_{1\text{ind}} = \frac{\mathrm{i} n_1 n \mu_0 \omega \cos\varphi\, A_1\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{l}. \tag{5}$$

Der Faktor i kennzeichnet die Phasenverschiebung $\pi/2$ zwischen dem Strom in der Feldspule und der induzierten Spannung in der Induktionsspule. Dabei wird vorausgesetzt, daß die ohmschen Verluste vernachlässigbar seien.
Mit Zahlenwerten folgt aus (5)

$$U_{\text{ind}} = \mathrm{i}\,\frac{100 \cdot 15000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2\pi \cdot 10^3 \cdot 0{,}866 \cdot 10^{-4}\pi \cdot 0{,}06\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi 10^3 t}}{0{,}30}\ \mathrm{V} = \mathrm{i}\, 0{,}615\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\cdot 10^3 t}\ \mathrm{V}.$$

Als effektive Spannung erhält man

$$U_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\; U_0 = 0{,}7071 \cdot 0{,}615\ \mathrm{V} = 0{,}435\ \mathrm{V}.$$

Für die in einer Windung induzierte Spannung ergibt sich

$$U_{1\text{ind}} = \frac{U_{\text{ind}}}{n_1} = \frac{\mathrm{i}\, 0{,}615\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\cdot 10^3 t}}{100} = \mathrm{i}\, 0{,}00615\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\cdot 10^3 t}\ \mathrm{V}.$$

Diese Spannung ist nach (4) mit der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ durch die Beziehung

$$U_{1\text{ind}} = \oint \mathfrak{E} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{s} = \int_0^{2\pi} \mathfrak{E}_\varphi r_1\, \mathrm{d}\varphi \tag{6}$$

verknüpft. Wir berücksichtigen, daß aus Symmetriegründen die Komponente $\mathfrak{E}_\varphi$ von φ unabhängig ist. Damit folgt aus (6)

$$U_{1\text{ind}} = 2\pi r_1 \mathfrak{E}_\varphi \qquad \text{bzw.} \qquad \mathfrak{E}_\varphi = \frac{U_{1\text{ind}}}{2\pi r_1}. \tag{7}$$

Zahlen eingesetzt, liefert

$$\mathfrak{E}_\varphi = \mathrm{i}\,\frac{0{,}00615 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\cdot 10^3 t}}{2\pi \cdot 0{,}01}\ \mathrm{V\,m^{-1}} = \mathrm{i}\, 0{,}0979\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\cdot 10^3 t}\ \mathrm{V\,m^{-1}}.$$

Nach dem STOKESschen Integralsatz (1.3./10) läßt sich das in (4) stehende Umlaufintegral in ein zweidimensionales Integral umwandeln:

$$\oint_C \mathfrak{E} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{s} = \iint_{A_1} \operatorname{rot} \mathfrak{E} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} = -\iint_{A_1} \dot{\mathfrak{B}}\, \mathrm{d}\mathfrak{A}. \tag{8}$$

Diese Beziehung besteht für sämtliche Flächen A_1 und ihre Begrenzungskurven C. Daraus folgt die MAXWELLsche Beziehung

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\dot{\mathfrak{B}}. \tag{9}$$

Durch (9) ist auch der Rotor des induzierten elektrischen Feldes $\mathfrak{E}$ bestimmt. Er ist dem zeitlichen Differentialquotienten der magnetischen Flußdichte entgegengerichtet, hat also im vorliegenden Fall die Richtung der Feldspulenachse $\mathfrak{n}$. Seine Größe ist durch (2) bestimmt. Bezieht man sich bei der Lösung auf den Realteil, so folgt durch Einsetzen von (2) in (9)

$$\mathrm{rot}_{\mathfrak{n}}\, \mathfrak{E} = \frac{\mu_0 \omega n}{l} I_0 \sin \omega t$$

bzw. in Zahlen

$$\mathrm{rot}_{\mathfrak{n}}\, \mathfrak{E} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2\pi \cdot 10^3 \cdot 15000}{0{,}30}\, 0{,}06 \sin 2\pi \cdot 10^3 t \;\mathrm{Vm^{-2}} = 23{,}7 \cdot \sin 2\pi \cdot 10^3 t \;\mathrm{Vm^{-2}}.$$

1.3.2. Magnetfeld eines zylindrischen Drahtes

Ein sehr langer zylindrischer Draht vom Radius $R = 5$ mm wird von Gleichstrom der Stärke $I = 10$ A durchflossen. Berechnen Sie das Magnetfeld im Innern des Leiters für den Achsenabstand $r = 2$mm und im Außenraum für $r = 20$ cm. Bestimmen Sie den Rotor des Magnetfeldes.

Lösung

Wir legen unserer Betrachtung Zylinderkoordinaten r, φ, z zugrunde. Aus Symmetriegründen kann eine Abhängigkeit von der Winkelvariablen φ nicht bestehen. Die magnetischen Feldlinien sind daher Kreise, die von der Zylinderachse im Mittelpunkt senkrecht durchsetzt werden. Dielektrische Verschiebungsströme brauchen nicht berücksichtigt zu werden, da der Draht von Gleichstrom durchflossen wird. Dieser ist über den gesamten Zylinderquerschnitt verteilt. Wir erhalten daher für die Stromdichte

$$|\mathfrak{J}| = \frac{I}{\pi R^2}. \tag{1}$$

Nach dem Ampèreschen Gesetz (1.1./25) und (1.1./26) über die Verkettung von elektrischem Strom und Magnetfeld gilt die Beziehung

$$\oint_C \mathfrak{H} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{s} = \iint_{\Delta A} \mathfrak{J} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A}, \tag{2}$$

wobei ΔA die von der Randkurve C umschlossene Fläche angibt. Wählt man für C einen Kreis mit dem Radius r, so folgt aus (2)

$$\oint_C \mathfrak{H} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{s} = \int_0^{2\pi} \mathfrak{H}_\varphi r \,\mathrm{d}\varphi = 2\pi r \mathfrak{H}_\varphi = \iint_{\Delta A} \mathfrak{J} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A}. \tag{3}$$

Im Falle $r \leqq R$ wird das rechts stehende Integral (vgl. Bild 1.12)

$$\iint_{\Delta A} \mathfrak{J} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} = r^2 \pi\, |\mathfrak{J}| = \frac{r^2 I}{R^2} \qquad (r \leqq R). \tag{4}$$

Damit erhält man aus (3) und (4) für den Innenraum

$$\mathfrak{H}_\varphi = \frac{rI}{2\pi R^2} \qquad (r \leqq R). \tag{5}$$

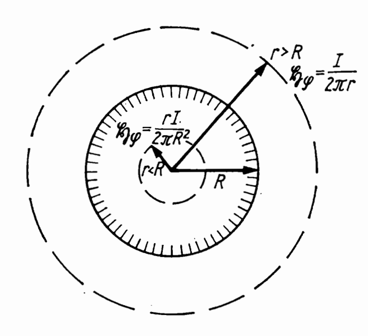


Bild 1.12. Zur Berechnung des Magnetfeldes im Innen- und im Außenraum eines sehr langen stromdurchflossenen geraden Drahtes

Dagegen ergibt sich im Falle $r \geqq R$

$$\iint_{\Delta A} \mathfrak{J} \cdot d\mathfrak{A} = I \tag{6}$$

und damit in Verbindung mit (3)

$$\mathfrak{H}_\varphi = \frac{I}{2\pi r} \qquad (r \geqq R). \tag{7}$$

Mit Zahlenwerten folgt aus (5)

$$\mathfrak{H}_\varphi = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 10}{2\pi \cdot (5 \cdot 10^{-3})^2} \text{ Am}^{-1} = 127 \text{ Am}^{-1},$$

aus (7)

$$\mathfrak{H}_\varphi = \frac{10}{2\pi \cdot 0{,}20} \text{ Am}^{-1} = 7{,}96 \text{ Am}^{-1}.$$

Zur Bestimmung der Rotation des Magnetfeldes wenden wir den Stokesschen Satz (1.3./10)

$$\oint_C \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{s} = \iint_{\Delta A} \operatorname{rot} \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{A} \tag{8}$$

an. Durch Vergleich mit (2) erhalten wir

$$\iint_{\Delta A} \operatorname{rot} \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{A} = \iint_{\Delta A} \mathfrak{J} \cdot d\mathfrak{A}. \tag{9}$$

Diese Beziehung besteht für sämtliche Flächen ΔA. Es müssen daher die Integranden übereinstimmen. Hieraus erhält man im vorliegenden Fall fehlender dielektrischer Verschiebungsströme

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mathfrak{J}. \tag{10}$$

Im Innern des Drahtes ist der Rotor des Magnetfeldes daher gleich der Stromdichte $\mathfrak{J}$. In Zahlen folgt

$$|\text{rot}\ \mathfrak{H}| = |\mathfrak{J}| = \frac{I}{\pi R^2} = \frac{10}{5 \cdot 10^{-3}\pi}\ \text{Am}^{-2} = 637\ \text{Am}^{-2}.$$

Dagegen ist im Außenraum die Rotation des Magnetfeldes gleich Null.

1.3.3. Gleichmäßig geladene Kugel — Oberflächenintegral und Divergenz

Eine Kugel vom Radius $R = 10$ cm ist gleichmäßig elektrisch geladen, d. h., jeder Punkt hat die gleiche Ladungsdichte

$$\varrho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V}.$$

Im Abstand $r = 1$ m vom Kugelmittelpunkt wird eine von der Kugel weg gerichtete elektrische Feldstärke der Größe 1 V m^{-1} gemessen. Berechnen Sie daraus die elektrische Ladungsdichte ϱ in der Kugel und das elektrische Feld a) im Abstand $r = 5$ cm, b) im Abstand $r = 2$ m vom Kugelmittelpunkt. Die Dielektrizitätskonstante ist überall gleich ε_0. Wie groß ist an den genannten Stellen die Divergenz des elektrischen Feldes?

Lösung

Nach der Definitionsgleichung (1.1./6) für die elektrische Erregung und auf Grund des Zusammenhanges (1.1./15) zwischen elektrischer Erregung und elektrischer Feldstärke gilt die Beziehung

$$\varepsilon_0 \oint\!\!\oint_A \mathfrak{E} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} = Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho. \tag{1}$$

Das Integral (1), über die Kugeloberfläche mit einem Radius $r > R$ erstreckt, ergibt

$$\varepsilon_0 4\pi r^2 \mathfrak{E}_r = Q. \tag{2}$$

Hieraus erhalten wir für die Ladungsdichte

$$\varrho = \frac{3\varepsilon_0 r^2 \mathfrak{E}_r}{R^3}. \tag{3}$$

Im Abstand $r = 1$ m ist $\mathfrak{E}_r$ bekannt. Damit können wir ϱ aus (3) berechnen. Gleichung (2) gilt für den Außenraum der Kugel, d. h. für $r > R$. Als Feldstärke im Außenraum folgt aus (2)

$$(\mathfrak{E}_r)_{r>R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{R^3\varrho}{3\varepsilon_0 r^2}. \tag{4}$$

Ist die Feldstärke für einen speziellen Radius r_0 des Außengebietes bekannt, so berechnet man diese für den Radius r am zweckmäßigsten gemäß

$$\mathfrak{E}_r(r) = \mathfrak{E}_r(r_0)\ \frac{r_0^2}{r^2}. \tag{5}$$

Das Feld im Innern der Kugel erhalten wir auf Grund der Beziehung

$$\iint\limits_{\Delta A} \varepsilon_0 \mathfrak{E} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} = 4\pi\varepsilon_0 \mathfrak{E}_r r^2 = \iiint\limits_{\Delta V} \varrho \,\mathrm{d}V = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho, \tag{6}$$

wobei $r < R$ ist. ΔA bezeichnet die Oberfläche, ΔV das Volumen der Kugel vom Radius r. Aus (6) folgt als Feldstärke im Innern der Kugel

$$(\mathfrak{E}_r)_{r<R} = \frac{r\varrho}{3\varepsilon_0}. \tag{7}$$

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt nach (3) für die Ladungsdichte

$$\varrho = \frac{3 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}{10^{-3}} \text{ As m}^{-3} = 2{,}655 \cdot 10^{-8} \text{ C m}^{-3}.$$

Nach (7) erhält man für das Feld im Abstand $r = 5$ cm vom Kugelzentrum

$$\mathfrak{E}_r = \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 2{,}655 \cdot 10^{-8}}{3 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \text{ Vm}^{-1} = 50 \text{ Vm}^{-1}.$$

Für das Feld im Abstand $r = 2$ m folgt nach (5)

$$\mathfrak{E}_r = 1{,}0 \cdot \frac{1}{4} \text{ Vm}^{-1} = 0{,}25 \text{ Vm}^{-1}.$$

Die Divergenz des elektrischen Feldes berechnen wir in Kugelkoordinaten nach (1.3./20). Im vorliegenden Fall existiert nur die Komponente $\mathfrak{E}_r$. Damit ergibt sich

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \mathfrak{E}_r). \tag{8}$$

Für das Kugelinnere erhalten wir aus (7)

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^3 \varrho}{3\varepsilon_0}\right) = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \qquad (r < R). \tag{9}$$

Dagegen folgt aus (4) für das Außengebiet

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right) = 0 \qquad (r > R). \tag{10}$$

Die Divergenz der elektrischen Erregung $\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$ ist also gerade gleich der elektrischen Ladungsdichte.

1.3.4. Kontinuitätsgleichung

Bei einer nichtstationären Höchststromentladung (Pinchentladung) fließe im Plasmastrahl ein Strom, dessen Dichte durch

$$\mathfrak{J}_z = \mathfrak{J}_0(z)\, J_0\left(2{,}405 \frac{r}{R}\right) \tag{1}$$

gegeben ist. Darin bedeutet J_0 die BESSEL-Funktion nullter Ordnung, $R = 2{,}5$ cm gibt den Radius der zylinderförmigen Entladungssäule an. Für die Stromdichte in der Zylinderachse werden zur Zeit $t = t_0$ die Werte

$$J(z_0) = -2{,}1 \cdot 10^3 \text{ A cm}^{-2},$$

$$J(z_0 + \Delta z) = -1{,}7 \cdot 10^3 \text{ A cm}^{-2}, \qquad \Delta z = 5 \text{ cm}$$

gemessen. Berechnen Sie daraus die Änderung der Ladungsdichte im Entladungsraum zwischen $z = z_0$ und $z = z_0 + \Delta z$. Welche numerischen Werte ergeben sich auf der Zylinderachse und für $r = 0{,}5R$?

Lösung

Nach dem AMPÈREschen Gesetz (1.1./25) und (1.1./26) über die Verkettung von Strom und Magnetfeld gilt für jede beliebig gekrümmte Fläche A_ν, die von einer Randkurve C begrenzt wird, die Beziehung

$$\oint_C \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{s} = \iint_{A_\nu} (\mathfrak{J} + \dot{\mathfrak{D}})\, d\mathfrak{A}_\nu .$$

Wir betrachten zwei verschiedene Flächen A_1 und A_2, die von derselben Kurve C begrenzt werden. Da für diese das Integral links identisch ist, müssen die auf der rechten Seite stehenden Integrale über die Flächen A_1 und A_2 übereinstimmen:

$$\iint_{A_1} (\mathfrak{J} + \dot{\mathfrak{D}}) \cdot d\mathfrak{A}_1 = \iint_{A_2} (\mathfrak{J} + \dot{\mathfrak{D}}) \cdot d\mathfrak{A}_2 . \tag{2}$$

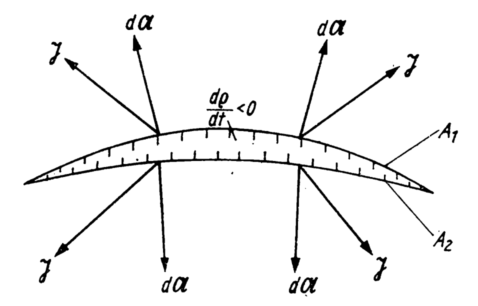


Bild 1.13. Kontinuitätsgleichung $\operatorname{div} \mathfrak{J} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$

Bilden wir aus den beiden gekrümmten Flächen A_1 und A_2 die geschlossene Fläche A und orientieren die Flächennormalen $d\mathfrak{A}$ so, daß diese in allen Punkten nach außen weisen (vgl. Bild 1.13), so folgt aus (2)

$$\oiint_A (\mathfrak{J} + \dot{\mathfrak{D}}) \cdot d\mathfrak{A} = 0 . \tag{3}$$

Nach dem GAUSSschen Satz (1.3./17) können wir schreiben

$$\oiint_A \mathfrak{J} \cdot d\mathfrak{A} = \iiint_V \operatorname{div} \mathfrak{J}\, dV . \tag{4}$$

Ferner gilt nach (1.1./6)

$$\oint\!\!\!\oint_A \dot{\mathfrak{D}}\, \mathrm{d}\mathfrak{A} = \frac{\partial}{\partial t} \oint\!\!\!\oint_A \mathfrak{D} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} = \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \varrho \,\mathrm{d}V, \tag{5}$$

wobei ϱ die Ladungsdichte, Q die gesamte Ladung im Volumen V angibt. (4) und (5) eingesetzt in (3) liefert

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathfrak{J}\, \mathrm{d}V + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \varrho\, \mathrm{d}V = 0$$

bzw.

$$\boxed{\operatorname{div} \mathfrak{J} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0}. \tag{6}$$

Gleichung (6) wird als **Kontinuitätsgleichung** bezeichnet.
In Zylinderkoordinaten folgt, wenn gemäß (1) nur eine Komponente in Richtung der Zylinderachse vorhanden ist,

$$\operatorname{div} \mathfrak{J} = \frac{\partial \mathfrak{J}_z}{\partial z} = J_0\left(2{,}405 \frac{r}{R}\right) \frac{\partial \mathfrak{J}_0(z)}{\partial z}. \tag{7}$$

Wir setzen entsprechend dem Meßergebnis

$$\frac{\partial \mathfrak{J}_z(z)}{\partial z} = \frac{\mathfrak{J}_z(z_0 + \Delta z) - \mathfrak{J}(z_0)}{\Delta z} = \frac{-1{,}7 + 2{,}1}{5 \cdot 10^{-2}}\, 10^7 \,\mathrm{Am^{-3}} = 8 \cdot 10^7 \,\mathrm{Am^{-3}}.$$

Damit erhalten wir aus der Kontinuitätsgleichung (6)

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -8 \cdot 10^7 J_0\left(2{,}405 \frac{r}{R}\right) \mathrm{Am^{-3}}. \tag{8}$$

Aus Tafeln über Zylinderfunktionen entnehmen wir

$$J_0(0) = 1{,}000, \qquad J_0(1{,}2025) = 0{,}6698.$$

Hieraus ergibt sich nach (8) für die Änderung der Ladungsdichte in der Zylinderachse

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -8 \cdot 10^7 \,\mathrm{Am^{-3}}.$$

Im Abstand $r = 0{,}5R = 1{,}25$ cm ergibt sich

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -8 \cdot 10^7 \cdot 0{,}6698 \,\mathrm{Am^{-3}} = -5{,}2 \cdot 10^7 \,\mathrm{Am^{-3}}.$$

Der nichtstationäre Entladungsvorgang ist mit dem Aufbau eines negativen Raumladungsfeldes verknüpft.



Aufgaben

A 1.3.1. Berechnen Sie die Rotation des Feldes

$$\mathfrak{E}_x = C(y^2 + z^2), \qquad \mathfrak{E}_y = C(x^2 + z^2), \qquad \mathfrak{E}_z = C(x^2 + y^2).$$

A 1.3.2. Welche Rotation hat das elektrische Feld $\mathfrak{E} = f(r)\,\mathfrak{r}$, wenn $\mathfrak{r}$ den Ortsvektor bezeichnet? Besitzt dieses Feld ein Potential?

A 1.3.3. Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen das Feld

$$\mathfrak{E}_z = C_1 r^{n_1} + C_2 \varphi^{n_2} + C_3 z^{n_3}, \qquad \mathfrak{E}_r = 0, \qquad \mathfrak{E}_\varphi = 0$$

ein Potential hat.

A 1.3.4. Berechnen Sie $\operatorname{div} \mathfrak{r}$, $\operatorname{div} \dfrac{\mathfrak{r}}{r}$, $\operatorname{div} (z\, e^{i\varphi} \mathfrak{r})$.

A 1.3.5. Drücken Sie $\operatorname{div} (\mathfrak{E} \times \mathfrak{H})$ durch die Rotation der Größen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ aus.

A 1.3.6. Beweisen Sie aus dem Entwicklungssatz $\mathfrak{A} \times (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C})\,\mathfrak{B} - (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B})\,\mathfrak{C}$ die Beziehung $\triangle \mathfrak{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{E} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{E}$.

A 1.3.7. Berechnen Sie aus dem Entwicklungssatz $\operatorname{grad} (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B})$ und $\operatorname{rot} (\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})$.

A 1.3.8. Stellen Sie die Bedingungsgleichungen in Zylinderkoordinaten dafür auf, daß das Vektorfeld $\mathfrak{E}(\mathfrak{r})$ ein Potential hat.

A 1.3.9. Beweisen Sie mittels $\nabla \times \nabla = 0$ die Beziehungen $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$ und $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = 0$.

A 1.3.10. Eine Feldspule aus 20000 Windungen mit der Länge 40 cm und kreisförmigem Querschnitt wird von einem Wechselstrom der effektiven Stromstärke 0,08 A durchflossen. Die Frequenz des Wechselstromes beträgt 100 Hz. In der Feldspule befindet sich eine Induktionsspule aus 25000 Windungen. Sie ist unter dem Winkel $\varphi = 45°$ gegen die Feldspulenachse geneigt. Die Induktionsspule hat einen kreisförmigen Querschnitt mit dem Durchmesser 4 cm. Auch die Querschnittsfläche der Feldspule ist kreisförmig. Berechnen Sie die effektive induzierte Spannung ($\mu = \mu_0$).

A 1.3.11. Berechnen Sie zur vorangegangenen Aufgabe die φ-Komponente des elektrischen Feldes an der Peripherie der Induktionsspule.

A 1.3.12. Bestimmen Sie zu den beiden vorhergehenden Aufgaben den Rotor des elektrischen Feldes.

A 1.3.13. Bestimmen Sie unter Verwendung des Induktionsgesetzes und aus der Geschlossenheit der Feldlinien den Ausdruck $\operatorname{div} \mathfrak{B}$.

A 1.3.14. Ein kreisförmiger Hohlzylinder mit dem Innenradius $R_a = 5$ cm enthalte koaxial einen massiven Kreiszylinder mit dem Außenradius $R_i = 1$ cm (koaxiale Zylinderanordnung vgl. Bild 2.3). Im Innenzylinder fließe Gleichstrom der Stärke $I = 1$ A, dessen Richtung die z-Achse kennzeichne. Ein Strom gleicher Stärke fließe in entgegengesetzter Richtung im Außenzylinder. Der Außenradius des Außenzylinders sei $R_{aa} = 7$ cm. Geben Sie das Magnetfeld in den verschiedenen Räumen an. Welche Feldstärken $\mathfrak{H}$ erhält man für die folgenden Abstände von der Achse des Innenzylinders: a) $r = 0{,}5$ cm, b) $r = 4$ cm, c) $r = 6$ cm, d) $r = 8$ cm?

A 1.3.15. In der vorangegangenen Aufgabe trage der Innenzylinder, bezogen auf die Länge $l = 1$ m, die Ladung $Q = 10^{-8}$ As. Berechnen Sie die elektrische Feldstärke für $r = 6$ cm.

A 1.3.16. Ein idealer zylindrischer Leiter wird von Wechselstrom der effektiven Stromstärke 1 A durchflossen. Dieser ist vollständig auf die Oberfläche des Leiters konzentriert. Der Radius des Leiters ist $r = 1$ cm, die Länge kann als unendlich angenommen

werden. Wie groß ist die magnetische Feldstärke a) an der Oberfläche, b) im Abstand 5 cm von der Achse, c) im Abstand 0,5 cm von der Achse?

A 1.3.17. Eine zylindrische Plasmasäule mit dem Radius $R = 5$ cm besitzt die konstante Raumladungsdichte $\varrho = 10^{-6}$ As m^{-3}. Wie groß ist die elektrische Feldstärke für die Achsenabstände a) $r = 2$ cm, b) $r = 5$ cm, c) $r = 10$ cm?

A 1.3.18. Bei einer Gasentladung fällt in der Plasmasäule die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ bei axialem Fortschreiten um 5 cm von 45 V cm^{-1} auf 42 V cm^{-1}. Berechnen Sie daraus die Ladungsdichte in der Achse.

1.4. Maxwellsche Gleichungen

E Einführung

Die MAXWELLsche Kontinuumstheorie faßt die elektrischen und magnetischen Erscheinungen in idealisierender Form zusammen. Aus den experimentellen Meßergebnissen werden zwischen den Größen des Feldes und den Größen des Mediums allgemeingültige Beziehungen abgeleitet. Sie lassen sich auf ein System von vier Differentialgleichungen, die MAXWELLschen Gleichungen, reduzieren, in denen die Gesamtheit unserer Erfahrungen über elektromagnetische Felder und Wellen enthalten ist. Der technisch interessierende Einzelfall ergibt sich durch Integration des MAXWELLschen Systems unter Berücksichtigung der Rand- und Anfangsbedingungen.

Die MAXWELLschen Gleichungen stellen für die elektromagnetischen Erscheinungen das **Analogon zu den Newtonschen Axiomen** der Mechanik dar. Wie diese erfassen sie nur die klassische Physik. Dagegen erfordert die Behandlung quantenhafter und relativistischer Effekte die Einführung zusätzlicher Axiome, die sich auf Grund der Quanten- und der Relativitätstheorie unter Berücksichtigung elektrischer und optischer Fundamentalkonstanten ergeben.

Die einzelnen Gleichungen der MAXWELLschen Theorie wurden bereits in den Abschnitten 1.1. bis 1.3. bei der Definition der elektromagnetischen Grundgrößen und bei der Behandlung der Vektoroperatoren abgeleitet. Im folgenden wird das System der MAXWELLschen Gleichungen noch einmal zusammengefaßt und verallgemeinert dargestellt. Aus der Theorie werden der Energiesatz und die Randbedingungen über das Verhalten der elektromagnetischen Größen an der Trennfläche zweier Medien abgeleitet.

Nach dem **Ampèreschen Gesetz** (1.1./25) und (1.1./26) besteht zwischen dem Strom durch eine Fläche ΔA und der magnetischen Umlaufspannung in ihrer Berandung die Verkettung

$$\iint_{\Delta A} (\dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{J}) \cdot d\mathfrak{A} = \oint_C \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{s}. \tag{1a}$$

Das **Faradaysche Induktionsgesetz** (vgl. 1.1./20) besagt: Die Änderung des magnetischen Flusses durch eine Fläche ΔA ist mit einer elektrischen Umlaufspannung in

ihrer Berandung verknüpft:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Delta A} \mathfrak{B} \cdot d\mathfrak{A} = -\oint_{C} \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{s}. \tag{2a}$$

Mit dem negativen Vorzeichen auf der rechten Seite in Gleichung (2a) wird die **Lenzsche Regel** zum Ausdruck gebracht (vgl. Problem 1.4.1.).
Quellen der elektrischen Erregung $\mathfrak{D}$ sind nach (1.1./7) die elektrischen Ladungen. Daraus folgt

$$\oint\!\!\oint_{A} \mathfrak{D} \cdot d\mathfrak{A} = \iiint_{V} \varrho \, dV = Q. \tag{3a}$$

ϱ bezeichnet die Dichte der elektrischen Ladung (Einheit: C m^{-3}). A gibt die Oberfläche des Volumens V an.
Das Magnetfeld $\mathfrak{B}$ ist im Gegensatz zum elektrischen Feld quellenfrei. Daher gilt

$$\oint\!\!\oint \mathfrak{B} \cdot d\mathfrak{A} = 0. \tag{4a}$$

Die Gleichungen (1a) bis (4a) stellen die **Maxwellschen Gleichungen in Integralform** dar.
Wendet man in (1a) und (2a) rechts auf die Ausdrücke für die Umlaufspannungen den STOKESschen Satz (1.3./10) an, so folgt

$$\oint_{C} \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{s} = \iint_{\Delta A} \operatorname{rot} \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{A}, \qquad \oint_{C} \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{s} = \iint_{\Delta A} \operatorname{rot} \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{A}.$$

Damit ergeben sich anstelle von (1a) und (2a) die Beziehungen

$$\iint_{\Delta A} (\dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{J}) \cdot d\mathfrak{A} = \iint_{\Delta A} \operatorname{rot} \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{A}, \tag{1b}$$

$$\iint_{\Delta A} \dot{\mathfrak{B}} \cdot d\mathfrak{A} = -\iint_{\Delta A} \operatorname{rot} \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{A}. \tag{2b}$$

Auf die linken Seiten der Gleichungen (3a) und (4a) kann man den GAUSSschen Satz (1.3./17) anwenden:

$$\oint\!\!\oint_{A} \mathfrak{D} \cdot d\mathfrak{A} = \iiint_{V} \operatorname{div} \mathfrak{D} \, dV, \qquad \oint\!\!\oint_{A} \mathfrak{B} \cdot d\mathfrak{A} = \iiint_{V} \operatorname{div} \mathfrak{B} \, dV.$$

Daraus erhält man anstelle von (3a) und (4a)

$$\iiint_{V} \operatorname{div} \mathfrak{D} \, dV = \iiint_{V} \varrho \, dV, \tag{3b}$$

$$\iiint_{V} \operatorname{div} \mathfrak{B} \, dV = 0. \tag{4b}$$

Die Gleichungen (1 b) und (2 b) gelten für sämtliche Flächen ΔA, die Gleichungen (3 b) und (4 b) für sämtliche Räume V. Daher müssen die Integranden übereinstimmen. Hieraus folgen die MAXWELLschen Gleichungen

$$\dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{J} = \operatorname{rot} \mathfrak{H}, \tag{1}$$

$$\dot{\mathfrak{B}} = -\operatorname{rot} \mathfrak{E}, \tag{2}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho, \tag{3}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0. \tag{4}$$

Bei ihrer Lösung sind die nach (1.1./14), (1.1./15) und (1.1./23) bestehenden linearen Beziehungen

$$\mathfrak{J} = \gamma \mathfrak{E}, \tag{5}$$

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}, \tag{6}$$

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} \tag{7}$$

zu berücksichtigen.

Für die mathematische Berechnung spezieller elektromagnetischer Felder sind außer den MAXWELLschen Gleichungen als den Differentialgleichungen des Problems die **Randbedingungen** über das Verhalten der elektromagnetischen Größen an der Grenze zweier Medien I und II zu berücksichtigen.

Die Eigenschaften der **elektrischen Feldstärke** beim Übergang zwischen zwei Medien ergeben sich aus der MAXWELLschen Gleichung (2). Sie wird für die folgende Ableitung am zweckmäßigsten in Form der Integralbeziehung (2a) angewandt. Als

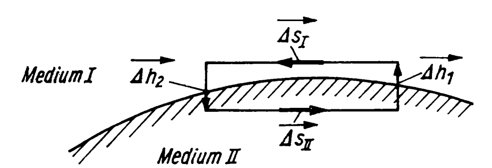


Bild 1.14. Randkurve C zwischen zwei Medien

Integrationsgebiet ΔA wird ein langgestrecktes Rechteck zwischen den beiden Medien I und II gemäß Bild 1.14 betrachtet. Seine Grundlinie Δs sei groß gegen die Höhe Δh. Für die magnetische Durchflutung der Fläche ΔA erhält man im Grenzfall $\Delta h \to 0$, wenn die Rechteckfläche $\Delta A = \Delta s \, \Delta h$ in eine Strecke entartet,

$$\lim_{\Delta h \to 0} \iint_{\Delta s \Delta h} \dot{\mathfrak{B}} \cdot d\mathfrak{A} = 0. \tag{8}$$

Das in (2a) rechts stehende Umlaufintegral über die Berandungskurve C der Fläche ΔA muß daher verschwinden:

$$\lim_{\Delta h \to 0} \oint_C \mathfrak{E} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{s} = 0. \tag{8a}$$

Die Länge Δs der Rechteckgrundlinie kann andererseits als so klein vorausgesetzt werden, daß sich die elektrische Feldstärke auf ihr innerhalb eines Mediums praktisch nicht verändert und mit ihrem Mittelwert eingesetzt werden kann. Aus (2) bzw. (2a) folgt damit in Verbindung mit (8)

$$\oint_C \mathfrak{E} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{s} = \mathfrak{E}_{\mathrm{I}} \cdot \Delta\mathfrak{s}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{E}_{\mathrm{II}} \cdot \Delta\mathfrak{s}_{\mathrm{II}} + \cdots = 0. \tag{9}$$

Die Beiträge längs der Höhen Δh_1 und Δh_2 sind zu vernachlässigen, da nach Voraussetzung $\Delta h \ll \Delta s$ gilt. Wie man sieht (vgl. Bild 1.14), besteht auf der Randkurve C die Beziehung

$$\Delta\mathfrak{s}_{\mathrm{I}} = -\Delta\mathfrak{s}_{\mathrm{II}} = \Delta\mathfrak{s}. \tag{10}$$

Im Grenzfall kennzeichnet Δs das tangentiale Linienelement im betrachteten Randpunkt. Damit folgt aus (9)

$$(\mathfrak{E}_{\mathrm{I}} - \mathfrak{E}_{\mathrm{II}}) \cdot \Delta\mathfrak{s} = (\mathfrak{E}_{\mathrm{tang\,I}} - \mathfrak{E}_{\mathrm{tang\,II}})\, \Delta s = 0$$

bzw. wegen $\Delta s \neq 0$

$$\mathfrak{E}_{\mathrm{tang\,I}} = \mathfrak{E}_{\mathrm{tang\,II}}.$$

Es bezeichne $\mathfrak{n}$ den Einheitsvektor der Flächennormalen. Im folgenden wird $\mathfrak{n}$ so orientiert, daß es **in das Medium I hinein** weist.
Man kann die abgeleiteten Beziehungen in der Form

$$\boxed{(\mathfrak{E}_{\mathrm{I}} - \mathfrak{E}_{\mathrm{II}}) \times \mathfrak{n} = 0} \tag{11}$$

schreiben. Das bedeutet: Die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes sind beim Übergang zwischen zwei Medien stetig.
In gleicher Weise folgt aus der MAXWELLschen Gleichung (1) bei endlicher Stromdichte $\mathfrak{J} + \dot{\mathfrak{D}}$ für die **magnetische Feldstärke**

$$\boxed{(\mathfrak{H}_{\mathrm{I}} - \mathfrak{H}_{\mathrm{II}}) \times \mathfrak{n} = 0}\,. \tag{12}$$

Auch die Tangentialkomponenten des magnetischen Feldes sind an der Trennfläche zwischen zwei verschiedenen Medien stetig, wenn die Stromdichte nicht über alle Grenzen ansteigt.
Das Verhalten der magnetischen Feldstärke bei Wechselströmen im Grenzfall verschwindenden elektrischen Widerstandes wird im Problem 1.4.3. dargestellt.

Die Eigenschaften der **elektrischen Erregung** $\mathfrak{D}$ gehen aus der MAXWELLschen Gleichung (3) in der Integralform (3a) hervor. Als Integrationsvolumen V wird ein Zylinder im Grenzgebiet zwischen beiden Medien gewählt, dessen Höhe Δh klein ist gegen die Abmessungen der Grundfläche ΔA (vgl. Bild 1.15). Bei der Integration

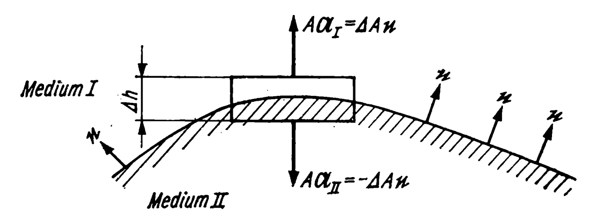


Bild 1.15. Integrationsvolumen V an der Grenze zweier Medien. Die Orientierung der Flächennormalen $\mathfrak{n}$ (statt $\Delta\mathfrak{A}_I$ bzw. $\Delta\mathfrak{A}_{II}$ lies $\Delta\mathfrak{A}_I$ bzw. $\Delta\mathfrak{A}_{II}$)

über die Oberfläche dieses Volumens brauchen nur die Beiträge der Zylindergrund- und -deckfläche berücksichtigt zu werden. Im Grenzfall $\Delta A \to 0$ gehen diese beiden parallelen Flächen in die Tangentialebene über. Für die betrachteten Flächen gilt die Beziehung

$$-\Delta\mathfrak{A}_{\mathrm{II}} = \Delta\mathfrak{A}_{\mathrm{I}} = \Delta A\mathfrak{n}.$$

Damit erhält man

$$\oint\!\!\!\oint \mathfrak{D} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} = \mathfrak{D}_{\mathrm{I}} \cdot \Delta\mathfrak{A}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{D}_{\mathrm{II}} \cdot \Delta\mathfrak{A}_{\mathrm{II}} = (\mathfrak{D}_{\mathrm{I}} - \mathfrak{D}_{\mathrm{II}}) \cdot \mathfrak{n}\, \Delta A. \tag{13}$$

Das links stehende Oberflächenintegral zur Bestimmung der Ladung im Volumen $\Delta A\ \Delta h$ wird im Grenzfall $\Delta h \to 0$ gleich

$$\iiint_{\Delta A \Delta h} \varrho\, \mathrm{d}V = \sigma\, \Delta A, \tag{14}$$

wobei σ die Dichte der Oberflächenladung, gemessen in As m^{-2}, angibt. Aus (13) und (14) ergibt sich damit

$$\boxed{(\mathfrak{D}_{\mathrm{I}} - \mathfrak{D}_{\mathrm{II}}) \cdot \mathfrak{n} = \sigma}\,. \tag{15}$$

Gleichung (15) besagt: Die Normalkomponente der elektrischen Erregung verhält sich beim Übergang zwischen zwei Medien unstetig. Der Unstetigkeitssprung ist gleich der Oberflächenladungsdichte σ.
Ist das Medium II ein idealer Leiter, d. h. ein Metall, so gilt $\mathfrak{D}_{\mathrm{II}} = 0$. Man kann dann anstelle von (15)

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{I}} \cdot \mathfrak{n} = \mathfrak{D}_{\mathrm{n}} = \sigma \tag{15a}$$

schreiben.

Über die Eigenschaften der **magnetischen Flußdichte** $\mathfrak{B}$ beim Übergang zwischen zwei Medien folgt aus der MAXWELLschen Gleichung (4a)

$$\boxed{(\mathfrak{B}_{\mathrm{I}} - \mathfrak{B}_{\mathrm{II}}) \cdot \mathfrak{n} = 0}. \tag{16}$$

Die Normalkomponenten der magnetischen Flußdichte verhalten sich an der Trennfläche zwischen zwei Medien stetig.

Aus den MAXWELLschen Gleichungen läßt sich der **Energiesatz** für elektromagnetische Felder ableiten. Hierzu multipliziert man die MAXWELLsche Gleichung (1) skalar mit $\mathfrak{E}$, die MAXWELLsche Gleichung (2) skalar mit $\mathfrak{H}$. Die beiden sich ergebenden Beziehungen werden addiert:

$$\mathfrak{E} \cdot \dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{J} + \mathfrak{H} \cdot \dot{\mathfrak{B}} = \mathfrak{E} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{H} - \mathfrak{H} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{E}. \tag{17}$$

Anstelle der rechten Seite kann

$$-\operatorname{div} (\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}) = \mathfrak{E} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{H} - \mathfrak{H} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{E} \tag{18}$$

geschrieben werden (vgl. Aufgabe A 1.3.5.).
Definiert man den **Poyntingschen Vektor**

$$\boxed{\mathfrak{S} = \mathfrak{E} \times \mathfrak{H}}, \tag{19}$$

so ergibt sich aus (17) und (18) der **Poyntingsche Satz**

$$\boxed{\mathfrak{E} \cdot \dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{J} + \mathfrak{H} \cdot \dot{\mathfrak{B}} + \operatorname{div} \mathfrak{S} = 0}. \tag{20}$$

Die einzelnen Summanden haben die Einheit

$$[\mathfrak{E} \cdot \dot{\mathfrak{D}}] = [\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{J}] = [\mathfrak{H} \cdot \dot{\mathfrak{B}}] = [\operatorname{div} \mathfrak{S}] = \mathrm{J\,s^{-1}\,m^{-3}}.$$

Sie kennzeichnen Energiegrößen, bezogen auf die Raum- und Zeiteinheit. (20) läßt sich unter Verwendung der linearen Beziehungen (6) und (7) integrieren. Aus dem ersten Summanden der Gleichung (20) folgt

$$\int \mathfrak{E} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{D} = \int \mathfrak{E} \cdot \dot{\mathfrak{D}}\, \mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathfrak{E}^2\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\, \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D}. \tag{21}$$

Der dritte Summand liefert

$$\int \mathfrak{H} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{B} = \int \mathfrak{H} \cdot \dot{\mathfrak{B}}\, \mathrm{d}t = \frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathfrak{H}^2\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\, \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{B}. \tag{21a}$$

Diese Größen haben die Maßeinheit $\mathrm{J\,m^{-3}}$. Sie geben die elektrische bzw. magnetische Energiedichte des Feldes an. Der zweite Summand in (20) kommt durch die Leitungsverluste zustande. Bei verschwindendem Widerstand ist wegen $\mathfrak{E} = 0$ dieser

Summand nicht vorhanden. $\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{J}$ charakterisiert die **Wärmeentwicklung (Joulesche Wärme)** des elektromagnetischen Feldes.
Die Einheit des Vektors $\mathfrak{S}$ ist nach (19)

$$[|\mathfrak{S}|] = [|\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}|] = \mathrm{J\,s^{-1}\,m^{-2}}.$$

Der POYNTINGsche Vektor kennzeichnet die **Energiestromdichte**, d. h. die infolge Ausstrahlung fließende Energie, bezogen auf die Flächen- und Zeiteinheit.
Räumliche Integration der Gleichung (20) ergibt, wenn man auf den letzten Summanden den GAUSSschen Satz anwendet,

$$\iiint_V \mathfrak{E} \cdot \dot{\mathfrak{D}}\, \mathrm{d}V + \iiint_V \mathfrak{H} \cdot \dot{\mathfrak{B}}\, \mathrm{d}V + \iiint_V \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{J}\, \mathrm{d}V + \oiint_A \mathfrak{S} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} = 0. \tag{22}$$

Hierin hat jeder Summand die Dimension einer zeitlichen Energiedichte bzw. Leistung. (22) enthält den **Energiesatz für elektromagnetische Felder,** bezogen auf ein Volumen V. Er besagt, von rechts nach links gelesen, daß Energieverluste infolge Ausstrahlung und Wärmewirkung durch die Veränderung der magnetischen und elektrischen Feldenergie kompensiert werden.
Es bezeichnen somit nach (21) und (22)

$$W_\mathrm{e} = \frac{1}{2} \iiint_V \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D}\, \mathrm{d}V \tag{23}$$

die elektrische,

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2} \iiint_V \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{B}\, \mathrm{d}V \tag{24}$$

die magnetische Energie des Feldes.

$$\dot{W}_\mathrm{W} = \iiint_V \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{J}\, \mathrm{d}V \tag{25}$$

gibt die Wärmeleistung des Feldes an,

$$\dot{W}_\mathrm{S} = \oiint \mathfrak{E} \times \mathfrak{H} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} \tag{26}$$

bezeichnet die Verluste durch Wärmestrahlung.



Probleme

1.4.1. Lenzsche Regel

Eine kreiszylindrische Feldspule enthält $n = 15000$ Windungen (Querschnitt $A = 4\ \mathrm{cm^2}$). Sie wird, von rechts nach links gesehen, vom elektrischen Strom im mathematisch positiven Drehsinn durchflossen (vgl. Bild 1.16). Die Stromstärke steigert sich in der Zeit $t_0 = 10\ \mathrm{s}$ von Null

auf $I = 10$ A. Links gegenüber der Feldspule, im Abstand $r = 1$ m auf der Zylinderachse, befindet sich eine Induktionsspule aus $n_{\rm I} = 1\,200$ Windungen mit der Länge $l_{\rm I} = 10$ cm, dem Querschnitt $A_{\rm I} = 1{,}5$ cm² und dem ohmschen Widerstand $R = 1\,\Omega$. Berechnen Sie den in der In-

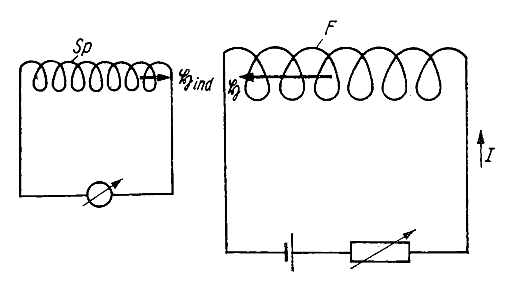


Bild 1.16. LENZsche Regel — F Feldspule, Sp Induktionsspule

duktionsspule induzierten Strom und sein Magnetfeld. Der induktive Widerstand der Induktionsspule kann vernachlässigt werden.

Lösung

Die Feldspule stellt, nachdem der Strom die volle Stärke I erreicht hat, einen Magneten mit dem magnetischen Moment

$$\mathfrak{m} = \mu_0 n I \mathfrak{A} \tag{1}$$

dar. Nach (1.2.7./6) bzw. (1.2.7./7) wird im Abstand r links vom Feldmagneten ein Feld der Stärke

$$\mathfrak{H} = \frac{m\mathfrak{r}}{2\pi\mu_0 r^4} = \frac{nI\mathfrak{A}}{2\pi r^3} \tag{2}$$

aufgebaut. Es induziert nach (1.4./2) in der Induktionsspule die elektrische Umlaufspannung

$$U_{\rm ind} = n_{\rm I} \oint \mathfrak{E} \cdot {\rm d}\mathfrak{s} = -n_{\rm I} \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{A_{\rm I}} \mathfrak{B} \cdot {\rm d}\mathfrak{A}. \tag{3}$$

$\mathfrak{A}_{\rm I}$ orientieren wir in Richtung der z-Achse, also wie $\mathfrak{A}$.
In der Zeit Δt steigt nach (2) die magnetische Flußdichte um

$$\Delta\mathfrak{B} = \mu_0\,\Delta\mathfrak{H} = \frac{n\mu_0 I\mathfrak{A}}{2\pi r^3}\,\frac{\Delta t}{t_0}. \tag{4}$$

Wir setzen diese Größe in (3) ein und erhalten für die induzierte Spannung

$$U_{\rm ind} = -\frac{n_{\rm I} n \mu_0 I \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}_{\rm I}}{2\pi r^3 t_0} = -\frac{n_{\rm I} n \mu_0 I A A_{\rm I}}{2\pi r^3 t_0}. \tag{5}$$

Sie ist, wie das Vorzeichen zeigt, im mathematisch negativen Drehsinn orientiert. In den Windungen der Induktionsspule wird dadurch ein Strom der Stärke

$$I_{\rm ind} = -\frac{n_{\rm I} n \mu_0 I A A_{\rm I}}{2\pi R r^3 t_0} \tag{6}$$

hervorgerufen. Er fließt im Uhrzeigersinn und erzeugt dabei das Magnetfeld

$$\mathfrak{H}_{\text{ind}} = \frac{-n_{\text{I}}^2 n \mu_0 I A \mathfrak{A}_{\text{I}}}{2\pi R r^3 t_0 l}, \qquad H_{\text{ind}} = \frac{n_{\text{I}} I_{\text{ind}}}{l}. \tag{7}$$

Es ist dem verursachenden Magnetfeld (4) entgegengerichtet (vgl. Bild 1.16). Desgleichen ist das magnetische Moment des induzierten Feldes gegen das induzierende Moment orientiert Mit den gegebenen Zahlenwerten folgt für den induzierten Strom

$$I_{\text{ind}} = -\frac{1200 \cdot 15000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-4}}{2\pi \cdot 1{,}0 \cdot 1 \cdot 10}\,\text{A} = -0{,}216\,\mu\text{A},$$

für das induzierte Magnetfeld

$$H_{\text{ind}} = -1200 \cdot 2{,}16 \cdot 10^{-6}\,\text{Am}^{-1} = -2{,}59 \cdot 10^{-3}\,\text{Am}^{-1}.$$

Die Minuszeichen in den numerischen Ergebnissen bringen zum Ausdruck, daß die induzierten Effekte der induzierenden Ursache entgegenwirken.

1.4.2. Relaxationszeit

An der Oberfläche von Gummi wird die Raumladungsdichte $\varrho = 10^{-12}$ As m^{-3} erzeugt. Untersuchen Sie die Abnahme der Ladung an der Oberfläche mit der Zeit t. Welcher Wert ist nach einer Stunde zu erwarten? Bestimmen Sie die Relaxationszeit des Materials. Für die Leitfähigkeit des Gummis ist der Wert $\gamma = 10^{-14}\,\Omega^{-1}\,\text{m}^{-1}$, für die Dielektrizitätszahl $\varepsilon_{\text{r}} = 2{,}5$ einzusetzen.

Lösung

Wir benutzen die MAXWELLschen Gleichungen (1.4./1) und (1.4./3), in denen wir $\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}$, $\mathfrak{J} = \gamma\mathfrak{E}$ einsetzen:

$$\text{rot}\,\mathfrak{H} = \varepsilon\dot{\mathfrak{E}} + \gamma\mathfrak{E} \quad (1), \qquad \text{div}\,\varepsilon\mathfrak{E} = \varrho. \tag{2}$$

Auf (1) wenden wir die Operation div an. Damit folgt

$$\text{div}\,\varepsilon\dot{\mathfrak{E}} + \text{div}\,\gamma\mathfrak{E} = 0. \tag{3}$$

In Verbindung mit (2) ergibt sich daraus die Differentialgleichung der Ladungsdichte

$$\varepsilon\dot{\varrho} + \gamma\varrho = 0. \tag{4}$$

Sie hat die Lösung

$$\varrho = \varrho_0\,\text{e}^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}t}. \tag{5}$$

Der Ausdruck

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\gamma}$$

hat die Maßeinheit s. Er wird als Relaxationszeit des Materials definiert. Im Verlauf dieser Zeit sinkt die Ladung auf 1/e ihres Anfangswertes.

Für Gummi erhält man als Relaxationszeit

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\gamma} = \frac{2{,}5 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}{10^{-14}}\,\mathrm{s} = 2{,}2 \cdot 10^{3}\,\mathrm{s} = 37\,\mathrm{min}.$$

Nach einer Stunde ist daher die Raumladungsdichte auf

$$\varrho\,(1\,\mathrm{h}) = 10^{-12} \exp\left(-\frac{3{,}6 \cdot 10^{3}}{2{,}2 \cdot 10^{3}}\right) \mathrm{As\,m^{-3}} = 1{,}9 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{C\,m^{-3}},$$

d. h. auf 19% des Anfangswertes abgesunken.

1.4.3. Oberflächenstromdichte — Unstetigkeit der magnetischen Feldstärke bei Wechselströmen in idealen Leitern

Ein kreiszylindrischer idealer Leiter mit dem Radius $R = 5$ mm wird von Wechselstrom der effektiven Stromstärke $I_{\mathrm{eff}} = 2$ A durchflossen. Die Zahl der Perioden beträgt $50\,\mathrm{s}^{-1}$. Untersuchen Sie das Verhalten der magnetischen Feldstärke an der Trennfläche zwischen beiden Medien. Wie groß ist die Oberflächenstromdichte?

Lösung

Infolge des Skineffektes (vgl. 5.3.1.) konzentriert sich bei einem von Wechselstrom durchflossenen idealen Leiter der gesamte Strom auf der Oberfläche. Im Innern des idealen Leiters ist daher die Stromdichte gleich Null, auf der Oberfläche dagegen unendlich groß. Es gilt somit

$$\mathfrak{H} = 0 \qquad \text{für} \qquad r < R. \tag{1}$$

Im Außenraum an der Grenze zum Leiter, d. h. für $r = R$, besteht nach dem AMPÈREschen Verkettungsgesetz (1.1./25) die Beziehung

$$\oint \mathfrak{H} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{s} = I \qquad \text{bzw.} \qquad \mathfrak{H}_{\varphi} = \frac{I}{2\pi R}. \tag{2}$$

Die Tangentialkomponente des magnetischen Feldes verhält sich also im Gegensatz zu (1.4./12) unstetig. Wir leiten dieses Verhalten aus der MAXWELLschen Gleichung (1.4./3a)

$$\iint_{\Delta A} (\mathfrak{J} + \dot{\mathfrak{D}})\,\mathrm{d}\mathfrak{A} = \oint_{C} \mathfrak{H} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{s} \tag{3}$$

ab. Dazu betrachten wir im Grenzgebiet zwischen beiden Medien ein Rechteck $\Delta s\,\Delta h$ gemäß Bild 1.14. Bei unendlicher Stromdichte $\mathfrak{J}$ bleibt das Flächenintegral auch für $\Delta h \to 0$ endlich. Infolgedessen verhalten sich die Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärke unstetig.
Da sich der Strom auf die Oberfläche konzentriert, ist es zweckmäßig, anstelle der Stromdichte (Maßeinheit $\mathrm{A\,m^{-2}}$) eine neue Größe, die Oberflächenstromdichte $\mathfrak{K}$, zu definieren. Sie hat die Einheit $\mathrm{A\,m^{-1}}$. Unter Verwendung dieser Größe erhält man auf der linken Seite (3)

$$\lim_{\Delta A \to 0}{}' \iint_{\Delta A} (\mathfrak{J} + \dot{\mathfrak{D}}) \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} = \mathfrak{K} \cdot (\Delta\mathfrak{s} \times \mathfrak{n}). \tag{4}$$

Die rechte Seite (3) wird gemäß (1.4./11) bzw. (1.4./12) behandelt. Hieraus folgt (vgl. 1.3./43)

$$\mathfrak{K} \cdot (\Delta \mathfrak{s} \times \mathfrak{n}) = (\mathfrak{H}_{\mathrm{I}} - \mathfrak{H}_{\mathrm{II}}) \cdot \Delta \mathfrak{s} \qquad \text{bzw.} \qquad (\mathfrak{n} \times \mathfrak{K}) \cdot \Delta \mathfrak{s} = (\mathfrak{H}_{\mathrm{I}} - \mathfrak{H}_{\mathrm{II}}) \cdot \Delta \mathfrak{s}\,. \tag{5}$$

Die Tangentialkomponente des magnetischen Feldes $\mathfrak{H}$ verhält sich an der Übergangsstelle zu einem idealleitenden, von Wechselstrom durchflossenen Medium unstetig. Nur wenn der Tangentenvektor $\Delta\mathfrak{s}$ die Richtung des Oberflächenstromes $\mathfrak{K}$ besitzt, ergibt sich aus (5)

$$(\mathfrak{H}_{\mathrm{I}} - \mathfrak{H}_{\mathrm{II}}) \cdot \Delta \mathfrak{s}_{\mathfrak{K}} = 0\,. \tag{6}$$

Im idealen Leiter gilt $\mathfrak{H}_{\mathrm{II}} = 0$. Das Magnetfeld $\mathfrak{H}_{\mathrm{I}}$ ist daher an der Oberfläche normal zum Oberflächenstrom $\mathfrak{K}$ gerichtet.
Im vorliegenden Fall beträgt die effektive Oberflächenstromdichte

$$|\mathfrak{K}_{\mathrm{eff}}| = \frac{I}{2\pi R} = \frac{2}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-3}}\ \mathrm{Am^{-1}} = 63{,}7\ \mathrm{Am^{-1}}.$$

Der Momentanwert der Oberflächenstromdichte ist durch

$$K_{\mathrm{eff}} = \sqrt{2}\,\frac{I}{2\pi R}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = 90{,}0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}100\pi t}\ \mathrm{Am^{-1}}$$

gegeben. Das magnetische Feld $\mathfrak{H}$ hat für $r = R$ nur eine Komponente $\mathfrak{H}_\varphi$. Sie ist gleich dem Betrag der Oberflächenstromdichte $|\mathfrak{K}|$.

1.4.4. Wärmeverluste und Poyntingscher Vektor

Ein zylindrischer Kupferdraht ($\gamma_{\mathrm{Cu}} = 5{,}9 \cdot 10^7\,\Omega^{-1}\,\mathrm{m}^{-1}$) mit dem Radius $R = 5$ mm wird von Gleichstrom der Stärke $I = 15$ A durchflossen. Berechnen Sie die Wärmeleistung, bezogen auf die Länge $l = 1$ m, und untersuchen Sie die Strahlung.

Lösung

Die Stromdichte beträgt

$$|\mathfrak{J}| = \frac{I}{\pi R^2}. \tag{1}$$

Für die elektrische Feldstärke folgt

$$|\mathfrak{E}| = \frac{|\mathfrak{J}|}{\gamma} = \frac{I}{\pi R^2 \gamma}. \tag{2}$$

Sie hat die Richtung des elektrischen Stromes, die als z-Achse gewählt wird.
Das magnetische Feld hat nur eine Komponente in Richtung der polaren Koordinate φ. Ihre Größe beträgt an der Peripherie ($r = R$)

$$\mathfrak{H}_\varphi = \frac{I}{2\pi R}. \tag{3}$$

Die Wärmeleistung wird nach (1) und (2) gleich

$$\dot{W}_{\mathrm{w}} = \iiint \mathfrak{J} \cdot \mathfrak{E} \, \mathrm{d}V = \frac{I^2}{\pi^2 R^4} R^2 \pi l = \frac{I^2 l}{\pi R^2}. \tag{4}$$

Als POYNTINGschen Vektor erhält man (vgl. 1.2./7)

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{E} \times \mathfrak{H} = \mathfrak{E}_z \mathfrak{e}_z \times \mathfrak{H}_\varphi \mathfrak{e}_\varphi = -\mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_\varphi \mathfrak{e}_r, \tag{5}$$

d. h., dieser hat nur eine in Richtung $-\mathfrak{e}_r$ weisende Komponente. Es gilt also

$$\mathfrak{S}_r = -\frac{I^2}{2\pi^2 \gamma R^3}. \tag{6}$$

Hieraus ergibt sich durch Integration über die Mantelfläche

$$\iint_A \mathfrak{S} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} = -\frac{I^2}{2\pi^2 \gamma R^3} 2\pi R l = -\frac{I^2 l}{\pi \gamma R^2}. \tag{7}$$

Wegen $\dot{\mathfrak{D}} = 0$, $\dot{\mathfrak{B}} = 0$ sind die elektrische und die magnetische Energie konstant. Auf Grund des POYNTINGschen Satzes (1.4./20) kann daher die in Form von Wärme dem elektromagnetischen Feld entzogene Energie nur durch eine einlaufende Strahlung kompensiert werden. Diese Energiestrahlung erfolgt gemäß (6) **radial** in den zylinderförmigen Kupferstab hinein.

Der **metallische Leiter** ist hiernach lediglich in bezug auf den elektrischen **Strom** als Leiter anzusehen. Für die **Energie** ist der Kupferstab dagegen ein nichtleitendes Medium. Diese wird über das den Zylinder umgebende Vakuum in Form von Strahlung zugeführt. Das Vakuum stellt bezüglich der Energie einen Leiter, bezüglich des elektrischen Stromes dagegen einen Nichtleiter dar. Für die Wärmeleistung folgt aus (4) für $l = 1$ m

$$\dot{W}_{\mathrm{w}} = \frac{15^2}{\pi \cdot 5{,}9 \cdot 10^7 \cdot 5^2 \cdot 10^{-6}} \mathrm{W} = 49 \mathrm{\,mW} = 1{,}2 \cdot 10^{-5} \mathrm{\,kcal\,s^{-1}}.$$

1.4.5. Energie, Ladungsdichte und Druck im elektrischen Feld

Ein Plattenkondensator mit der Plattenfläche $A = 400\ \mathrm{cm}^2$ und dem Plattenabstand $l = 2$ mm stehe unter der Spannung $U = 220$ V. Berechnen Sie die gespeicherte elektrische Energie. Wie groß ist die Kraft, mit der sich die beiden Platten anziehen? Welcher Druck wirkt im homogenen elektrischen Feld des Plattenkondensators? Wie groß ist die Ladung? ($\varepsilon = \varepsilon_0$.)

Lösung

Nach (1.4./21) und (1.4./22) ist die Energie des elektrischen Feldes im Volumen $V = A \cdot l$ zwischen den beiden Platten durch

$$W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2} \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D} V = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathfrak{E}^2 A l \tag{1}$$

gegeben. Verschiebt man eine der Platten gegen die elektrischen Kräfte um die Strecke dl (vgl. Bild 1.17), so vergrößert sich damit die gespeicherte Energie um

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{e}} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathfrak{E}^2 \mathfrak{A} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{l} = -\mathfrak{F} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{l}. \tag{2}$$

Für die Kraft, mit der sich die beiden entgegengesetzt geladenen Platten anziehen, erhält man daraus

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathfrak{E}^2 \mathfrak{A}. \tag{3}$$

Sie ist vom Plattenabstand unabhängig.

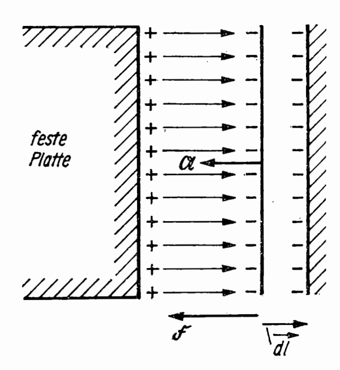


Bild 1.17. Die Anziehungskraft zwischen zwei entgegengesetzt geladenen Platten

Der Druck p gibt das Verhältnis der senkrecht auf die Fläche wirkenden Kraft zur Flächengröße an. Aus (3) folgt

$$\boxed{p = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathfrak{E}^2}. \tag{4}$$

Die elektrische Feldstärke im homogenen Feld des Plattenkondensators ist gleich

$$|\mathfrak{E}| = \frac{U}{l} = \frac{220}{2 \cdot 10^{-2}} \text{ Vm}^{-1} = 11000 \text{ Vm}^{-1}.$$

Als Energie ergibt sich damit aus (1)

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot (1{,}1 \cdot 10^4)^2 \cdot 400 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ J} = 4{,}28 \cdot 10^{-8} \text{ J},$$

also nur ein sehr kleiner Wert. Die Anziehungskraft wird nach (3)

$$F = \frac{1}{2} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot (1{,}1 \cdot 10^4)^2 \cdot 400 \cdot 10^{-4} \text{ N} = 2{,}14 \cdot 10^{-5} \text{ N}.$$

Für den Druck erhält man aus (4)

$$p = 1{,}07 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}^{-2} = 1{,}07 \cdot 10^{-5} \text{ mbar}.$$

Die Ladungsdichte wird gleich

$$\sigma = \varepsilon \mathfrak{E}_\text{I} \cdot \mathfrak{n} = \varepsilon\, |\mathfrak{E}_\text{I}| = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 1{,}1 \cdot 10^4 \text{ As m}^{-2} = 9{,}73 \cdot 10^{-8} \text{ C m}^{-2}.$$

Eine Platte trägt also die Ladung $3{,}89 \cdot 10^{-9}$ As.

1.4.6. Feldenergie eines permanenten Magneten

Ein permanenter Ringmagnet aus Gußstahl habe den mittleren Durchmesser $2R = 30$ cm (s. Bild 1.18). Die Breite des Luftspaltes betrage $b = 1$ cm, die Schnittfläche $A = 25\ \text{cm}^2$. Berechnen Sie die magnetische Energie und den Druck infolge der magnetischen Kräfte. Die Sätti-

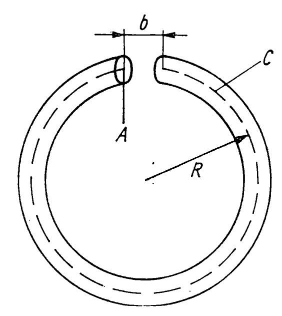


Bild 1.18. Ringmagnet mit Luftspalt

gungsfeldstärke betrage $B = 1{,}25\ \text{Vs}\ \text{m}^{-2}$. Beweisen Sie, daß die magnetische Energie des Luftspaltes mit der Energie des Ringmagneten übereinstimmt. Wie groß ist die magnetische Feldstärke im Luftspalt und im Innern des Magneten?

Lösung

Die magnetische Energie im Luftspalt ist (vgl. 1.4./21)

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\,\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{B} V = \frac{\mathfrak{B}^2 A b}{2\mu_0}. \tag{1}$$

Für den Druck erhält man analog der Gleichung (1.4.5./4) für das elektrische Feld

$$p = \frac{1}{2}\,\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{B}^2}{2\mu_0}. \tag{2}$$

Zur Rückführung der magnetischen Energie des Luftspaltes auf die Feldgrößen im Innern des Magneten gehen wir von der magnetischen Spannung aus. Umfährt man einmal die gestrichelte Kurve C im Bild 1.18, so ergibt sich wegen des Fehlens elektrischer Ströme aus der MAXWELLschen Gleichung (1.4./1a) für die magnetische Umlaufspannung

$$\oint_C \mathfrak{H} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{r} = 0. \tag{3}$$

Wir setzen im Ringmagneten eine homogene Magnetisierung voraus. Das Feld im Innern des Magneten bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}_{\mathrm{i}}$, das im Luftspalt mit $\mathfrak{H}_{\mathrm{a}}$. Damit folgt aus (3)

$$(2\pi R - b)\,\mathfrak{H}_{\mathrm{i}} + b\mathfrak{H}_{\mathrm{a}} = 0. \tag{4}$$

Ist die Feldstärke im Außenraum bekannt, so erhält man aus (2) für die Feldstärke im Magneten

$$\mathfrak{H}_{\mathrm{i}} = -\frac{b}{2\pi R - b}\,\mathfrak{H}_{\mathrm{a}}. \tag{5}$$

Mit dem Aufbau des im Umlaufsinn gerichteten Feldes im Luftspalt bildet sich also im Magneten ein dem Umlaufsinn entgegengerichtetes Feld aus.
Aus der MAXWELLschen Gleichung (1.4./4) ergibt sich

$$\mathfrak{B}_i = \mathfrak{B}_a = \mathfrak{B}\,. \tag{6}$$

Die magnetische Energie des Luftspaltes wird daher gleich

$$W_m = \frac{\mathfrak{H}_a \cdot \mathfrak{B}}{2} Ab - \frac{\mathfrak{H}_i \cdot \mathfrak{B}}{2} (2\pi R - b)\, A\,. \tag{7}$$

Sie stimmt bis auf das Vorzeichen mit der magnetischen Energie des Ringmagneten überein. Dieses Ergebnis ist eine Folge der verschwindenden Umlaufspannung nach (3).
Zahlen eingesetzt, folgt aus (1)

$$W_m = \frac{1{,}25^2 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}\ \mathrm{J} = 15{,}5\ \mathrm{J}\,,$$

aus (2)

$$p = \frac{1{,}25^2}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}\ \mathrm{N\,m^{-2}} = 6{,}22 \cdot 10^5\ \mathrm{N\,m^{-2}} = 6{,}34\ \mathrm{at}.$$

Magnetische Feldenergie und Druck liegen also um Größenordnungen über den entsprechenden Werten des elektrischen Feldes.
Im Luftspalt ist die Feldstärke

$$H_a = \frac{1{,}25}{4\pi \cdot 10^{-7}}\ \mathrm{A\,m^{-1}} = 9{,}95 \cdot 10^5\ \mathrm{A\,m^{-1}}\,,$$

im Innenraum

$$H_i = -\frac{10^{-2} \cdot 9{,}95 \cdot 10^5}{30\pi \cdot 10^{-2} - 10^{-2}}\ \mathrm{A\,m^{-1}} = -1{,}07 \cdot 10^4\ \mathrm{A\,m^{-1}}.$$



Aufgaben

A 1.4.1. Ein gerader Magnet mit dem magnetischen Moment $m_m = 10^{-4}$ V m s wird einer Spule aus 1000 Windungen mit dem kreisförmigen Querschnitt $A = 2$ cm² auf 50 cm genähert. Der ohmsche Widerstand beträgt 0,2 Ω; der induktive Widerstand ist dagegen zu vernachlässigen. Berechnen Sie den induzierten Stromstoß $\int I\,\mathrm{d}t$.

A 1.4.2. Berechnen Sie zur vorhergehenden Aufgabe das induzierte magnetische Moment im Verhältnis zum induzierenden Moment, wenn das induzierende Feld gleichmäßig in der Zeit $t_s = 0{,}1$ s aufgebaut wird.

A 1.4.3. Berechnen Sie die Relaxationszeit von Polystyrol ($\gamma = 10^{-16}\,\Omega^{-1}\,\mathrm{m}^{-1}$, $\varepsilon_r = 2{,}6$).

A 1.4.4. Für Kupfer wird, wie allgemein für Metalle, mit einer Dielektrizitätszahl $\varepsilon_r > 1000$ gerechnet. Die Leitfähigkeit des Kupfers beträgt $\gamma = 5{,}9 \cdot 10^7\,\Omega^{-1}\,\mathrm{m}^{-1}$. Welche Größenordnung ergibt sich daraus für die Relaxationszeit?

A 1.4.5. Beweisen Sie aus den MAXWELLschen Gleichungen, daß im Nichtleiter die Ladungsdichte konstant ist.

A 1.4.6.* Leiten Sie aus den Übergangsbedingungen das Brechungsgesetz der elektrischen Feldlinien in Isolatoren ($\gamma = 0$) ab.

A 1.4.7.* Wie lautet das Brechungsgesetz der magnetischen Feldlinien?

A 1.4.8. Wie groß ist stündlich die Wärmeentwicklung eines Aluminiumdrahtes der Länge $l = 100$ km, des Querschnittes $A = 2\,\text{mm}^2$ und der Leitfähigkeit $\gamma = 4{,}2 \cdot 10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$, wenn an diesem eine Spannung von 10000 V anliegt?

A 1.4.9. Für eine elektromagnetische Welle werden in Luft die elektrische Feldstärke $10^{-3}\,\text{V}\,\text{m}^{-1}$ und orthogonal dazu gerichtet die magnetische Feldstärke $2{,}65 \cdot 10^{-6}\,\text{A}\,\text{m}^{-1}$ gemessen. Berechnen Sie die elektrische und die magnetische Energiedichte sowie den POYNTINGschen Vektor.

A 1.4.10. In ein elektrisches Feld wird eine Platte von 50 cm² Fläche gebracht und ihre Oberflächenladung gemessen. Variiert man die Stellung der Platte im Raum, so wird als Maximum eine Ladung von $5{,}53 \cdot 10^{-10}$ As (auf einer Seite) gemessen. Berechnen Sie daraus die elektrische Feldstärke.

A 1.4.11. Eine Kugel vom Durchmesser $2R = 10$ cm trage die elektrische Ladung $Q = 10^{-4}$ As. Welcher Druck muß auf die Oberfläche der Kugel wirken, um ihre Expansion zu verhindern?

A 1.4.12. Berechnen Sie die magnetische Energie einer Feldspule der Länge $l = 40$ cm mit dem Querschnitt $A = 2\,\text{cm}^2$, deren $n = 15000$ Windungen vom Strom $I = 3$ A durchflossen werden. Wie groß ist der Druck?

A 1.4.13. Die größten in Eisenkernen erzielbaren magnetischen Flußdichten liegen bei $2{,}2\,\text{V}\,\text{s}\,\text{m}^{-2}$. Wie groß ist die hierdurch gespeicherte magnetische Energie, bezogen auf das Volumen $V = 1\,\text{m}^3$?

A 1.4.14.* Eine Kugel vom Radius $R = 10$ cm trägt die Ladung $Q = 10^{-4}$ As. Wie groß ist die potentielle Energie W_{pot}, d. h., welche Energie ist aufzuwenden, um die Kugel aufzuladen?

2. Statische elektrische und magnetische Felder

2.1. Elektrostatik

E Einführung

Bei statischen Feldern erfolgen keine zeitlichen Feld- und Dichteänderungen. Auch Strömungen von elektrischer Ladung oder Energie finden nicht statt. Es gilt allgemein

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \qquad \text{d. h.} \qquad \dot{\mathfrak{B}} = 0, \quad \dot{\mathfrak{D}} = 0, \quad \dot{\varrho} = 0, \quad \mathfrak{J} = 0, \quad \mathfrak{D} = 0.$$

Ferner muß in **Leitern**

$$\mathfrak{E} = 0$$

erfüllt sein.
Für **Nichtleiter** erhält man aus den MAXWELLschen Gleichungen (1.4./1) bis (1.4./4)

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{H} &= 0, \qquad & \operatorname{rot} \mathfrak{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathfrak{B} &= 0; \qquad & \operatorname{div} \mathfrak{D} &= \varrho. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

In diesen Gleichungen können die magnetischen Größen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ unabhängig von den elektrischen Größen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ behandelt werden. Für $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ bestehen somit die beiden **Grundgleichungen des elektrostatischen Feldes**

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0,} \tag{2}$$

$$\boxed{\operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho.} \tag{3}$$

Zwischen ihnen ist die Verknüpfung durch die Dielektrizitätskonstante ε zu berücksichtigen:

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}. \tag{4}$$

Damit erhält man anstelle von (3) bei homogenen Medien

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon}. \tag{3a}$$

Nach (2) kann $\mathfrak{E}$ im elektrostatischen Feld stets als Gradient eines skalaren Potentials

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \Phi \tag{5}$$

dargestellt werden. (5) in (3) bzw. (3a) eingesetzt, ergibt die **Poissonsche Gleichung**

$$\boxed{\triangle \Phi = -\frac{\varrho}{\varepsilon}}. \tag{6}$$

Die Bedeutung des LAPLACE-Operators $\triangle$ in verschiedenen Koordinatensystemen wurde in 1.3. angegeben.
Kennt man die Verteilung der Ladungen im Raum, so kann entsprechend (1.1./8) und (1.1./9) das Feld aus diesen berechnet werden:

$$\boxed{\Phi(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint \frac{\varrho(Q)}{r_{PQ}} \, \mathrm{d}V.} \tag{7}$$

Darin ist P der Punkt, in dem das Feld bestimmt wird, Q ein Punkt des Integrationsbereiches mit der Ladungsdichte ϱ.
Ist die Ladung über eine Oberfläche verteilt und bezeichnet σ die Flächenladungsdichte, so erhält man anstelle von (7) das Potential aus

$$\Phi(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iint \frac{\sigma(Q)}{r_{PQ}} \, \mathrm{d}A. \tag{8}$$

Im ladungsfreien Raum genügt Φ der LAPLACEschen bzw. Potentialgleichung

$$\boxed{\triangle \Phi = 0}. \tag{9}$$

Bei der Berechnung spezieller Felder hat man die **Randbedingungen** zu berücksichtigen, die aus den Übergangsbedingungen (1.4./11) und (1.4./12) sowie (1.4./15) und (1.4./16) hervorgehen. Im folgenden werden die aneinandergrenzenden Medien durch die Indizes I und II gekennzeichnet.
Für elektrostatische Felder müssen nach (1.4./11) die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ und bei nichtleitenden ladungsfreien Medien nach (1.4./15) die Normalkomponenten der Verschiebungsdichte $\mathfrak{D}$ übereinstimmen. Diese beiden

Forderungen werden erfüllt, wenn in jedem Punkt der Grenzfläche die Bedingungsgleichungen

$$\boxed{\begin{aligned}(\Phi_{\mathrm{I}})_{\mathrm{Rand}} &= (\Phi_{\mathrm{II}})_{\mathrm{Rand}}, \qquad (10)\\ \varepsilon_{\mathrm{I}}\left(\frac{\partial \Phi_{\mathrm{I}}}{\partial n}\right)_{\mathrm{Rand}} &= \varepsilon_{\mathrm{II}}\left(\frac{\partial \Phi_{\mathrm{II}}}{\partial n}\right)_{\mathrm{Rand}} \qquad (11)\end{aligned}}$$

befriedigt werden. n bezeichnet dabei die Variable in Richtung der Flächennormalen. Es müssen also sowohl die Potentiale selbst als auch ihre Ableitungen in Richtung der Flächennormalen übereinstimmen. Die Gleichung (10) gewährleistet die Übereinstimmung der Ableitungen in Richtung einer beliebigen Flächentangente und damit die Gleichheit der **Tangentialkomponenten** des elektrischen Feldes. Aus (11) folgt die Gleichheit der Normalkomponenten von $\mathfrak{D}$.
Eine anschauliche Methode zur Lösung der Potentialgleichung (9) mit den vorgegebenen Randbedingungen ist das **Spiegelungsverfahren.** Man führt dabei virtuelle Ladungen derart ein, daß diese zusammen mit den realen Ladungen ein Feld aufbauen, das die vorgegebenen Randbedingungen befriedigt.

Beispiel 2

Eine Punktladung der Stärke $Q = 10^{-12}$ As befindet sich in 2 m Höhe über einer idealleitenden Ebene. Welches elektrische Feld wird dadurch aufgebaut?
Zur Lösung geht man von der LAPLACEschen Gleichung (9) aus, die für den gesamten ladungsfreien Raum gilt. Der Raum oberhalb der Metallebene wird durch $z > 0$ gekennzeichnet (vgl. Bild 2.1). Auf der Ebene $z = 0$ und im Raum $z < 0$ des metallischen Körpers muß das Potential

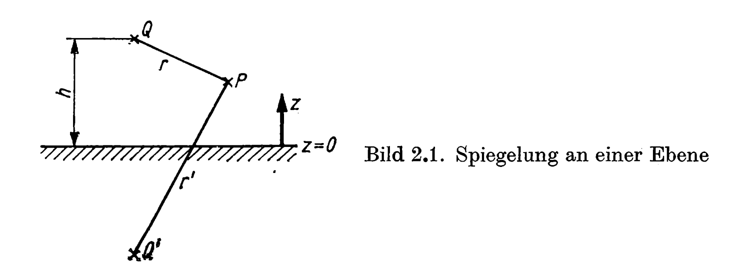


Bild 2.1. Spiegelung an einer Ebene

$\Phi = \Phi(x, y, z)$ konstant sein. Man kann daher als Randbedingung $\Phi(x, y, 0) = 0$ ansetzen. Ebenso gilt $\Phi = 0$ für $z < 0$. Nun soll die Lösung für den Raum $z > 0$ ermittelt werden.
Die Potentialgleichung (9) lautet nach (1.3./40) in Kugelkoordinaten, wenn man eine Abhängigkeit nur von der radialen Koordinate r voraussetzt,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0. \qquad (12)$$

Diese Gleichung hat als Lösung das Potential der Punktladung

$$\Phi = \Phi_a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}, \tag{13}$$

wie man sich durch Einsetzen überzeugt. Die Lösung (13) befriedigt jedoch nicht die Randbedingungen an der Grenzfläche $x = 0$. Um auch die Randbedingungen zu erfüllen, nimmt man im Medium $x < 0$ eine Ladung $Q' = -Q$ spiegelbildlich zur Ladung Q an. Die von ihr im Raum $x > 0$ ausgeübte Feldwirkung wird ebenfalls durch ein Potential der Form (13) dargestellt:

$$\Phi_{Q'} = \frac{Q'}{4\pi\varepsilon r'}. \tag{14}$$

r' gibt die Entfernung des Aufpunktes P vom Ort der virtuellen Ladung Q' an. Bedeutet h die Höhe der Ladung Q über der Ebene, so folgt damit aus (13) und (14) für das Potential der Punktladung über der leitenden Ebene

$$\Phi = \Phi_Q + \Phi_{Q'} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+h)^2}}\right). \tag{15}$$

Daraus lassen sich mittels (5), (4) und (3a) sämtliche Größen des Feldes sowie sämtliche Ladungsverteilungen berechnen.

In gleicher Weise wie bei der Punktladung kann man nach dem Spiegelungsverfahren in geeigneten Spezialfällen oder durch zweckentsprechende Vernachlässigungen und Idealisierungen die Potentiale für lineare, flächenhafte oder räumliche Ladungsverteilungen gegenüber Ebenen, Kanten und Ecken, Kugel- und Zylinderflächen bestimmen.

Zur **Definition der Kapazität** betrachtet man zwei Leiter L_+ und L_-, auf denen sich die Ladungen $+Q$ und $-Q$ befinden. Infolge der unterschiedlichen Ladungen besteht zwischen den Leitern einer Potentialdifferenz $U = \Phi_+ - \Phi_-$. Als Kapazität des aus den beiden Leitern L_+ und L_- bestehenden Kondensators definiert man den Ausdruck

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\int\limits_{L_+}^{L_-} \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{r}}. \tag{16}$$

C wird in Farad (F) gemessen:

$$1\ \text{F} = \frac{1\ \text{C}}{1\ \text{V}} = 1\ \text{A s V}^{-1}.$$

Die von einem Kondensator gespeicherte **elektrische Energie** kann man allgemein durch Anwendung des GREENschen Satzes der Potentialtheorie berechnen.

Der GREENsche Satz folgt aus dem GAUSSschen Satz (1.3./17), wenn man in diesem

$$\mathfrak{J} = \Psi \operatorname{grad} \Phi \tag{17}$$

setzt. Es ergibt sich zunächst

$$\iiint \operatorname{div}(\Psi \operatorname{grad} \Phi)\,\mathrm{d}V = \oiint \Psi \operatorname{grad} \Phi \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A}. \tag{18}$$

Wird

$$\operatorname{div}(\Psi \operatorname{grad} \Phi) = \Psi \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{grad} \Phi \cdot \operatorname{grad} \Psi \tag{19}$$

berücksichtigt, so folgt damit der **Greensche Satz** in der Form

$$\iiint (\Psi \triangle \Phi + \operatorname{grad} \Phi \cdot \operatorname{grad} \Psi)\,\mathrm{d}V = \oiint \Psi \operatorname{grad} \Phi \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A}. \tag{20}$$

Hier kann man $\Psi = \Phi$ setzen. Wird die Betrachtung auf Potentialfunktionen beschränkt, für die $\triangle \Phi = 0$ gilt, so ergibt sich

$$\iiint \operatorname{grad}^2 \Phi\,\mathrm{d}V = \oiint \Phi \operatorname{grad} \Phi \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A}. \tag{21}$$

Die Integration links erfolgt über den gesamten Raum mit Ausnahme der beiden Leiter. Das Oberflächenintegral rechts ist über die unendlich ferne Kugel und über die Leiterflächen zu erstrecken.
Bei der Integration über die unendlich ferne Oberfläche einer Kugel ergibt sich der Wert Null. Somit verbleibt rechts allein das Integral über die Leiterflächen. Im linken Integral kann $\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \Phi$ gesetzt werden. Ferner können beide Seiten der Gleichung mit ε multipliziert werden. Das liefert als elektrische Energie W_e des über den gesamten Raum erstreckten Feldes

$$2W_e = \iiint \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D}\,\mathrm{d}V = -\oiint \varepsilon \Phi \mathfrak{E} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A}. \tag{22}$$

Längs der Leiterfläche ist Φ entweder gleich Φ_+ oder gleich Φ_-. Ferner gilt für die in den Leiter hineinweisenden Flächenelemente (vgl. Bild 1.15 sowie 1.3.)

$$\mathrm{d}\mathfrak{A} = -\mathfrak{n}\,\mathrm{d}A. \tag{23}$$

Man erhält daher

$$2W_e = \Phi_+ \oiint_{L_+} \varepsilon \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{n}\,\mathrm{d}A + \Phi_- \oiint_{L_-} \varepsilon \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{n}\,\mathrm{d}A. \tag{24}$$

Die Integrale über die Leiteroberflächen geben die Ladungen auf diesen an. Daher folgt allgemein für jeden beliebigen Kondensator

$$2W_e = (\Phi_+ - \Phi_-)\,Q \tag{25}$$

bzw. wegen (16)

$$\boxed{W_e = \frac{UQ}{2} = \frac{1}{2} C U^2}. \tag{26}$$



Probleme

2.1.1. Plattenkondensator

Ein Plattenkondensator hat die Plattenfläche $A = 400\ \mathrm{cm}^2$. Der Abstand beider Platten beträgt $d = 1$ mm. Das Zwischenmedium ist Luft, die unter dem Druck 0,5 Torr steht. Unter diesen Verhältnissen beträgt die Durchbruchspannung 35 V (vgl. Tabelle 2).
Berechnen Sie, wie groß die Ladung ist, bei der die Entladung durch Funkenüberschlag erfolgt. Wie groß ist die Energie dieser Entladung?

Tabelle 2. Durchbruchspannung in Luft, bezogen auf 1 mm

p in Torr	U in Volt	p in Torr	U in Volt
0,1	180	20	200
0,2	60	50	400
0,5	35	100	600
1,0	40	300	2000
2,0	50	760	3000
10	130		

Lösung

Die Potentialgleichung lautet in Cartesischen Koordinaten

$$\triangle\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0. \tag{1}$$

Wir betrachten das Innere des Kondensators und sehen von Randstörungen ab. Das ist nur gestattet, wenn die Abmessungen der Platten groß sind gegen den Plattenabstand d.
Eine Abhängigkeit des Potentials kann nur in Richtung z des Plattenabstandes bestehen. In den parallel zur Plattenfläche weisenden Richtungen x und y ist jeder Punkt gleichberechtigt, da Randstörungen vernachlässigt werden können. (1) vereinfacht sich daher zu

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}z^2} = 0 \tag{2}$$

mit der Lösung

$$\Phi = -az + b. \tag{3}$$

Für das elektrische Feld erhält man daraus gemäß $\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\Phi$

$$\mathfrak{E}_x = 0, \qquad \mathfrak{E}_y = 0, \qquad \mathfrak{E}_z = a. \tag{4}$$

Es hat im Kondensator überall die gleiche Stärke und die gleiche Richtung. (Wäre in (3) das positive Vorzeichen gewählt worden, so stände in (4) $-a$ statt a.)
Im Innern der Metallplatten, die als ideale Leiter vorausgesetzt werden, kann ein elektrisches Feld nicht existieren. Aus der konstanten elektrischen Erregung $\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}$ folgt daher nach (1.4./15)

für die Oberflächenladungsdichte

$$\sigma = \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{n}. \tag{5}$$

Die entgegengesetzten Ladungen an der oberen und an der unteren Platte ergeben sich, wenn man berücksichtigt, daß die Flächennormalen $\mathfrak{n}$ in den Kondensatorraum hinein weisen, also

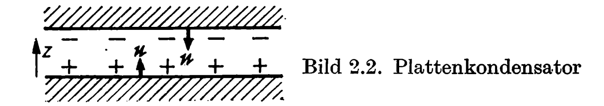


Bild 2.2. Plattenkondensator

oben und unten in Bild 2.2 einander entgegengerichtet sind. An der unteren Platte erhält man aus (5) und (4)

$$\mathfrak{D}_z = \varepsilon a = \frac{Q}{A}. \tag{6}$$

Die Ladung auf der unteren Platte ist also gleich

$$Q = \varepsilon a A. \tag{7}$$

Für die Spannung U folgt aus (4)

$$U = \int^d \mathfrak{E}_z = ad. \tag{8}$$

Aus (7) und (8) ergibt sich als Kapazität des Plattenkondensators

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon A}{d}. \tag{9}$$

Die gespeicherte elektrische Energie wird nach (1.4./21), (4), (6) und (9)

$$W_e = \frac{1}{2} \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D} A d = \frac{1}{2} Q^2 \cdot \frac{1}{C} = \frac{1}{2} C U^2. \tag{10}$$

Im vorliegenden Fall beträgt die Kapazität

$$C = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 400 \cdot 10^{-4}}{10^{-3}} \text{ F} = 3{,}54 \cdot 10^{-10} \text{ F} = 354 \text{ pF}.$$

Daraus ergibt sich bei der Spannung $U = 35$ V die Ladung

$$Q = CU = 3{,}54 \cdot 10^{-10} \cdot 35 \text{ As} = 1{,}24 \cdot 10^{-8} \text{ C}.$$

Für die Energie folgt

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot 3{,}54 \cdot 10^{-10} \cdot 35^2 = 2{,}17 \cdot 10^{-7} \text{ J}.$$

2.1.2. Kapazität des Zylinderkondensators

Ein metallischer Kreiszylinder mit dem Grundflächenradius $R_a = 30$ cm enthält in seinem Innern koaxial einen zweiten Zylinder mit dem Radius $R_i = 25$ cm (vgl. Bild 2.3). Die Länge

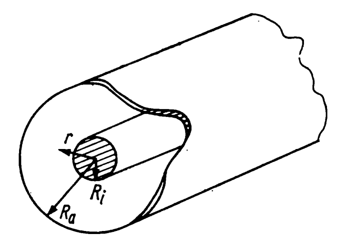


Bild 2.3. Zylinderkondensator (Koaxialleitung)

beider Zylinder ist gleich $l = 2$ m. Der Zwischenraum ist mit Kautschuk $\varepsilon_r = 2{,}5$ gefüllt. Wie groß ist die Kapazität des Kondensators? Randstörungen sind zu vernachlässigen.

Lösung

Wir führen Zylinderkoordinaten ein. Es kann lediglich eine Abhängigkeit von der Variablen r bestehen. Nach (1.3./39) lautet daher die Potentialgleichung im ladungsfreien Raum

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\right) = 0. \tag{1}$$

Daraus folgt

$$r\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} = a, \tag{2}$$

wobei a eine Konstante bezeichnet. Hieraus erhält man weiter

$$\Phi = a \ln r + b. \tag{3}$$

Nach (1.2./9) ergibt sich wegen $\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\Phi$

$$\mathfrak{E}_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{a}{r}. \tag{4}$$

Die Flächenladung beträgt nach (4) auf der Innenseite des Außenzylinders

$$Q = \varepsilon\mathfrak{E}_r \cdot 2\pi R_a \cdot l = 2\pi\varepsilon a l. \tag{5}$$

Der gleiche Wert mit entgegengesetztem Vorzeichen folgt für die Außenseite des Innenzylinders. Die Spannung zwischen Innen- und Außenzylinder ist gleich

$$U = \int\limits_{R_i}^{R_a} \mathfrak{E}_r\,\mathrm{d}r = a\int\limits_{R_i}^{R_a} \frac{\mathrm{d}r}{r} = a \ln\frac{R_a}{R_i}. \tag{6}$$

Hieraus folgt für die Kapazität

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln \frac{R_a}{R_i}}. \tag{7}$$

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt

$$C = \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 2}{\ln \frac{30}{25}} \text{ F} = 1{,}23 \cdot 10^{-9} \text{ F}.$$

2.1.3. Potentialberechnung durch Spiegelung an einer Ebene

Ein durch eine Kugel vom Radius $R = 10$ cm idealisierter Körper befindet sich in der Höhe $h = 2{,}50$ m über der Wasseroberfläche ($\varepsilon_r = 88$). Der Zwischenraum ist Luft. Wie groß ist die Spannung gegen den direkt unter dem Schwerpunkt des Körpers befindlichen Punkt der Wasseroberfläche, wenn sich auf dem Körper die elektrische Ladung $Q = 10^{-8}$ As befindet?

Lösung

Wir bezeichnen das Potential in Luft ($z > 0$) mit Φ_I, das Potential in Wasser ($z < 0$) mit Φ_{II}. Nach (1.4./11) müssen an der Grenzfläche die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes übereinstimmen. Das erfordert für $z = 0$

$$\Phi_I = \Phi_{II}. \tag{1}$$

Bei einem ursprünglich ungeladenen, nichtleitenden Medium müssen außerdem die Normalkomponenten der dielektrischen Verschiebung übereinstimmen. Daraus folgt für $z = 0$

$$\varepsilon_I \frac{\partial \Phi_I}{\partial n} = \varepsilon_{II} \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial n} \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_I \frac{\partial \Phi_I}{\partial z} = \varepsilon_{II} \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial z}. \tag{2}$$

Wir idealisieren den Körper vom Radius R durch seinen Schwerpunkt. In diesem können wir uns die gesamte Ladung Q vereinigt denken (vgl. 1.3.3./4). Als Lösung des zugrunde liegenden Potentialproblems nehmen wir im Medium I eine Potentialfunktion

$$\Phi_I = \frac{1}{4\pi\varepsilon_I} \left(\frac{Q}{r} + \frac{Q'}{r'} \right), \tag{3}$$

im Medium II

$$\Phi_{II} = \frac{Q''}{4\pi\varepsilon_{II} r} \tag{4}$$

an. r bezeichnet die Länge der Strecke $\overline{QP}$, r' die Länge $\overline{Q'P}$. Q' und Q'' befinden sich im Medium II spiegelbildlich zu Q (vgl. Bild 2.4).
An der Grenzebene $z = 0$ ist

$$r_{PQ} = r_{PQ'} = r.$$

Ferner gilt dort

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r} = \frac{h}{r^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r'} = -\frac{h}{r^2}.$$

Damit ergibt sich aus (1) und (2) das Gleichungssystem

$$\frac{Q + Q'}{\varepsilon_{\rm I}} = \frac{Q''}{\varepsilon_{\rm II}}, \qquad Q - Q' = Q'' \tag{5}$$

mit der Lösung

$$Q' = \frac{\varepsilon_{\rm I} - \varepsilon_{\rm II}}{\varepsilon_{\rm I} + \varepsilon_{\rm II}}\,Q, \qquad Q'' = \frac{2\varepsilon_{\rm II} Q}{\varepsilon_{\rm I} + \varepsilon_{\rm II}}. \tag{6}$$

Als Potential auf der Kugeloberfläche erhält man aus (3)

$$\Phi_{\rm I} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{\rm I}}\left(\frac{1}{R} + \frac{\varepsilon_{\rm I} - \varepsilon_{\rm II}}{\varepsilon_{\rm I} + \varepsilon_{\rm II}}\frac{1}{r'}\right) Q. \tag{7}$$

Die Größe r' ist für jeden Punkt der Kugeloberfläche etwas unterschiedlich. (7) gilt näherungsweise unter der Voraussetzung, daß der Kugelradius klein ist, d. h. $R \ll r'$ gilt. In diesem Falle

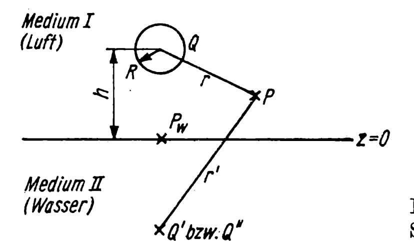


Bild 2.4. Zur Potentialberechnung durch Spiegelung

kann man für alle Kugelpunkte $r' = 2h$ setzen. Im Punkt $P_{\rm W}$ direkt unter dem Schwerpunkt des geladenen Körpers beträgt nach (4) das Potential

$$\Phi_{\rm W} = \frac{Q''}{4\pi\varepsilon_{\rm II} h} = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_{\rm I} + \varepsilon_{\rm II})\,h}. \tag{8}$$

Als Potentialdifferenz folgt somit aus (7) und (8)

$$\Delta\Phi = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_{\rm I}}\left[\frac{2}{R} - \frac{3\varepsilon_{\rm I} + \varepsilon_{\rm II}}{(\varepsilon_{\rm I} + \varepsilon_{\rm II})\,h}\right]. \tag{9}$$

Mit den vorgegebenen Zahlen erhält man

$$\Delta\Phi = \frac{10^{-8}}{8\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}\left[\frac{2}{0{,}1} - \frac{3 + 88}{(1 + 88)\,2{,}50}\right]\mathrm{V} = 889\ \mathrm{V}.$$

Ist das Medium II ein Metall, so liegt der Grenzfall $\varepsilon_{\rm II} \to \infty$ vor.

2.1.4. Spiegelung an einer Kugel

Eine punktförmige Ladung $Q = 10^{-7}$ As befindet sich in der Entfernung $r = a = 25$ cm vom Mittelpunkt einer leitenden Kugel mit dem Radius $R = 15$ cm. Bestimmen Sie die Potentialfunktion.

Lösung

Wir definieren die einzelnen Punkte durch Kugelkoordinaten. Koordinatenanfangspunkt ist der Kugelmittelpunkt. $r = a$, $\vartheta = 0$ bezeichnet den Ort der Ladung Q. Die Winkelkoordinate φ ist beliebig wählbar. Die Wirkung der Kugel kann durch eine virtuelle Ladung Q' im Innern der Kugel

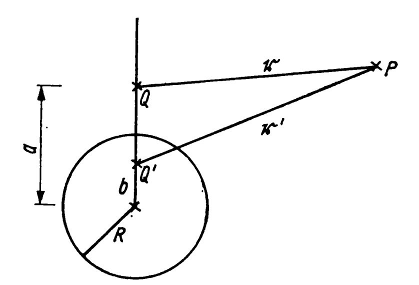


Bild 2.5. Spiegelung an einer Kugel

ersetzt werden. Sie liegt auf der Verbindungsgeraden von Kugelmittelpunkt und Ladung Q. Ihre r-Koordinate sei b; ϑ ist ebenfalls Null.
Bezeichnet man die Radiusvektoren von den Ladungen Q und Q' nach dem Aufpunkt P mit $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ (vgl. Bild 2.5), so ergibt sich für das Potential

$$\Phi = \frac{Q}{|\mathfrak{r}|} + \frac{Q'}{|\mathfrak{r}'|}. \tag{1}$$

Auf der Kugeloberfläche muß Φ konstant sein. Wir setzen diesen konstanten Wert gleich Null und erhalten damit

$$\frac{Q}{|\mathfrak{r}_K|} = -\frac{Q'}{|\mathfrak{r}_K'|}, \tag{2}$$

wobei der Index K auf die Kugeloberfläche hinweist. Die Beziehung (2), für einen beliebigen Punkt $P(R, \vartheta, \varphi)$ auf der Kugeloberfläche aufgestellt, ergibt nach dem Cosinussatz

$$\frac{Q}{\sqrt{b^2 + R^2 - 2bR\cos\vartheta}} = -\frac{Q'}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\vartheta}}. \tag{3}$$

Darin bezeichnet b die radiale Koordinate der virtuellen Ladung Q'. Aus (3) erhält man

$$\frac{Q'^2}{Q^2} = \frac{b}{a}\,\frac{b + \dfrac{R^2}{b} - 2R\cos\vartheta}{a + \dfrac{R^2}{a} - 2R\cos\vartheta}. \tag{4}$$

Wie aus den mittleren Summanden in Zähler und Nenner zu erkennen ist, besteht diese Beziehung für alle Winkel ϑ, wenn

$$R^2 = a \cdot b \qquad \text{bzw.} \qquad b = \frac{R^2}{a} \tag{5}$$

gilt. Die radiale Koordinate b der virtuellen Ladung Q' ist also reziprok proportional der radialen Koordinate a (**Gesetz der reziproken Radien**). (5) eingesetzt in (4) liefert

$$Q'^2 = Q^2 \frac{b}{a} \qquad \text{bzw.} \qquad Q' = -Q \sqrt{\frac{b}{a}}. \tag{6}$$

Im vorgegebenen Fall ist

$$b = \frac{(15 \cdot 10^{-2})^2}{25 \cdot 10^{-2}} \text{ m} = 9 \text{ cm},$$

$$Q' = 10^{-7} \sqrt{\frac{9}{25}} \text{ As} = 6 \cdot 10^{-8} \text{ As}.$$

Damit folgt aus (1) für das Potential des Punktes P, wenn man mit r, ϑ, φ dessen Kugelkoordinaten bezeichnet,

$$\Phi = Q \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2ar \cos \vartheta + a^2}} - \frac{R^2}{a \sqrt{a^2 r^2 - 2arR^2 \cos \vartheta + R^4}} \right). \tag{7}$$

2.1.5. Dielektrische Kugel im homogenen Feld

In Luft bestehe ein homogenes elektrisches Feld der Stärke $E = 10 \text{ V m}^{-1}$. Dieses wird durch eine Kugel aus Harz vom Durchmesser $2R = 20$ cm gestört. Berechnen Sie das Feld im Innern der Kugel, wenn das Harz die Dielektrizitätszahl $\varepsilon_r = 6$ hat.

Lösung

Das homogene elektrische Feld bei Abwesenheit der Kugel ist durch sein Potential

$$\Phi = -E_a x \tag{1}$$

bestimmt. Die Feldrichtung wird als x-Achse gewählt.
Man kann sich das Feld (1) entstanden denken aus der Überlagerung zweier Felder, die von zwei Ladungen Q und $\bar{Q} = -Q$ im Unendlichen ausgehen. Wir betrachten dazu das Feld zweier Ladungen $\pm Q$, deren Cartesische Koordinaten $x = \pm x_0$, $y = 0$, $z = 0$ lauten. Nach (1.1./8) hat das durch diese Ladungen hervorgerufene Feld das Potential

$$\Phi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{Q}{r_{PQ}} - \frac{Q}{r_{P\bar{Q}}} \right). \tag{2}$$

Bezeichnet man die Koordinaten des Punktes P mit x, y, z, so erhält man aus (2) für das Potential Φ in diesem Punkt

$$\Phi_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2+y^2+z^2}}\right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{\sqrt{x_0^2+x^2+y^2+z^2}}\left(1+\frac{x_0x}{x_0^2+\cdots}+\cdots-1+\frac{x_0x}{x_0^2+\cdots}\mp\cdots\right)\right].$$

Im Grenzfall $x_0 \to \infty$ folgt daraus

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi\varepsilon x_0^2}\,x. \tag{3}$$

Rückt man also die beiden Ladungen Q und $\bar{Q} = -Q$ in das positive und negative Unendliche und läßt sie gleichzeitig derart wachsen, daß

$$\frac{Q}{2\pi\varepsilon x_0^2} = -E_\mathrm{a} \tag{4}$$

konstant bleibt, so entsteht damit das homogene Feld (1). Die Ladung Q im positiv Unendlichen muß negativ sein, da das elektrische Feld von den Orten positiver zu Orten negativer Ladung weist.

In das Feld (1) bringen wir die dielektrische Kugel vom Radius R, deren Mittelpunkt wir als Koordinatenanfangspunkt wählen. Jede der beiden Ladungen Q und $\bar{Q}$ erzeugt in der Kugel eine spiegelbildliche Ladung. Nach dem Gesetz der reziproken Radien (2.1.4./5) ist der Ort der spiegelbildlichen Ladungen durch

$$\pm x_0' = \frac{R^2}{\pm x_0} \tag{5}$$

bestimmt. Im Grenzfall $x_0 \to \infty$ ergeben die Spiegelbilder einen Dipol, dessen Moment $\mathfrak{m}$ die Richtung der x-Achse hat. Sein Potential Φ_m erhält man aus (1.2.5./9).

Bei der dielektrischen Kugel bleibt die Größe der gespiegelten Ladung unbestimmt. Daher ist uns der Betrag m des Dipolmomentes zunächst unbekannt.

Das Potential außerhalb der Kugel setzt sich aus dem Potential (1) des homogenen Feldes und dem Störpotential Φ_m des virtuellen Dipols zusammen:

$$\Phi_\mathrm{a} = -E_\mathrm{a}x + \frac{\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{r}}{4\pi\varepsilon_\mathrm{a}r^3} = -E_\mathrm{a}x + \frac{mx}{4\pi\varepsilon_\mathrm{a}r^3}. \tag{6}$$

Diese Beziehung kann man allgemeiner auch

$$\Phi_\mathrm{a} = -E_\mathrm{a}x - \frac{\mathfrak{m}}{4\pi\varepsilon_\mathrm{a}}\cdot\operatorname{grad}\frac{1}{r} \tag{6a}$$

formulieren.

Schreibt man das Potential (6) in Kugelkoordinaten gemäß (1.2./10), so erhält man

$$\Phi_\mathrm{a} = \left(-E_\mathrm{a}r + \frac{m}{4\pi\varepsilon_\mathrm{a}r^2}\right)\cos\vartheta\sin\varphi. \tag{6b}$$

Für das Innere der Kugel gehen wir vom Ansatz eines homogenen Feldes

$$\Phi_i = -E_i x = -E_i r \cos\vartheta \sin\varphi \tag{7}$$

aus. An der Grenze zwischen den beiden Medien, d. h. für $r = R$, müssen nach (2.1./10) und (2.1./11) die Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} (\Phi_a)_{r=R} &= (\Phi_i)_{r=R} \\ \text{und} \quad \varepsilon_a \left(\frac{\partial \Phi_a}{\partial r}\right)_{r=R} &= \varepsilon_i \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial r}\right)_{r=R} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

erfüllt werden. Damit ergibt sich

$$E_a = E_i + \frac{m}{4\pi\varepsilon_a R^3}, \tag{9}$$

$$E_a = E_i \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_a} - \frac{m}{2\pi\varepsilon_a R^3}. \tag{10}$$

Hieraus erhält man für m und E_i

$$\frac{m}{4\pi\varepsilon_a E_a} = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_a}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_a} R^3 = \frac{\varepsilon_{rel} - 1}{\varepsilon_{rel} + 2} R^3, \tag{11}$$

$$E_i = \frac{3\varepsilon_a}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_a} E_a = \frac{3}{\varepsilon_{rel} + 2} E_a. \tag{12}$$

Das homogene elektrische Feld im Innern der Kugel ist somit für

$$\varepsilon_{rel} = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a} > 1$$

schwächer als das ungestörte homogene Feld außerhalb der Kugel. Im vorliegenden Fall erhält man

$$E_i = \frac{3}{6+2} E_a = \frac{3}{8} \cdot 10 \text{ V m}^{-1} = 3{,}75 \text{ V m}^{-1}.$$

Dagegen ergibt sich für das Feld der elektrischen Verschiebungsdichte

$$D_i = \varepsilon_i E_i = \frac{3\varepsilon_a \varepsilon_i E_a}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_a} = \frac{3\varepsilon_{rel}}{\varepsilon_{rel} + 2} D_a, \tag{13}$$

mit den vorgegebenen Zahlenwerten

$$\frac{D_i}{D_a} = \frac{3 \cdot 6}{6 + 2} = 2{,}25.$$

Die Erregungslinien im Innern der Kugel sind somit für $\varepsilon_{rel} > 1$ gegenüber dem äußeren Feld stärker konzentriert (vgl. Bild 2.6).

Im Grenzfall $\varepsilon_{\text{rel}} \to \infty$ (Metall) folgt aus (13) $D_\text{i} = 3D_\text{a}$, dagegen $E_\text{i} = 0$. Die elektrische Erregung wird also auf das Dreifache gesteigert. Der entgegengesetzte Grenzfall $\varepsilon_{\text{rel}} \to 0$ (Hohlkugel in metallischem Medium, genähert auch Luftblase in Wasser) führt auf $E_\text{i} = 1{,}5E_\text{a}$, $D_\text{i} = 0$.

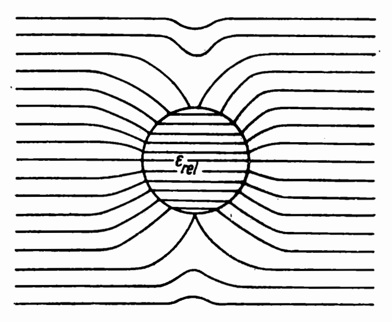


Bild 2.6. Kugel im homogenen Feld. Elektrische Feldlinien für $\varepsilon_{\text{rel}} < 1$ bzw. Erregungslinien für $\varepsilon_{\text{rel}} > 1$

2.1.6. Potential paralleler Drähte

Zwei parallele Drähte, deren radiale Ausdehnung zu vernachlässigen sei, haben voneinander den Abstand $2a = 50$ cm (vgl. Bild 2.7). Der erste Draht trägt, bezogen auf die Längeneinheit, die Ladung $q_1' = 10^{-7}$ As m^{-1}. Auf dem zweiten Draht befindet sich eine Ladung der linearen Dichte $q_2' = -10^{-7}$ As m^{-1}. Bestimmen Sie das Potential und die Äquipotentiallinien. Der Zwischenraum sei Luft.

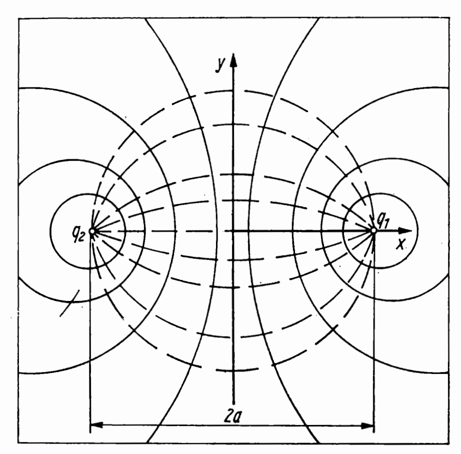


Bild 2.7. Parallele Drähte mit entgegengesetzten Ladungen. Äquipotentialflächen und Feldlinien

Lösung

Wir betrachten zunächst nur das Feld eines Drahtes. Im Abstand r von der Achse gilt nach (1.1./6) ür die Radialkomponente der elektrischen Erregung

$$\mathfrak{D}_r \cdot 2\pi r = q'. \tag{1}$$

Die übrigen Komponenten verschwinden. Mit $\mathfrak{D}$ ist auch die elektrische Feldstärke bestimmt. Aus dieser erhält man gemäß

$$\int_A^B \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{r} = \int_A^B \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0 r}\, dr = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_B}{r_A} \tag{2}$$

die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten A und B.
Werden sämtliche Potentialwerte eines axialsymmetrischen Feldes auf das Potential für $r_B = 1$ m bezogen, so kann man das Potential eines Punktes A mit dem Abstand $r_A = r$ von der zylindrischen Achse auch schreiben

$$\Phi(r) = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{1}{r}. \tag{3}$$

Befinden sich zwei elektrisch geladene, unendlich lange, parallele Geraden im Raum und hat ein Raumpunkt P von diesen die Abstände r_1 und r_2, so erhält man für sein Potential aus (3)

$$\Phi = \frac{q_1'}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{1}{r_1} + \frac{q_2'}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{1}{r_2}. \tag{4}$$

Im Falle $q_1' = -q_2' = q'$ folgt aus (4)

$$\Phi = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \tag{5}$$

Wir legen den Koordinatenanfangspunkt in die Mitte zwischen den beiden Geraden. Die Geradeselbst bezeichnen die z-Richtung. Senkrecht dazu, in Richtung der Verbindungslinie beider Ge raden, verläuft die x-Achse. Beide Drähte schneiden also die x-Achse, und zwar in den Punkten $x = \pm a$, $y = z = 0$. Kennzeichnen wir einen Punkt P durch seine Cartesischen Koordinaten x, y, z, so ergibt sich für seine Abstände von den beiden Geraden

$$r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}, \qquad r_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}. \tag{6}$$

Damit folgt für sein Potential nach (5)

$$\Phi = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}.$$

Mit den vorgegebenen Zahlen ergibt sich

$$\Phi = \frac{10^{-7}}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \ln \frac{(x+0{,}25)^2 + y^2}{(x-0{,}25)^2 + y^2}\ \mathrm{V} = 2170 \lg \frac{(x+0{,}25)^2 + y^2}{(x-0{,}25)^2 + y^2}\ \mathrm{V}.$$

Im Koordinatenanfangspunkt ist das Potential gleich Null, auf den beiden Drähten unendlich groß.
Die Äquipotentiallinien sind nach (5) durch

$$\Phi = \text{const}, \qquad \text{d. h.} \qquad \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} = C \tag{7}$$

bestimmt. (7) kann in der Form

$$(x - x_0)^2 + y^2 = R^2 \tag{8}$$

geschrieben werden mit

$$x_0 = a\,\frac{C+1}{C-1}, \qquad R^2 = \frac{4a^2C}{(C-1)^2}. \tag{9}$$

Als Äquipotentiallinien in der Ebene senkrecht zu den beiden Drähten ergeben sich also Kreise. Ihre Mittelpunkte liegen auf der x-Achse. Soll $x_0 = a$ sein, so muß $C = \pm\infty$ gewählt werden. $x_0 = -a$ wird für $C = 0$ angenommen. In beiden Fällen ist nach (9) der Kreisradius gleich Null. Die Äquipotentialflächen entarten hier in die beiden ladungtragenden Geraden.

2.1.7. Kapazität einer Vertikalantenne (Linienladung)

Ein zylindrischer Stab hat den Durchmesser $2r_0 = 5$ mm und die Länge $l = 3{,}50$ m. Er ist als Vertikalantenne senkrecht in die Höhe geführt und befindet sich mit seinem unteren Ende im

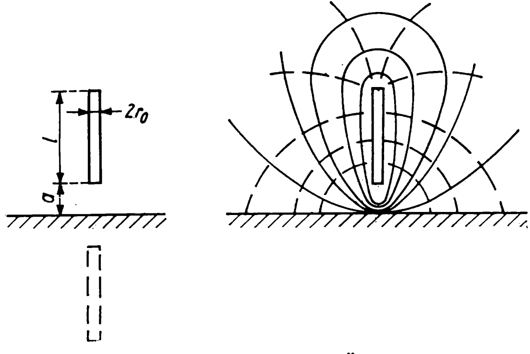


Bild 2.8. Vertikalantenne mit ihren Äquipotentialflächen und Feldlinien

Abstand $a = 10$ cm vom Erdboden entfernt. Berechnen Sie seine Kapazität gegen die als idealleitend vorausgesetzte Erde (vgl. Bild 2.8).

Lösung

Wir berechnen zunächst das Potential einer gleichmäßig mit elektrischer Ladung versehenen Linie gegen die idealleitende Erde und schließen daraus auf das vorgegebene Problem. Die Stabachse wählen wir als z-Achse, ihren Mittelpunkt als Anfangspunkt des Koordinatensystems. Bezeichnet

$$q = \frac{Q}{l} \tag{1}$$

die lineare Ladungsdichte, so ergibt sich in Analogie zu (2.1./7) und (2.1./8) für das Potential der Linienladung im Punkt P_0

$$\Phi_L = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{dz}{r_{PP_0}}. \tag{2}$$

Die Entfernung vom Aufpunkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ zum Punkt $P(0, 0, z)$ des Integrationsgebietes ist gleich

$$r_{PP_0} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + (z_0 - z)^2}. \tag{3}$$

Damit folgt

$$\Phi_L = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\ln \left|\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + (z_0 - z)^2} + z - z_0\right|\right]_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \tag{4a}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + \left(z_0 - \frac{l}{2}\right)^2} + \frac{l}{2} - z_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + \left(z_0 + \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{l}{2} - z_0}. \tag{4}$$

Die Linienladung influenziert auf der Erde eine Ladung, deren Potential Φ_s sich durch Spiegelung ergibt. Im Aufpunkt P_0 ist dieses gleich

$$\Phi_s = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{-\frac{3}{2}l-2a}^{-\frac{l}{2}-2a} \frac{dz}{r_{PsP0}} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{-\frac{3}{2}l-2a}^{-\frac{l}{2}-2a} \frac{dz}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + (z_0 - z)^2}}. \tag{5}$$

Durch Auswerten nach (4a) erhält man

$$\Phi_s = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + \left(z_0 + \frac{l}{2} + 2a\right)^2} - \frac{l}{2} - 2a - z_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + \left(z_0 + \frac{3}{2}l + 2a\right)^2} - \frac{3}{2}l - 2a - z_0}. \tag{6}$$

Das Potential der Linienladung bei Anwesenheit der Erde ergibt sich aus der Überlagerung von (4) und (6):

$$\Phi = \Phi_L + \Phi_s. \tag{7}$$

Ist die Länge des Kreiszylinders groß gegen den Radius r_0 seiner Grundfläche, so läßt sich das Potential wie folgt genähert berechnen: Die Äquipotentialflächen des von der Linienladung ausgehenden Feldes können für $l \gg \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ durch Zylindermantelflächen genähert werden. Wir ersetzen den vorgegebenen Zylinder durch eine Äquipotentialfläche, deren Schnittflächen-

radius $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ im Punkt $z_0 = 0$ identisch mit dem Radius r_0 des vorgegebenen Stabes ist. Das Potential hat auf dieser Äquipotentialfläche nach (4), (6) und (7) die Größe

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l} \ln \frac{\sqrt{4r_0^2 + l^2} + l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2} - l} \frac{\sqrt{4r_0^2 + (3l + 4a)^2} - (3l + 4a)}{\sqrt{4r_0^2 + (l + 4a)^2} - (l + 4a)}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l} \ln \frac{\sqrt{4r_0^2 + l^2} + l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2} - l} \frac{\sqrt{4r_0^2 + (l + 4a)^2} + (l + 4a)}{\sqrt{4r_0^2 + (3l + 4a)^2} + (3l + 4a)}. \tag{8}$$

Berücksichtigt man hierin $r_0 \ll l$, so folgt

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l} \ln \frac{l^2(l + 4a)}{r_0^2(3l + 4a)}. \tag{9}$$

Als Kapazität der Vertikalantenne gegen die idealleitende Erde erhält man somit

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 l}{\ln \dfrac{l^2(l + 4a)}{r_0^2(3l + 4a)}}. \tag{10}$$

Mit den vorgegebenen Werten ergibt sich

$$C = \frac{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 3{,}50}{\ln \dfrac{3{,}50^2 \cdot 3{,}90}{0{,}0025^2 \cdot 10{,}90}} \text{ F} = 28{,}9 \text{ pF}.$$

Im allgemeinen ist der Abstand a von der Erdoberfläche klein gegen die Länge l. Unter dieser Voraussetzung folgt

$$\boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln \dfrac{l}{\sqrt{3}\, r_0}}}. \tag{11}$$



Aufgaben

A 2.1.1. Berechnen Sie die Kapazität eines Plattenkondensators mit der Plattenfläche $A = 25 \text{ cm}^2$, dessen Platten einen Abstand von 0,1 mm haben. Der Zwischenraum ist mit Paraffin ($\varepsilon_r = 2{,}3$) gefüllt.

A 2.1.2. In atmosphärischer Luft ($\varepsilon = \varepsilon_0$) beträgt die Überschlagsspannung bei 1 mm Abstand $U = 3000$ V. Sie wächst proportional dem Abstand. Wie groß ist die Energie, die ein Plattenkondensator der Plattenfläche $A = 100 \text{ cm}^2$ speichern kann, wenn der Plattenabstand 1 cm beträgt?

A 2.1.3. Stellen Sie die Formel für die Kapazität zweier konzentrischer Kugeln auf. Wie groß sind die elektrische Feldstärke und die Spannung?

A 2.1.4. Wie groß ist die Kapazität einer Kugel gegen den unendlich fernen Raum (eine konzentrische Kugel vom Radius $R \to \infty$)?

A 2.1.5. Welchen Radius muß eine Kugel besitzen, wenn ihre Kapazität gegen den unendlich fernen Raum 1 F betragen soll?

A 2.1.6. Eine Punktladung der Stärke $Q = 10^{-10}$ As befindet sich gegenüber einer Metallplatte im Abstand $z_0 = 50$ cm. Berechnen Sie das elektrische Feld. Welche Feldstärke ergibt sich auf der Geraden, die von der Metallplatte zur Ladung gerichtet ist, in der Entfernung $l = 2$ m von der Metallplatte?

A 2.1.7. Eine Kugel vom Radius $R = 20$ cm befindet sich in Luft gegenüber einer Metallplatte. Der Abstand des Kugelmittelpunktes beträgt $h = 3$ m. Berechnen Sie genähert die Potentialdifferenz, wenn die Kugel eine Ladung von $5 \cdot 10^{-9}$ As trägt.

A 2.1.8. In ein homogenes elektrisches Feld der Stärke E_0 wird eine Metallkugel vom Radius R gebracht. Geben Sie das Potential an, a) wenn die Kugel ungeladen ist, b) wenn sie die Ladung Q trägt.

A 2.1.9. In das homogene Feld der Stärke 100 $\mathrm{Vm^{-1}}$ in Luft wird eine Kugel aus Harz ($\varepsilon_r = 20$) gebracht. Der Radius der Kugel beträgt $R = 1$ cm. Berechnen Sie das elektrische Moment der virtuellen Ladungen. Wie groß ist die elektrische Feldstärke in der Kugel?

A 2.1.10. Eine Gerade hat die elektrische Ladungsdichte $q' = 10^{-10}$ As $\mathrm{m^{-1}}$. Parallel dazu im Abstand $2a = 1$ m verläuft eine Gerade mit der Ladungsdichte $q_2' = -10^{-10}$ As$\mathrm{m^{-1}}$. Berechnen Sie die elektrische Feldstärke in der Mitte zwischen den beiden Geraden.

A 2.1.11. Bestimmen Sie die Äquipotentialflächen zweier paralleler Geraden, die gleiche elektrische Ladungsdichten aufweisen.

A 2.1.12. Parallel zu einem Kreiszylinder mit dem Durchmesser $2R_0 = 5$ cm verläuft ein Draht im Abstand $a = 1{,}50$ m von der Zylinderachse. Wie groß darf die Ladungsdichte auf dem Draht sein, wenn das Zylinderpotential nicht um mehr als 100 V über dem Erdpotential liegen soll?

A 2.1.13.* Eine zylindrische Leitung mit dem Durchmesser $2R_0 = 3$ cm wird von einem dazu parallel verlaufenden Draht influenziert. Der Durchmesser des Drahtes sei zu vernachlässigen. Sein Abstand von der Achse des zylindrischen Leiters betrage $a = 2{,}5$ cm. Die Ladung des Drahtes, bezogen auf die Längeneinheit, sei $q' = 10^{-8}$ As $\mathrm{m^{-1}}$. Führen Sie eine Spiegelung am Kreiszylinder durch, indem Sie vom Feld zweier Drähte ausgehen und parallel zum influenzierenden Draht virtuelle Ladungen anbringen. Bestimmen Sie das Potential. Wie groß ist dieses auf der Oberfläche des Zylinders?

A 2.1.14.* Ein Kreiszylinder mit dem Radius R_0 befindet sich in der Mitte zwischen zwei Drähten, die voneinander den Abstand $2a$ haben. Die spezifischen Ladungen der Drähte seien q' und $-q'$; der Zylinder sei ungeladen. Berechnen Sie durch Spiegelung das Potential.

A 2.1.15. In das homogene elektrische Feld der Stärke E_0 wird ein ungeladener Metallzylinder gebracht, so daß seine Achse senkrecht zur Feldrichtung steht. Bestimmen Sie das Potential des entstehenden Feldes.

2.2. Berechnung ebener statischer Felder durch konforme Abbildung

E

Einführung

Die Lösung der Potentialgleichung zur Berechnung ebener elektrostatischer Felder kann in vielen Fällen mit Hilfe einer konformen (winkeltreuen) Abbildung durchgeführt werden. Dazu seien die Cartesischen Koordinaten x und y eingeführt. Man faßt sie in der komplexen Variablen

$$z = x + \mathrm{i}\, y \tag{1}$$

zusammen.
Es bezeichne

$$w = w(z) = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y) \tag{2}$$

eine komplexe Funktion der Variablen z. Diese Funktion $w = w(z)$ vermittelt die Transformation der komplexen z-Ebene auf die komplexe w-Ebene.
Ist der Grenzwert

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{w(z + \Delta z) - w(z)}{\Delta z} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} \tag{3}$$

unabhängig davon, wie $\Delta z = \Delta x + \mathrm{i}\, \Delta y$ gegen Null strebt, d. h., ist der Differentialquotient (3) in der x,y-Ebene richtungsunabhängig, so definiert man diesen als **Ableitung** $w'(z)$ der Funktion $w(z)$.
Im Falle $w'(z) \neq 0$ vermittelt $w = w(z)$ eine **konforme** Abbildung der w-Ebene auf die z-Ebene. Infinitesimal kleine Dreiecke werden winkelgetreu von der w-Ebene auf die z-Ebene abgebildet. Zwei Kurven, die sich in der w-Ebene unter einem bestimmten Winkel schneiden, schneiden sich auch nach ihrer Abbildung auf die z-Ebene unter diesem Winkel. Insbesondere behalten zwei zueinander orthogonale Kurvenscharen, also z. B. **Äquipotential- und Feldlinien,** diese Eigenschaft auch nach der Transformation $w = w(z)$.
Setzt man im Differenzenquotienten (3) $\Delta y = 0$ und berechnet den Differentialquotienten längs der reellen Achse, d. h. für $\Delta z = \Delta x$, so folgt

$$\begin{aligned} w_{\mathrm{I}}(z) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x,y) - u(x,y)}{\Delta x} + \mathrm{i} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x,y) - v(x,y)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\, \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \tag{4}$$

Andererseits kann man $\Delta x = 0$ setzen und mit $\Delta z = \mathrm{i}\, \Delta y$ rechnen, den Differentialquotienten also längs der imaginären Achse bestimmen. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} w_{\mathrm{I}}(z) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x,y + \Delta y) - u(x,y)}{\mathrm{i}\, \Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x,y + \Delta y) - v(x,y)}{\Delta y} \\ &= \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned} \tag{5}$$

Der Vergleich von (4) und (5) führt auf die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{6}$$

Sie müssen erfüllt sein, wenn eine komplexe Funktion in einem bestimmten Punkt differenzierbar sein soll. Dieser Satz ist umkehrbar, was hier nicht bewiesen wird. Aus (6) folgt, wenn man die erste Gleichung nach x, die zweite nach y ableitet,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial x}, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{7}$$

Reguläre komplexe Funktionen sind von der Reihenfolge der Differentiation unabhängig. Daher erhält man aus (7)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{8}$$

Ebenso ergibt sich, wenn man in (6) die erste Gleichung partiell nach y, die zweite partiell nach x differenziert,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \tag{9}$$

Sowohl der reelle als auch der imaginäre Anteil einer regulären Funktion $w = w(z)$ erfüllen also die zweidimensionale LAPLACEsche Gleichung $\triangle \Phi = 0$. Die reellen und die imaginären Anteile der regulären komplexen Funktionen sind Potentialfunktionen. Hierin liegt die Bedeutung der Theorie für die Berechnung **zweidimensionaler** statischer Felder. Dagegen ist eine Übertragung auf Felder, die von drei Raumkoordinaten abhängen, nicht möglich.
Bei der Anwendung der Theorie konformer Abbildungen auf die Lösung der LAPLACE-Gleichung sucht man ein für die z-Ebene vorgelegtes Randwertproblem auf ein bereits gelöstes Problem in der w-Ebene zu transformieren. Die Äquipotentiallinien und die Feldlinien in der w-Ebene behalten ihre Eigenschaft auch nach der konformen Abbildung in die z-Ebene. Bezeichnen also die Geraden $u = u_0$ die Äquipotentiallinien, die Geraden $v = v_0$ die Feldlinien in der w-Ebene, so ergeben sich nach der konformen Abbildung (2) die Äquipotential- und die Feldlinien des Problems in der z-Ebene gemäß

$$u(x,y) = u_0 \qquad \text{und} \qquad v(x,y) = v_0.$$

Beispiel 3

Es soll das Feld in einer unendlich langen, zylindrischen Koaxialleitung bestimmt werden. Dieses ist nicht von der Koordinate in Richtung der Zylinderachse abhängig. Es kann also durch die beiden Cartesischen Koordinaten x und y oder durch die Polarkoordinaten r und φ ausgedrückt werden. Somit liegt ein ebenes Problem vor; man hat das Potential zwischen zwei konzentrischen

Kreisen zu bestimmen. Diese sind als Äquipotentiallinien vorgegeben. Daher ist zu vermuten, daß sämtliche Äquipotentiallinien in der z-Ebene konzentrische Kreise sind.
In der komplexen w-Ebene betrachtet man das Feld des unendlich ausgedehnten Plattenkondensators ohne Randstörungen. Bei diesem kennzeichnen die Geraden $u = u_0$ die Äquipotentiallinien, die Geraden $v = v_0$ die Feldlinien (s. Bild 2.9).
Wenn die Vermutung über die Äquipotentiallinien in der z-Ebene richtig ist, müssen sich die

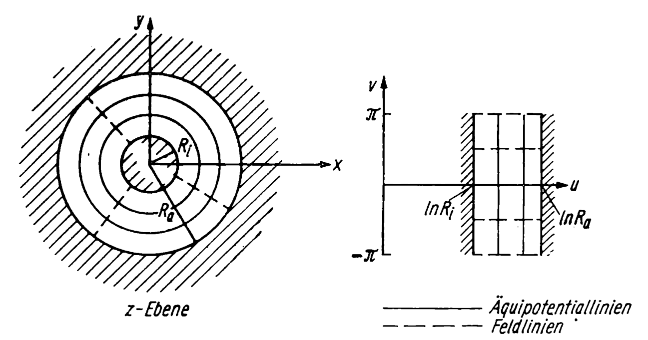


Bild 2.9. Konforme Abbildung $w = \ln z$ zur Berechnung des Feldes in der zylindrischen Koaxialleitung

Geraden $u = u_0$ durch eine konforme Abbildung $w = w(z)$ in die konzentrischen Kreise in der z-Ebene überführen lassen.
Als Koordinatenanfangspunkt in der z-Ebene wird der Mittelpunkt der beiden vorgegebenen konzentrischen Kreise gewählt. Ferner ist es zweckmäßig, z in Polarkoordinaten darzustellen: $z = x + \mathrm{i}y = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. Durch die konforme Abbildung

$$w = u + \mathrm{i}v = \ln z = \ln r + \mathrm{i}\varphi \tag{10}$$

wird die w-Ebene auf die z-Ebene abgebildet. Dabei bleiben die Schnittwinkel zwischen den Geraden, also auch die Orthogonalität der Äquipotential- und der Feldlinien unverändert.
Durch Trennung des Realteiles vom Imaginärteil folgt aus (10)

$$u = \ln r = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{11}$$

$$v = \arctan \frac{y}{x}. \tag{12}$$

Aus den Geraden $u = u_0$ als den Äquipotentiallinien in der w-Ebene werden also die konzentrischen Kreise $x^2 + y^2 = r^2$. Sie charakterisieren die Äquipotentiallinien in der z-Ebene.
Für das Potential in der z-Ebene erhält man

$$\Phi = \mathrm{const}\, u = \mathrm{const} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \mathrm{const} \ln r. \tag{13}$$

u, v, r, φ geben die Zahlenwerte in m an, sind jedoch dimensionslos, da z. B. $\ln r$ nur von einer reinen Zahl gebildet werden kann. const hat im vorliegenden Fall die Einheit V.

Als Feldlinien ergeben sich gemäß (12) aus den Geraden $v = v_0$ die Geraden $y = \text{const}\ x$. Für die Feldstärke errechnet man aus (13) in Zylinderkoordinaten

$$\mathfrak{E}_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}\,\text{m}^{-1} = -\frac{\text{const}}{r}\,\text{m}^{-1}.$$

Der Wert der Konstanten kann aus der Ladung auf den koaxialen Zylindern über die elektrische Erregung $\mathfrak{D}$ berechnet werden. Damit ist das elektrische Feld zwischen den Zylindern in Abhängigkeit von der elektrischen Ladung bestimmt.
Anstelle der Geraden $u = u_0$ können auch die Geraden $v = v_0$ gewählt werden, und man kann untersuchen, welches elektrostatische Problem dadurch gelöst wird. Das mit dieser konformen Abbildung verknüpfte Feldproblem wird in 2.2.1. behandelt.

In zahlreichen Fällen der Elektrotechnik sind die Äquipotentiallinien als Strecken vorgegeben, die durch einen Knick unterbrochen sind. Es tritt dann das Problem auf, das innerhalb eines Vielecks bestehende Feld durch konforme Abbildung auf ein bekanntes Feld zu transformieren. Hierzu wendet man den **Satz von Christoffel-Schwarz** an. Dieser bildet das Innere eines Vielecks in der z-Ebene auf die obere

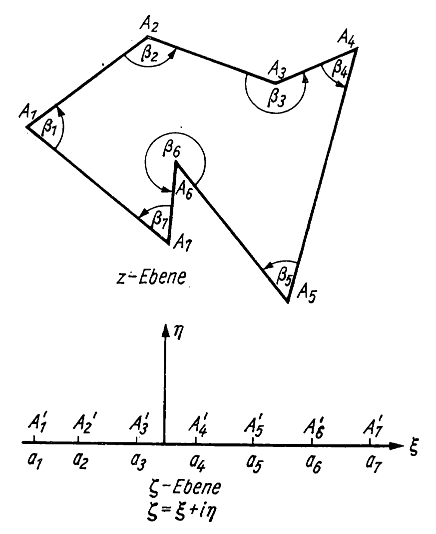


Bild 2.10. Konforme Abbildung eines Vielecks nach CHRISTOFFEL-SCHWARZ

ζ-Halbebene, das Vieleck selbst auf die reelle Achse in der ζ-Ebene ab. In der w-Ebene sei das Feld bekannt. Durch konforme Abbildung der w-Ebene auf die ζ-Ebene entsteht $\zeta(w)$, woraus man $z = z(\zeta) = z[\zeta(w)]$ bilden kann.
Es seien die Winkel des Vielecks in der z-Ebene mit

$$\beta_i = \alpha_i \pi \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{14}$$

bezeichnet (vgl. Bild 2.10). β_i liegt innerhalb des Wertebereiches von Null bis 2π, α_i somit zwischen Null und zwei. Die Eckpunkte des Vielecks erhalten bei ihrer Ab-

bildung auf die ζ-Ebene die Koordinaten $\xi_i = a_i$. Nach dem Satz von CHRISTOFFEL-SCHWARZ wird die konforme Abbildung des Innengebietes eines Vielecks in der z-Ebene auf die obere ζ-Halbebene durch die Transformation

$$z = z(\zeta) = A \int_0^\zeta (s - a_1)^{\alpha_1 - 1} (s - a_2)^{\alpha_2 - 1} \cdots (s - a_n)^{\alpha_n - 1} \, \mathrm{d}s + B \tag{15}$$

bewirkt.

Beispiel 4

Es soll ein Rechteck in der z-Ebene auf die obere Halbebene in der ζ-Ebene konform abgebildet werden (vgl. Bild 2.10a). Dabei kann man aus Gründen der Symmetrie annehmen, daß die Punkte A_1 und A_2 in der ζ-Ebene auf $a_1 = -1$, $a_2 = +1$ fallen, die Punkte A_4 und A_3 dagegen

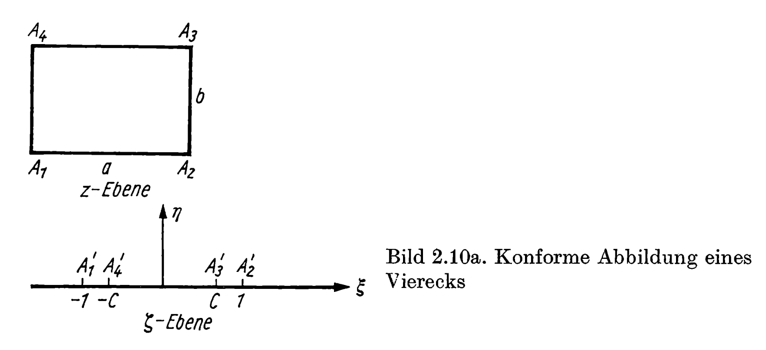


Bild 2.10a. Konforme Abbildung eines Vierecks

auf $a_4 = -c$, $a_3 = +c$. Die Winkel sind alle gleich $\pi/2$, der Exponent im CHRISTOFFEL-SCHWARZ-Integral ist daher überall gleich $\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$. Aus (15) folgt als Transformation, die das Innere des Rechtecks in der z-Ebene auf die obere ζ-Halbebene abbildet,

$$z = A \int_0^\zeta \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{s+1}\sqrt{s-1}\sqrt{s-c}\sqrt{s+c}} + B = A \int_0^\zeta \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(s^2-1)(s^2-c^2)}} + B. \tag{16}$$

Das auftretende Integral ist nicht elementar auswertbar. Es wird durch das elliptische Integral erster Gattung

$$F(k, \zeta) = \int_0^\zeta \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2 s^2)}} \tag{17}$$

gelöst. Die konforme Abbildung (16) schreibt sich somit

$$z = \frac{A}{c} F\left(\frac{1}{c}, \zeta\right) + B = \frac{A}{c} \int_0^\zeta \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{\left(1-s^2\right)\left(1-\frac{s^2}{c^2}\right)}} + B. \tag{18}$$

Hat man die konforme Abbildung $z = z(w)$ bestimmt, die das vorgegebene Problem in der z-Ebene in eine bereits bekannte Lösung für ein Feldproblem in der w-Ebene überführt, so kann die **Feldstärke** in der z-Ebene nach einem einfachen Differentiationsgesetz sofort angegeben werden. Definiert man die w-Ebene so, daß die Variable u bis auf einen konstanten Faktor den Wert des Potentials in der w-Ebene angibt, so gilt für die elektrische Feldstärke

$$\mathfrak{E}_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\mathrm{const}\,\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \mathfrak{E}_y = -\mathrm{const}\,\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{19}$$

Für den Betrag der Feldstärke folgt

$$|\mathfrak{E}| = \sqrt{\mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_y^2} = \mathrm{const}\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}, \tag{20}$$

woraus sich wegen der CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichung (7)

$$|\mathfrak{E}| = \mathrm{const}\sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} = \mathrm{const}\sqrt{\left|\frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial y}\right|}\sqrt{\left|\frac{\partial u}{\partial y} - \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial y}\right|} = \mathrm{const}\left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right| \tag{21}$$

ergibt. Der Betrag der Feldstärke ist proportional dem Absolutbetrag des Differentialquotienten w'.

x, y, u, v haben nach (19) die Einheit m, const hat die Einheit V m^{-1}. Man kann jedoch auch mit dimensionslosen Größen $w = u + \mathrm{i}\,v$ und $z = x + \mathrm{i}y$ arbeiten.

Beispiel 5

Nach Beispiel 3 bildet die Transformation

$$w = \ln z$$

das homogene Feld eines Plattenkondensators in der w-Ebene auf das Feld zwischen zwei koaxialen Zylindern (z-Ebene) ab. Das Potential in der w-Ebene ist durch $\Phi = \mathrm{const}\,u$ bestimmt. Für den Betrag der Feldstärke in der w-Ebene erhält man z. B. mit const $= 10$ V, wenn sämtliche geometrischen Größen Zahlenwerte in m angeben,

$$|\mathfrak{E}_{(w)}| = |\mathfrak{E}_u| = \left|-\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right| \mathrm{m}^{-1} = 10\ \mathrm{V\,m}^{-1}.$$

Der Betrag der Feldstärke in der z-Ebene wird gleich

$$|\mathfrak{E}_{(z)}| = \mathrm{const}\left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right| \mathrm{m}^{-1} = 10\left|\frac{1}{z}\right| \mathrm{V\,m}^{-1}.$$

Schreibt man entsprechend dem vorliegenden Problem $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, so folgt also

$$|\mathfrak{E}_{(z)}| = \frac{10}{r}\ \mathrm{V\,m}^{-1}.$$

Das Feld läßt sich hiernach um so stärker konzentrieren, je kleiner der Radius des Innenleiters gewählt wird.

Erfolgt die konforme Abbildung z. B. nach CHRISTOFFEL-SCHWARZ in mehreren Stufen

$$w = w(\Omega), \qquad \Omega = \Omega(\zeta_1), \qquad \ldots, \qquad \zeta_n = \zeta_n(z), \tag{22}$$

so erhält man den Betrag der Feldstärke nach der Kettenregel

$$|\mathfrak{E}_z| = \text{const}\left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\Omega}\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}\zeta_1}\cdots\frac{\mathrm{d}\zeta_n}{\mathrm{d}z}\right|. \tag{23}$$



2.2.1. Das Feld zwischen geneigten Platten

Zwei metallische Platten sind gegeneinander unter dem Winkel $\alpha = 2°$ geneigt. Der Abstand am unteren Ende beträgt $d = 0{,}1$ mm, die Breite einer Platte $b = 25$ cm, die Länge $l = 40$ cm. Randstörungen werden in erster Näherung vernachlässigt. Berechnen Sie die Kapazität dieses Kondensators und bestimmen Sie den Feldverlauf.

Lösung

Wir schreiben die komplexe Variable z in Polarkoordinaten

$$z = x + \mathrm{i}y = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \tag{1}$$

und betrachten die konforme Abbildung

$$w = u + \mathrm{i}v = \ln z = \ln r + \mathrm{i}\varphi. \tag{2}$$

Durch Trennung von Real- und Imaginärteil ergibt sich

$$u = \ln r = \ln\sqrt{x^2 + y^2}, \qquad v = \varphi = \arctan\frac{y}{x}. \tag{3}$$

Die für den ganzen Raum formulierte Lösung gilt nur zwischen den geneigten Platten.
Wir wählen in der w-Ebene die Geraden $v = v_0 = \varphi = \text{const}$ als Äquipotentiallinien, die Geraden $u = u_0 = \ln r_0 = \text{const}$ als Feldlinien (vgl. Bild 2.11). Für die z-Ebene ergeben sich damit aus (3) als Äquipotentiallinien die Geraden

$$y = x\tan\varphi_0, \tag{4}$$

als Feldlinien die Kreise

$$x^2 + y^2 = r_0^2. \tag{5}$$

Da $\varphi = \varphi_0$ die Äquipotentiallinien angibt, können wir nach (3) das Potential in der Form

$$\Phi = \text{const} \cdot \arctan \frac{y}{x} = \text{const}\, \varphi \tag{6}$$

schreiben. Für die elektrische Feldstärke erhalten wir gemäß $\mathfrak{E} = -\text{grad}\, \Phi$ aus (1.2./9)

$$\mathfrak{E}_r = 0, \qquad \mathfrak{E}_\varphi = -\text{const}\, \frac{1}{r}. \tag{7}$$

Die Ladungsdichte auf der rechten Platte wird gleich

$$\mathfrak{D}_\text{n} = -\varepsilon_0 \frac{\text{const}}{r};$$

daraus folgt für die gesamte Ladung auf der linken Platte

$$Q = -\varepsilon_0 \,\text{const} \cdot l \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r}{r} = -\varepsilon_0 \,\text{const} \cdot l \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}. \tag{8}$$

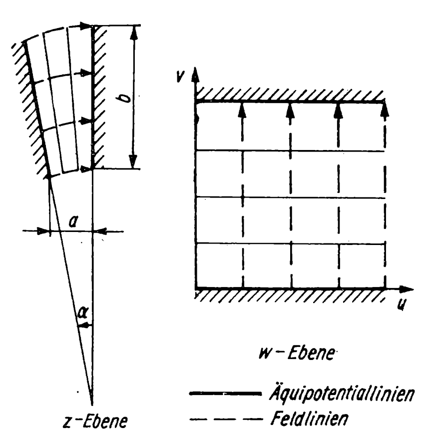


Bild 2.11. Konforme Abbildung $w = \ln z$ zur Berechnung des Feldes zwischen zwei geneigten Platten

Aus Bild 2.11 entnimmt man für $\alpha \ll 1$

$$d = r_1 \cdot \alpha, \qquad r_2 = r_1 + b = \frac{d}{\alpha} + b. \tag{9}$$

Demzufolge ergibt sich aus (8)

$$Q = -\varepsilon_0 \,\text{const} \cdot l \cdot \ln \left(1 + \frac{b\alpha}{d}\right)$$

und weiter

$$\text{const} = -\frac{Q}{\varepsilon \cdot l \cdot \ln\left(1 + \dfrac{b\alpha}{d}\right)}. \tag{10}$$

Die Spannung zwischen den beiden Platten beträgt

$$U = \int_{\pi/2}^{\pi/2+\alpha} \mathfrak{E}_\varphi r \,\mathrm{d}\varphi = -\text{const}\,\alpha = \frac{Q\alpha}{\varepsilon_0 l \ln\left(1 + \dfrac{b\alpha}{d}\right)}. \tag{11}$$

Für die Kapazität des Kondensators folgt damit die Formel

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 l \ln\left(1 + b\,\dfrac{\alpha}{d}\right)}{\alpha}. \tag{12}$$

Im Falle $r_1 \approx r_2 \gg b$ erhält man den Plattenkondensator. Es gilt dann

$$\frac{b\alpha}{d} = \frac{b}{r_1} \ll 1.$$

(12) liefert in diesem Falle

$$C = \frac{\varepsilon_0 b l}{d} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}, \tag{13}$$

in Übereinstimmung mit (2.1.1./9).
Mit den vorgegebenen Zahlen ergibt sich aus (12)

$$C = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}40 \ln\left(1 + 0{,}25\,\dfrac{2\pi}{180 \cdot 10^{-4}}\right)}{2\pi/180}\,\mathrm{F} = 4{,}5 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{F} = 450\,\mathrm{pF}.$$

2.2.2. Elektrisches Feld zwischen den Schenkeln einer metallischen Ecke

Bestimmen Sie das elektrische Feld zwischen den Schenkeln einer Ecke (vgl. Bild 2.12). Der Öffnungswinkel beträgt 90°, die Länge jedes Schenkels $l = 20$ cm, die Breite $b = 10$ cm. Durch eine äußere Ladung, die man sich in unendlich großer Entfernung konzentriert denken kann,

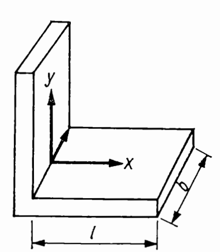


Bild 2.12. Metallische Ecke

wird auf der Oberfläche im Innenraum der Ecke eine Ladung der Stärke $Q = 10^{-9}$ As influenziert. Das elektrische Feld ist mittels konformer Abbildung zu berechnen, d. h., die Veränderlichkeit des Feldes mit der Raumkoordinate z ist unberücksichtigt zu lassen.

Lösung

Das Feld einer Ecke kann durch die konforme Abbildung

$$w = z^2 \qquad \text{bzw.} \qquad u + \mathrm{i}v = (x + \mathrm{i}y)^2 \tag{1}$$

berechnet werden. Die Auflösung dieser Gleichung nach Real- und Imaginärteil liefert

$$u = x^2 - y^2, \qquad v = 2xy. \tag{2}$$

Wir wählen die Kurven $v = \text{const}$ als Äquipotentiallinien. (1) transformiert diese in die Hyperbeln $2xy = \text{const}$. Im Grenzfall $v = 0$ entarten diese Hyperbeln in die aus den positiven Teilen der x- und der y-Achse gebildeten Ecke. Die orthogonal zu den Äquipotentiallinien verlaufenden Feldlinien sind in der w-Ebene durch die Geraden $u = \text{const}$, in der z-Ebene durch die Hyperbeln $x^2 - y^2 = \text{const}$ bestimmt.
Das Potential ist durch

$$\Phi = \text{const}\, v = \text{const} \cdot 2xy \tag{3}$$

gegeben. Daraus erhält man die Feldstärke

$$\mathfrak{E}_x = -2\,\text{const}\, y, \qquad \mathfrak{E}_y = -2\,\text{const}\, x. \tag{4}$$

Die elektrische Feldstärke ist somit am kleinsten in der Umgebung der (inneren) Ecke. Das geht auch aus

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = 2z \tag{5}$$

hervor.
Als Dichte der Oberflächenladung erhält man auf dem vertikalen Schenkel

$$\mathfrak{D}_\mathrm{n}(y) = -2\varepsilon_0\,\text{const}\, y, \tag{6}$$

auf dem horizontalen

$$\mathfrak{D}_\mathrm{n}(x) = -2\varepsilon_0\,\text{const}\, x. \tag{7}$$

Hieraus ergibt sich für die gesamte Ladung Q

$$-2\varepsilon_0 b\,\text{const}\left(\int_0^l y\,\mathrm{d}y + \int_0^l x\,\mathrm{d}x\right) = -\varepsilon_0 b\,\text{const}\, l^2 = Q,$$

woraus

$$\text{const} = -\frac{Q}{\varepsilon_0 b l^2} \tag{8}$$

folgt. Im vorliegenden Fall erhält man

$$\text{const} = -\frac{10^{-9}\ \mathrm{V\,m^{-2}}}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}04} = -2{,}825 \cdot 10^4\ \mathrm{V\,m^{-2}}.$$

Für die Feldstärke ergibt sich damit in der Mitte auf dem horizontalen Schenkel

$$\mathfrak{E}_x = 0, \qquad \mathfrak{E}_y = 5{,}65 \cdot 10^3\ \mathrm{V\,m^{-1}},$$

dagegen in der Mitte auf dem vertikalen Schenkel

$$\mathfrak{E}_x = 5{,}65 \cdot 10^3\ \mathrm{V\,m^{-1}}, \qquad \mathfrak{E}_y = 0.$$

2.2.3. Abbildung einer Kreisfläche auf einen Streifen — Elektrisches Feld zwischen zwei Zylinderhalbschalen

Zwei durch einen schmalen Spalt unterbrochene Zylinderhalbschalen tragen entgegengesetzte Ladungen. Bestimmen Sie das elektrische Feld und die Äquipotentiallinien.

Lösung

Wir bilden das Innere des Kreises vom Radius R in der z-Ebene auf die obere Halbebene der ζ-Ebene ab. Das geschieht durch die konforme Abbildung

$$\zeta = -\mathrm{i}\,\frac{z+R}{z-R} \qquad \text{bzw.} \qquad z = R\,\frac{\zeta - \mathrm{i}}{\zeta + \mathrm{i}}. \tag{1}$$

Zum Beweis setzt man

$$\zeta = |\zeta|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} \tag{2}$$

und berechnet

$$|\zeta - \mathrm{i}| = \sqrt{(|\zeta|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} - \mathrm{i})\,(|\zeta|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi} + \mathrm{i})} = \sqrt{|\zeta|^2 + 1 - 2\,|\zeta|\sin\psi}, \tag{3}$$

$$|\zeta + \mathrm{i}| = \sqrt{(|\zeta|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} + \mathrm{i})\,(|\zeta|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi} + \mathrm{i})} = \sqrt{|\zeta|^2 + 1 + 2\,|\zeta|\sin\psi}. \tag{4}$$

Die Forderung $|z| < R$ führt auf

$$R\,\frac{|\zeta - \mathrm{i}|}{|\zeta + \mathrm{i}|} = R\,\frac{\sqrt{|\zeta|^2 + 1 - 2\,|\zeta|\sin\psi}}{\sqrt{|\zeta|^2 + 1 + 2\,|\zeta|\sin\psi}} < R.$$

Diese Bedingung ist für den Wertebereich $0 < \psi < +\pi$, also für die obere Halbebene der komplexen Variablen ζ erfüllt. Durch (1) wird der Kreis vom Radius R in der z-Ebene auf die reelle Achse der ζ-Ebene abgebildet.
Wie man aus (1) erkennt, wird der Punkt $z = R$ in den unendlich fernen Punkt der ζ-Ebene, der Punkt $z = -R$ in den Nullpunkt der ζ-Ebene transformiert. $z = \mathrm{i}R$ entspricht $\zeta = -1$, $z = -\mathrm{i}R$ dagegen $\zeta = +1$. Die untere Hälfte des Kreises in der z-Ebene wird daher auf den positiven Teil der reellen Achse in der ζ-Ebene, der obere Halbkreis auf den negativen Teil der reellen Achse abgebildet.
In der w-Ebene liege ein homogenes Feld vor. Die Transformation

$$w = \ln\zeta \tag{5}$$

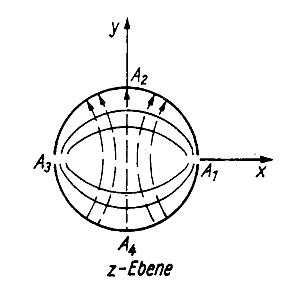
mit

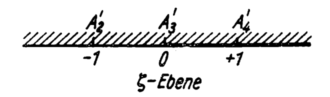
$$w = u + \mathrm{i}v, \qquad \zeta = |\zeta|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} \tag{5a}$$

vermittelt eine Abbildung des Streifens

$$0 < v < \pi$$

auf die obere ζ-Halbebene. Dem linken Teil der reellen Geraden in der komplexen ζ-Ebene, d. h. dem Wert $\psi = \pi$, entspricht in der w-Ebene die obere Gerade $v = \pi \pmod{2\pi}$, dem rechten Teil, d. h. $\psi = 0$, die untere Gerade $v = 0$ (vgl. Bild 2.13).





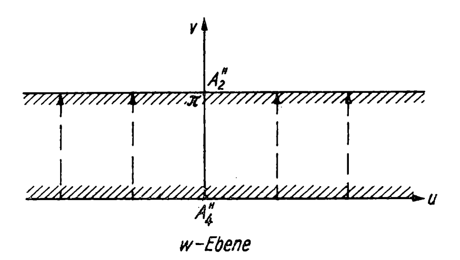


Bild 2.13. Konforme Abbildung zur Berechnung des Feldes zwischen zwei zylindrischen Halbschalen

(5) und (1) zusammengefaßt, ergibt als Gleichung zur Transformation der Kreis- auf die Streifenfläche

$$w = \ln \frac{z + R}{\mathrm{i}(z - R)}. \tag{6}$$

Setzt man hierin $z = x + \mathrm{i}y$, $w = u + \mathrm{i}v$ und trennt den Real- vom Imaginärteil, so folgt nach den Gesetzen über das Logarithmieren komplexer Größen

$$u = \frac{1}{2} \ln \frac{(x^2 + y^2 - R^2)^2 + 4y^2R^2}{[(x - R)^2 + y^2]^2}, \tag{7}$$

$$v = \arctan \frac{x^2 + y^2 - R^2}{2yR}. \tag{8}$$

Wir legen die Äquipotentiallinien durch $v = v_0$ fest. Für diese ergibt sich aus (8), wenn man dort das Argument gleich einer Konstanten C setzt,

$$x^2 + (y - CR)^2 = R^2(1 + C^2). \tag{9}$$

Für $y = 0$ erhält man aus (9) $x = \pm R$. Als Äquipotentiallinien ergeben sich somit Kreise, deren Mittelpunkte auf der y-Achse liegen. Sie gehen alle durch die beiden Punkte $(+R; 0)$ und $(-R; 0)$, die die positive von der negativen Ladung trennen (vgl. Bild 2.13) und von der Betrachtung auszuschließen sind. Die konforme Abbildung (6) ergibt also Äquipotentiallinien, die gerade dem vorgegebenen Problem entsprechen.

Als Feldlinien erhalten wir aus (7) die durch

$$(x + R)^2 + y^2 = C[(x - R)^2 + y^2] \tag{10}$$

bestimmten Kurven. Umgeformt folgt

$$\left(x + R\,\frac{1 + C}{1 - C}\right)^2 + y^2 = 4R^2\,\frac{C}{(1 - C)^2}. \tag{11}$$

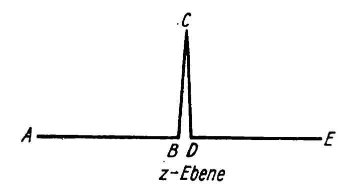
Die Feldlinien sind Kreise, deren Mittelpunkte auf der x-Achse liegen. Der Spezialfall $C = 1$ ergibt eine Gerade durch den Schwerpunkt der Halbkreise. Für $x = R$, $y = 0$ entarten die Feldlinienkreise in einen Punkt.

2.2.4. Das Feld einer aus der Ebene herausspringenden Kante

Aus einer Ebene ragt eine spitze Kante der Länge l heraus, die eine elektrische Ladung trägt. Berechnen Sie das Feld in der Umgebung dieser Kante.

Lösung

Wir charakterisieren die Ebene mit der herausragenden Kante durch die reelle Gerade in der z-Ebene, aus der im Koordinatenanfangspunkt eine Spitze der Länge l herausragt (s. Bild 2.14). Die z-Ebene bilden wir mit Hilfe des CHRISTOFFEL-SCHWARZ-Integrals auf die ζ-Ebene ab, wobei die Gerade mit der herausragenden Spitze in die reelle Achse der ζ-Ebene überführt wird. Dabei



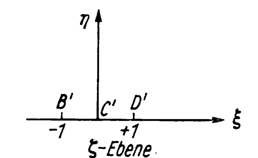


Bild 2.14. Konforme Abbildung zur Berechnung des Feldes einer aus der Ebene herausragenden spitzen Kante

lassen wir die Punkte B und D in der z-Ebene zusammenfallen, rechnen also mit einer unendlich dünnen Spitze. Es ergeben sich daher die Winkel

$$\beta_B = \frac{\pi}{2} \qquad \left(\text{Exponent } \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}\right),$$

$$\beta_C = 2\pi \qquad (\text{Exponent } 2 - 1 = 1),$$

$$\beta_D = \frac{\pi}{2} \qquad \left(\text{Exponent } \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}\right).$$

Den Punkt C legen wir in der ζ-Ebene auf den Koordinatenanfangspunkt. Die Punkte B und D können auch in der ζ-Ebene zueinander symmetrisch gelegt werden; sie erhalten hier die reelen Koordinaten -1 und $+1$. Nach dem Satz von CHRISTOFFEL-SCHWARZ (2.2./15) erhält man damit folgende Beziehung für die Abbildung der z-Ebene auf die ζ-Ebene

$$z = z(\zeta) = A \int_0^\zeta (s+1)^{-\frac{1}{2}} s^1 (s-1)^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}s + B \tag{1}$$

bzw.

$$z = A \int_0^\zeta \frac{s}{\sqrt{s^2-1}} \, \mathrm{d}s + B = A\sqrt{\zeta^2 - 1} - \mathrm{i}A + B. \tag{2}$$

Dem Wert $z = \mathrm{i}l$ entspricht der Wert $\zeta = 0$. Wir setzen diese Beziehung in (2) ein und erhalten $B = \mathrm{i}l$. Ferner soll $z = 0$ auf $\zeta = \pm 1$ führen. Daraus ergibt sich $A = l$. Somit erhalten wir endgültig für die konforme Abbildung der z-Ebene auf die ζ-Ebene

$$z = l\sqrt{\zeta^2 - 1} \qquad \text{bzw.} \qquad \zeta = \sqrt{\frac{z^2}{l^2} + 1}. \tag{3}$$

Schreiben wir $\zeta = \xi + \mathrm{i}\eta$, so können wir die Äquipotentiallinien durch $\eta = \eta_0$ festlegen und damit die gestellte Aufgabe auf den Plattenkondensator ohne Randstörungen zurückführen. Für das Potential erhält man daraus

$$\Phi = C\eta = \frac{C\sqrt{2}}{2l}\sqrt{\sqrt{(l^2 + x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} - (l^2 + x^2 - y^2)}. \tag{4}$$

Die Komponenten der Feldstärke werden gleich

$$\mathfrak{E}_x = -\frac{C\sqrt{2}\,x}{2l} \frac{l^2 + x^2 + y^2 - \sqrt{(l^2 + x^2 + y^2)^2 - 4l^2y^2}}{\sqrt{\left[\sqrt{(l^2 + x^2 + y^2)^2 - 4l^2y^2} - (l^2 + x^2 - y^2)\right]}\,[(l^2 + x^2 + y^2)^2 - 4l^2y^2]}, \tag{5}$$

$$\mathfrak{E}_y = \frac{C\sqrt{2}}{2l}\, y \frac{l^2 - x^2 - y^2 - \sqrt{(l^2 + x^2 + y^2)^2 - 4l^2y^2}}{\sqrt{\left[\sqrt{(l^2 + x^2 + y^2)^2 - 4l^2y^2} - (l^2 + x^2 - y^2)\right]}\,[(l^2 + x^2 + y^2)^2 - 4l^2y^2}}. \tag{6}$$

Im Grenzfall $y \gg l$, d. h. weit entfernt von der herausragenden Kante, ergibt sich aus (4) das Potential des ungestörten homogenen Feldes

$$(\Phi)_{y \gg l} = \frac{C}{l}\, y. \tag{7}$$

Für die Komponenten der Feldstärke folgt aus (5) und (6) ebenso wie aus (7)

$$(\mathfrak{E}_x)_{y \gg l} = 0, \qquad (\mathfrak{E}_y)_{y \gg l} = -\frac{C}{l} = \text{const}, \tag{8}$$

wie beim ungestörten homogenen Feld.
Um das Feld in der Umgebung der Spitze zu untersuchen, setzt man $x = \Delta x$, $y = l + \Delta y$ und nimmt $\Delta x \ll 1$, $\Delta y \ll 1$ an. Damit ergibt sich aus (4)

$$(\Phi)_{y \approx l,\, x \approx 0} = \frac{C}{\sqrt{l}} \sqrt{\Delta y + \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}, \tag{9}$$

aus (5) und (6) ebenso wie aus (9)

$$(\mathfrak{E}_x)_{y \approx l,\, x \approx 0} = -\frac{C\,\Delta x}{2\sqrt{l(\Delta x^2 + \Delta y^2)\left(\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2} + \Delta y\right)}}, \tag{10}$$

$$(\mathfrak{E}_y)_{y \approx l,\, x \approx 0} = -\frac{C\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} + \Delta y\right)}{2\sqrt{l(\Delta x^2 + \Delta y^2)\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} + \Delta y\right)}}. \tag{11}$$

Das Feld nimmt hiernach in der Umgebung der Spitze sehr große Werte an; unmittelbar an der Spitze wächst es über alle Grenzen (Feldkonzentration durch Spitzenwirkung).

2.2.5.* Kapazität zweier Zylinderschalen

Eine Koaxialleitung besitzt einen zylindrischen Außenleiter mit dem Innendurchmesser $2R = 20$ mm. Der Durchmesser des Innenleiters werde mit $2R_i$ bezeichnet. Es sei $R_i \ll R$. Durch zwei zueinander symmetrisch angeordnete Schlitze mit dem Öffnungswinkel $2\varphi_0 = 2°$ (vgl. Bild 2.15) wird die Wandung des Außenzylinders in zwei Zylinderschalen geteilt, die auf entgegengesetztes Potential $+\Phi_0$ und $-\Phi_0$ gebracht werden, während der Innenzylinder das Potential Null besitzt. Berechnen Sie die Kapazität des aus den beiden Schalen gebildeten Kondensators für die Zylinderlänge $l = 1$ m. Die Wandstärke der Zylinderschalen sei zu vernachlässigen. Welche Feldstärke ergibt sich an den äußersten Schlitzkanten?

Lösung

Das elektrostatische Problem wird durch eine Folge konformer Abbildungen gelöst.
Durch die erste Transformation

$$\Omega = \ln z \tag{1}$$

wird jeder der beiden Halbkreise auf ein Vieleck abgebildet (vgl. Bild 2.15a und Bild 2.15b).
Die zweite Transformation

$$\Omega = A_2 \int_0^{\zeta} \frac{(s - a_2)\,\mathrm{d}s}{\sqrt{(s - a_1)(s + 1)\,s(s - a_3)}} + B_2 \tag{2}$$

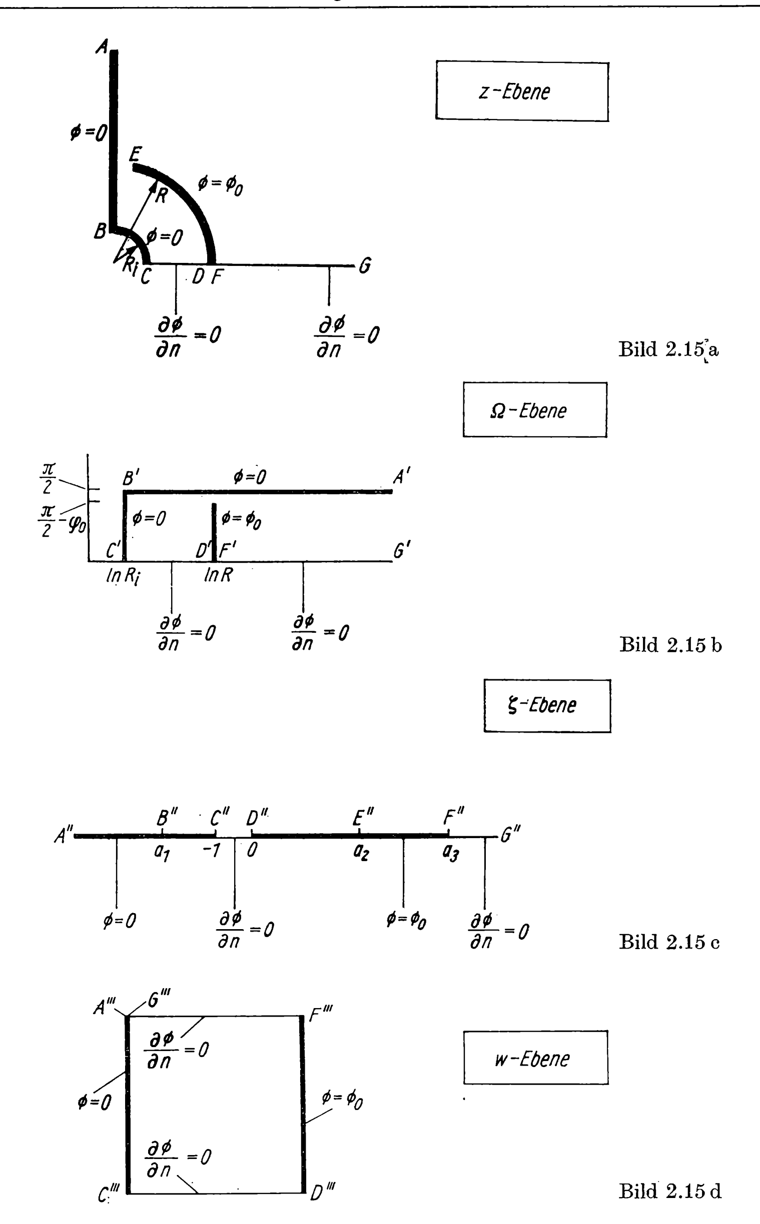


Bild 2.15a

Bild 2.15b

Bild 2.15c

Bild 2.15d

Bild 2.15. Konforme Abbildung zur Berechnung des Feldes in der Koaxialleitung mit geschlitztem Außenleiter

bildet das Innere des von der rechten Halbschale erzeugten Vielecks in der Ω-Ebene auf die obere Halbebene der komplexen Variablen ζ ab (vgl. Bild 2.15c). Die dritte Transformation

$$w = A_3 \int_0^{\zeta} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(s+1)\,s(s-a_3)}} + B_3 \tag{3}$$

bildet die obere Halbebene der Variablen ζ auf das Innere eines Rechtecks in der w-Ebene ab und führt damit das vorgelegte Problem auf das homogene Feld des Plattenkondensators zurück (Bild 2.15d). Dabei ist wesentlich, daß ausgezeichnete Äquipotentiallinien ($\Phi = 0,\ \Phi = \Phi_0$) und ausgezeichnete Feldlinien $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0\right)$ in der z-Ebene diese Eigenschaft auch in der w-Ebene besitzen. Aus (1) und (2) ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$\ln R_\mathrm{i} + \mathrm{i}\,\frac{\pi}{2} = A_2 \int_0^{a_1} \frac{(s-a_2)\,\mathrm{d}s}{\sqrt{(s-a_1)\,(s+1)\,s(s-a_3)}} + B_2, \tag{4}$$

$$\ln R_\mathrm{i} = A_2 \int_0^{-1} \frac{(s-a_2)\,\mathrm{d}s}{\sqrt{(s-a_1)\,(s+1)\,s(s-a_3)}} + B_2, \tag{5}$$

$$\ln R = B_2, \tag{6}$$

$$\ln R + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right) = A_2 \int_0^{a_2} \frac{(s-a_2)\,\mathrm{d}s}{\sqrt{(s-a_1)\,(s+1)\,s(s-a_3)}} + B_2, \tag{7}$$

$$\ln R = A_2 \int_0^{a_3} \frac{(s-a_2)\,\mathrm{d}s}{\sqrt{(s-a_1)\,(s+1)\,s(s-a_3)}} + B_2. \tag{8}$$

Wir setzen (6) in die übrigen Gleichungen ein und formen auf reelle Ausdrücke um. Dabei ist

$$a_1 < -1 < 0 < a_2 < a_3$$

zu berücksichtigen. Es folgt zunächst aus (5)

$$\ln \frac{R}{R_\mathrm{i}} = A_2 \int_{-1}^{0} \frac{(a_2-s)\,\mathrm{d}s}{\sqrt{(s-a_1)\,(s+1)\,(-s)\,(a_3-s)}}, \tag{9}$$

damit aus (4)

$$\frac{\pi}{2} = A_2 \int_{a_1}^{-1} \frac{(a_2-s)\,\mathrm{d}s}{\sqrt{(s-a_1)\,(-s-1)\,(-s)\,(a_3-s)}}. \tag{10}$$

(7) und (8) ergeben

$$\frac{\pi}{2} - \varphi_0 = A_2 \int\limits_0^{a_2} \frac{(a_2 - s)\,\mathrm{d}s}{\sqrt{(s - a_1)\,(s + 1)\,s(a_3 - s)}}, \tag{11}$$

$$\frac{\pi}{2} - \varphi_0 = A_2 \int\limits_{a_2}^{a_3} \frac{(s - a_2)\,\mathrm{d}s}{\sqrt{(s - a_1)\,(s + 1)\,s(a_3 - s)}}. \tag{12}$$

Zur Bestimmung der vier Unbekannten A_2, a_1, a_2, a_3 liegen somit vier Gleichungen vor. Ihre Auswertung führt auf vollständige elliptische Integrale erster und zweiter Gattung.
Im Grenzfall $R_i \to 0$ entnimmt man aus Bild 2.15a, daß die Punkte B und C zusammenfallen. Der Parameter a_1 wird dann gleich -1. Damit wächst der Ausdruck (9) über alle Grenzen, wie es für $R_i \to 0$ sein muß. Setzt man wegen der Beschränkung auf kleine Schlitzwinkel das Bestehen der Ungleichungen

$$a_3 \gg a_2, \qquad a_2 \gg |a_1| \tag{13}$$

voraus, so lassen sich die Integrale (10) bis (12) genähert elementar auswerten. (10) ergibt für $a_1 = -1 - \varDelta$ mit $\varDelta \ll 1$

$$\int\limits_{a_1}^{-1} \frac{a_2}{\sqrt{(s - a_1)\,(-s - 1)\,a_3}}\,\mathrm{d}s = \frac{a_2}{\sqrt{a_3}}\pi. \tag{10a}$$

(11) und (12) liefern

$$\frac{1}{\sqrt{a_3}} \int\limits_0^{a_2} \frac{a_2 - s}{(s + 1)\sqrt{s}}\,\mathrm{d}s = \frac{2}{\sqrt{a_3}}\left(a_2 \arctan \sqrt{a_2} - \sqrt{a_2}\right) = \frac{\pi a_2 - 4\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_3}}, \tag{11a}$$

$$\int\limits_{a_2}^{a_3} \frac{(s - a_2)\,\mathrm{d}s}{\sqrt{s^3(a_3 - s)}} = \pi - 4\sqrt{\frac{a_2}{a_3}}. \tag{12a}$$

Daraus erhält man das Gleichungssystem

$$2\,\frac{a_2 A_2}{\sqrt{a_3}} = 1, \qquad \varphi_0 = \frac{4\sqrt{a_2}\,A_2}{\sqrt{a_3}}, \qquad A_2\left(\pi - 4\sqrt{\frac{a_2}{a_3}}\right) = \frac{\pi}{2} - \varphi_0. \tag{14}$$

Seine Lösung unter der Voraussetzung (13) lautet

$$a_2 = \frac{4}{\varphi_0^{\,2}}, \qquad a_3 = \frac{16}{\varphi_0^{\,4}}, \qquad A_2 = \frac{1}{2\varphi_0^{\,4}}. \tag{15}$$

Bezeichnet man in der w-Ebene den Abstand zwischen den beiden Äquipotentiallinien $\varPhi = 0$ und $\varPhi = \varPhi_0$ mit a, dagegen die Länge einer Äquipotentiallinie mit b (vgl. Bild 2.15d), so folgen

aus (2) und (3) die Beziehungen

$$A_3 \int_0^{-\infty} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(s+1)\,s(s-a_3)}} + B_3 = ib, \tag{16}$$

$$A_3 \int_0^{-1} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(s+1)\,s(s-a_3)}} + B_3 = 0, \tag{17}$$

$$B_3 = a \quad (18), \qquad A_3 \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(s+1)\,s(s-a_3)}} + B_3 = ib. \tag{19}$$

Durch Umrechnung auf die elliptischen Normalintegrale ergibt sich[1])

$$\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(s+1)\,s(s-a_3)}} = \frac{2}{\sqrt{a_3+1}}\,K(k). \tag{20}$$

Weiter erhält man

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{-(s+1)\,s(s-a_3)}} = \frac{2}{\sqrt{a_3+1}}\,K(k'). \tag{21}$$

Hierin bedeutet K das vollständige elliptische Integral erster Gattung. Der Modul des elliptischen Integrals ist gleich

$$k = \sqrt{\frac{1}{a_3+1}}, \tag{22}$$

ferner ist

$$k' = \sqrt{1-k^2} = \sqrt{\frac{a_3}{a_3+1}}. \tag{23}$$

Wir setzen (20) und (21) zusammen mit (18) in die Gleichungen (16) und (17) ein und erhalten daraus das Gleichungssystem

$$\frac{2A_3}{\sqrt{a_3+1}}\,K(k) = a \quad (24), \qquad \frac{2A_3}{\sqrt{a_3+1}}\,K(k') = b. \tag{25}$$

Die Auswertung der Gleichung (19) führt zu keiner neuen Gleichung für die drei Unbekannten a, b und A_3. Man kann daher eine dieser Größen, z. B. a, frei wählen, womit die anderen beiden durch (24) und (25) bestimmt sind.

---

1) vgl. [3]

Für die Lösung des Problems, die Kapazität des aus den beiden Schalen gebildeten Kondensators zu bestimmen, ist es jedoch nur erforderlich, das Verhältnis b/a zu kennen. Die Folge der konformen Abbildungen (1) bis (3) überführt das Feld zwischen den Halbschalen in das Feld des Plattenkondensators mit den Abmessungen bl und dem Abstand a. Nach (2.1.1./9) folgt für die Kapazität des Plattenkondensators

$$C = \frac{\varepsilon A}{d} = \frac{\varepsilon bl}{a}. \tag{26}$$

Hierin (24) und (25) eingesetzt, ergibt unter Annahme von $\varepsilon = \varepsilon_0$ für die Kapazität der entgegengesetzt geladenen Zylinderhalbschalen

$$C = \varepsilon_0 \frac{K(k')}{K(k)} l = \varepsilon_0 \frac{K\left(\sqrt{\frac{a_3}{a_3+1}}\right) l}{K\left(\sqrt{\frac{1}{a_3+1}}\right)}. \tag{27}$$

Im vorliegenden Fall ist nach (15)

$$a_3 = \frac{16}{\varphi_0{}^4} = \frac{16 \cdot 180^4}{1^4 \cdot \pi^4} = 1{,}7 \cdot 10^8.$$

Damit folgt nach (22) und (23)

$$k = \sqrt{\frac{1}{1{,}7 \cdot 10^8 + 1}} = 7{,}6 \cdot 10^{-5}, \qquad k' = \sqrt{1 - k^2} = 1 - 2{,}9 \cdot 10^{-9}.$$

Zur Berechnung der vollständigen elliptischen Integrale wendet man im vorliegenden Fall am zweckmäßigsten die Formeln

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{k^4}{4} + \cdots\right) \tag{28}$$

und

$$K(k') = \ln \frac{4}{k} \tag{29}$$

für kleine Werte k an. Es ergibt sich mit hinreichender Genauigkeit

$$K(7{,}6 \cdot 10^{-5}) = \frac{\pi}{2}, \qquad K(1 - 2{,}9 \cdot 10^{-5}) = \ln \frac{4}{7{,}6 \cdot 10^{-9}} = 10{,}87.$$

Somit folgt für die gesuchte Kapazität der gesamten Anordnung

$$C = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10{,}87 \cdot 2 \cdot 1}{3{,}14}\ \mathrm{F} = 6{,}12 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{F}.$$

Die Feldstärke in der z-Ebene ergibt sich durch Berechnung des Differentialquotienten

$$\left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\zeta}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\Omega}\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}z}\right|$$

$$= \left|\frac{A_3}{\sqrt{(\zeta+1)\,\zeta(\zeta-a_3)}}\,\frac{\sqrt{(\zeta-a_1)\,(\zeta+1)\,\zeta(\zeta-a_3)}}{A_2(\zeta-a_2)}\right| \frac{1}{r} = \left|\frac{A_3\sqrt{\zeta-a_1}}{A_2\,(\zeta-a_2)}\right| \frac{1}{r}. \tag{30}$$

An der äußersten Schlitzkante E ist $\zeta = a_2$. Die Feldstärke wächst also an der scharfen Kante über alle Grenzen (Spitzenwirkung).



Aufgaben

A 2.2.1. Welchem elektrostatischen Problem entspricht die konforme Abbildung

$$w = \frac{1}{z}?$$

A 2.2.2. Untersuchen Sie die konforme Abbildung

$$w = \sqrt{z}\,.$$

A 2.2.3. Untersuchen Sie die konforme Abbildung

$$z = c \cosh w\,.$$

A 2.2.4. Welche geometrischen Transformationen werden durch die konformen Abbildungen

a) $w = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$, b) $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

auf den Einheitskreis in der z-Ebene bewirkt; d. h., welches Bild liefert der Einheitskreis in der z-Ebene bei der Abbildung auf die w-Ebene?

A 2.2.5. Welche geometrische Transformation wird durch die konforme Abbildung

$$w = z + \frac{1}{z}$$

a) auf zum Einheitskreis konzentrische Kreise,
b) auf Gerade durch den Koordinatenanfangspunkt in der z-Ebene bewirkt?

A 2.2.6. Untersuchen Sie die Eigenschaften der konformen Abbildung

$$w = z + \frac{c^2}{z}.$$

Bild 2.16. Platte über unbegrenzter Ebene

Welche Transformationen ergeben sich für Kreise um den Koordinatenanfangspunkt sowie für Gerade durch den Ursprungspunkt?

A 2.2.7. Geben Sie die konforme Abbildung an, um nach Bild 2.16 das Feld einer Kondensatorplatte zu berechnen, die sich über einer unbegrenzten Ebene befindet (Verfahren zur Berechnung der Randstörungen eines Plattenkondensators).

A 2.2.8.* Welche konformen Abbildungen sind durchzuführen, um das elektrische Feld zwischen den Schalen eines geschlitzten zylindrischen Leiters mit endlicher Wandstärke zu berechnen? Die beiden Halbschalen befinden sich auf entgegengesetztem Potential. Der Innenleiter hat das Potential Null. Stellen Sie die Gleichungen zur Bestimmung der Parameter auf.

A 2.2.9.* In der zylindrischen Koaxialleitung mit geschlitztem Außenleiter befinden sich die beiden Halbschalen des Außenleiters auf dem Potential $+\Phi_0$, der Innenleiter auf dem Potential $-\Phi_0$. Welche konformen Abbildungen sind zur Berechnung der Kapazität durchzuführen?

2.3. Magnetische Eigenschaften der Stoffe

E Einführung

Die Magnetisierung $\mathfrak{M}$ eines Stoffes ist nach (1.1./23) durch die Beziehung

$$\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H} = \mu_0\mathfrak{H} + \mathfrak{M} \tag{1}$$

definiert. Zwischen der Magnetisierung $\mathfrak{M}$ und der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$ besteht nach (1) der Zusammenhang

$$\mathfrak{M} = (\mu - \mu_0)\,\mathfrak{H} = \mu_0\varkappa\mathfrak{H}. \tag{2}$$

Darin bezeichnet

$$\varkappa = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} = \mu_r - 1 \tag{2a}$$

die **magnetische Suszeptibilität.**
Als Suszeptibilität je Kilomol definiert man die Größe

$$\chi = \frac{\varkappa M}{\varrho},$$

die sich aus den atomaren Eigenschaften ableiten läßt. M gibt darin die Masse eines Kilomols, ϱ die Massendichte an.
Ein kleiner Körper vom Volumen $\varDelta V$ mit der Magnetisierung $\mathfrak{M}$ in jedem Punkte stellt einen Magneten mit dem **magnetischen Moment**

$$\boxed{\varDelta \mathfrak{m}_m = \mathfrak{M}\,\varDelta V} \tag{3}$$

dar.

Beispiel 6

Die Zelle eines magnetischen Informationsspeichers habe das Volumen $\varDelta V = 10^{-16}\,\text{m}^3$. Der binäre Grundzustand 0 sei durch Sättigungsmagnetisierung in Richtung der z-Achse gekennzeichnet. Die Sättigungsmagnetisierung sei gleich $M_S = 1{,}2\ \text{V s m}^{-2}$. Bei Speicherung der Information 0 stellt die Zelle daher einen Magneten mit dem Moment

$$\varDelta m_m = 1{,}2 \cdot 10^{-16}\ \text{V s m}$$

dar, das die Richtung der z-Achse hat.

Für **diamagnetische** Stoffe ist $\varkappa < 0$. Diese haben ursprünglich kein magnetisches Moment. Es wird erst durch das äußere Feld induziert, wobei die LENZsche Regel gilt (vgl. 1.4.1.). Der induzierte elektrische Strom, dessen Träger die Elektronen sind, ist daher dem Strom der Feldspule entgegengerichtet. Ebenso ist das magnetische Moment der Elementarmagnete dem Moment der Feldspule entgegengerichtet.
In **paramagnetischen** Stoffen haben die Moleküle auch ohne das äußere Feld magne-

tische Momente. Die magnetischen Momente sind statistisch über den gesamten Körper verteilt, so daß dieser als Ganzes kein magnetisches Moment zeigt.
Im Magnetfeld erhalten die Achsen der molekularen Momente eine Vorzugsrichtung. Nur ein schwach überwiegender Teil der Moleküle besitzt eine magnetische Komponente in der Vorzugsrichtung, während bei einem nur wenig kleineren Teil diese Komponente in die entgegengesetzte Richtung weist. Infolgedessen ist die Suszeptibilität bei paramagnetischen Stoffen nur wenig größer als Null (vgl. Tafel 3).
Als Ursache dafür, daß ein äußeres Feld die vollständige Gleichrichtung der Elementarmagnete nicht erzwingt, hat man die Wärmebewegung der Moleküle anzusehen. Infolgedessen ist die magnetische Suszeptibilität $\varkappa$ temperaturabhängig. Für nicht zu tiefe Temperaturen gilt das **Curiesche Gesetz**

$$\varkappa = \frac{C}{T}. \tag{4}$$

Bei den **ferromagnetischen Stoffen** sind Permeabilität und Suszeptibilität auch in grober Näherung nicht mehr als Materialkonstanten aufzufassen. Schreibt man den Zusammenhang zwischen den Feldgrößen in den Formen (1) und (2), so sind μ und $\varkappa$ nicht nur von der Stärke des äußeren Feldes, sondern auch von der Vorgeschichte der Magnetisierung abhängig.

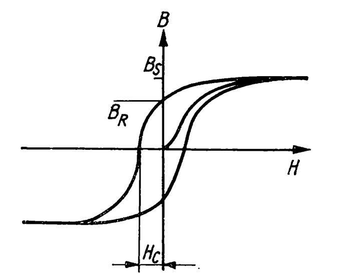


Bild 2.17. Hysteresisschleife. H_c Koerzitivfeldstärke, B_R Remanenz

Das Verhalten ferromagnetischer Stoffe wird durch die Hysteresisschleife $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ oder auch $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ dargestellt (vgl. Bild 2.17). Steigert man, ausgehend vom unmagnetischen Zustand, die Feldstärke $\mathfrak{H}$, so nimmt die Magnetisierung $\mathfrak{M}$ bzw. die magnetische Flußdichte $\mathfrak{B}$ zunächst stärker, dann schwächer zu, bis die **Sättigungsmagnetisierung** erreicht ist. Fällt $\mathfrak{H}$ danach wieder, so nimmt die Magnetisierung langsamer ab, als sie aufgebaut wurde. Für $\mathfrak{H} = 0$ ist noch immer eine bestimmte Magnetisierung $\mathfrak{M}_R = \mathfrak{B}_R$ vorhanden, die als **Remanenz** bezeichnet wird. Der ferromagnetische Stoff ist also dann auch ohne äußeres Feld magnetisch. Wird jetzt ein magnetisches Feld in der entgegengesetzten Richtung aufgebaut, so nimmt die Magnetisierung weiter ab, bis sie den Wert Null erreicht. Die hierzu gehörige Größe der Feldstärke H bezeichnet man als **Koerzitivfeldstärke** H_c. Mit der weiteren Vergrößerung der Feldstärke in der entgegengesetzten Richtung wird auch die Magnetisierung des Körpers in der entgegengesetzten Richtung aufgebaut und erreicht schließlich symmetrisch zur ursprünglichen Sättigungsmagnetisierung ihren Endwert. Durchläuft $\mathfrak{H}$ nun eine Folge von entgegengesetzt gleich großen Endwerten,

so stellt sich auch für die Magnetisierung $\mathfrak{M}$ eine zyklische Wertefolge ein. Die graphische Darstellung dieses Verhaltens wird als äußerste Hysteresisschleife bezeichnet.
Während die Sättigungsmagnetisierung eine Materialkonstante ist, sind die Koerzitivfeldstärke und die Remanenz innerhalb gewisser Grenzen auch noch von anderen Größen, z. B. der inneren Spannung, der Schichtstärke, der geometrischen Form, abhängig.
Die Größe

$$\mu = \frac{B}{H} \tag{1a}$$

ist bei ferromagnetischen Stoffen nicht konstant. Sie ist eine mehrdeutige Funktion der magnetischen Feldstärke bzw. der magnetischen Flußdichte. Betrachtet man nur die äußerste Hysteresisschleife aller möglichen Kurven, so gehören zu jedem Wert H zwei Werte B und damit zwei Werte μ.
Neben der gemäß (1) bzw. (1a) definierten gewöhnlichen Permeabilität bezeichnet man die Größe

$$\mu_{\mathrm{d}} = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}H} \tag{5}$$

als **differentielle Permeabilität.** Sie ist für alle Wechselvorgänge von Interesse.
Die ferromagnetischen Eigenschaften treten nur unterhalb einer bestimmten Temperatur, dem **Curie-Punkt** Θ, auf. Oberhalb ihres CURIE-Punktes verhalten sich ferromagnetische Stoffe paramagnetisch. Ihre Suszeptibilität wird dann durch das **Curie-Weißsche Gesetz**

$$\boxed{\varkappa = \frac{C}{T - \Theta}} \tag{6}$$

bestimmt. Paramagnetische Substanzen unterscheiden sich hiernach von den ferromagnetischen lediglich dadurch, daß ihr CURIE-Punkt am absoluten Nullpunkt liegt. Der CURIE-Punkt kennzeichnet dabei die Temperatur, oberhalb der das äußere Feld nur ein geringfügiges Ausrichten der Elementarmagnete gegen die Wärmebewegung erzwingen kann.
Das starke Anwachsen der magnetischen Suszeptibilität nach Unterschreiten der CURIE-Temperatur zeigt, daß bei der Magnetisierung nicht einzelne freibewegliche Magnete ausgerichtet werden, sondern daß es sich um eine Gruppenerscheinung handelt. Jede dieser Gruppen, die als WEISSsche Bezirke oder auch als Domänen bezeichnet werden, besteht aus in sich gleichgerichteten Elementarmagneten. In einem WEISSschen Bezirk ist das ferromagnetische Material auch bei Abwesenheit äußerer Felder bis zur Sättigung magnetisiert, d. h., sämtliche Elementarmagnete des Bezirks sind gleichgerichtet.
Antiferromagnetische Stoffe, wie MnO, MnF_2, α-Fe_2O_3, bestehen aus Ionen. Sie sind derart angeordnet, daß benachbarte Ionenpaare antiparallele Spinrichtungen haben. Man kann sich daher das Kristallgitter aus zwei ferromagnetischen Untergittern

zusammengesetzt denken, die entgegengesetzte Spins aufweisen. Diese Stoffe sind nach außen hin diamagnetisch. Nach Überschreiten einer der CURIE-Temperatur entsprechenden Temperatur zeigen sie wie ferromagnetische Substanzen oberhalb des CURIE-Punktes paramagnetisches Verhalten.
Bei **ferrimagnetischen Substanzen** oder **Ferriten** sind die Untergitter nicht gleich besetzt. Daher überwiegt eine Magnetisierungsrichtung. Derartige Stoffe, z. B. Eisen-Nickel-, Manganoxid, zeigen daher ferromagnetische Eigenschaften, jedoch ist ihre Sättigungsmagnetisierung kleiner, als es dem Gesamtmoment ihrer Ionen entspricht.



Probleme

2.3.1. Steighöhenmethode zur Bestimmung der Suszeptibilität

Zwischen die Polschuhe eines Elektromagneten wird ein Schenkel eines mit flüssigem Sauerstoff gefüllten Rohres gebracht (vgl. Bild 2.18). Die Steighöhe in diesem Schenkel beträgt $h = 2{,}0$ mm.

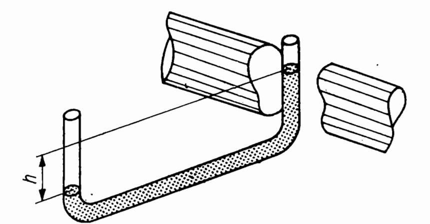


Bild 2.18. Steighöhenmethode

Das Magnetfeld zwischen den Polschuhen hat die Stärke $H = 10^5$ A m^{-1}. Berechnen Sie daraus die magnetische Suszeptibilität $\varkappa$ des flüssigen Sauerstoffes (Dichte $\varrho = 1{,}118$ g cm^{-3}).

Lösung

Die Energiedichte des Magnetfeldes im leeren Raum ist gleich

$$w_{\mathrm{m}}(\mu_0) = \frac{1}{2}\,\mu_0\mathfrak{H}^2,$$

im Raum der Permeabilität μ dagegen

$$w_{\mathrm{m}}(\mu) = \frac{1}{2}\,\mu\mathfrak{H}^2.$$

Steigt die Flüssigkeit um dh, so ist demzufolge die Energie

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\,(\mu - \mu_0)\,\mathfrak{H}^2 r^2\pi\,\mathrm{d}h \tag{1}$$

aufzuwenden. Steht die Flüssigkeit bereits auf der Höhe h und soll um dh weiter angehoben werden, so ist dazu die potentielle Energie

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{pot}} = mg\,\mathrm{d}h = r^2\pi h\varrho g\,\mathrm{d}h \tag{2}$$

erforderlich. Das Gleichsetzen dieser beiden Ausdrücke liefert

$$\frac{1}{2}(\mu - \mu_0)\,\mathfrak{H}^2 = h\varrho g \tag{3}$$

bzw. als Steighöhe

$$h = \frac{(\mu - \mu_0)\,\mathfrak{H}^2}{2\varrho g} = \frac{\varkappa}{2\varrho g}\,\mu_0\mathfrak{H}^2. \tag{4}$$

Für die Suszeptibilität folgt damit die Gleichung

$$\varkappa = \frac{2\varrho g h}{\mu_0\mathfrak{H}^2}. \tag{5}$$

Mit den vorgegebenen Zahlen erhalten wir

$$\varkappa = \frac{2 \cdot 1{,}118 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{10}} = 0{,}0035.$$

2.3.2. Magnetisierungsenergie

Eine Speicherzelle mit dem Volumen $V = 10^{-16}$ m^3 wird durch ein äußeres Feld ummagnetisiert und anschließend durch einen entgegengerichteten Impuls wieder in den Ausgangszustand gebracht. Dabei wird die äußerste Hysteresisschleife einmal durchlaufen (vgl. Bild 2.17). Berechnen Sie die Energie, die hierbei irreversibel aufzuwenden ist. Die Hysteresisschleife ist durch ein Rechteck zu nähern, dessen Ausdehnung durch die Koerzitivfeldstärke und die Sättigungsmagnetisierung bestimmt wird. Als Sättigungsmagnetisierung ist $M_S = 2{,}0$ Vs m^{-2}, als Koerzitivfeldstärke $H_c = 5 \cdot 10^4$ A m^{-1} einzusetzen.

Lösung

Nach (1.4./21) ändert sich die Energiedichte bei der Magnetisierung um

$$\mathrm{d}w_m = \mathfrak{H} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{B}. \tag{1}$$

Bei einmaligem Durchlaufen der Hysteresisschleife erhält man daraus für die aufzuwendende Energie

$$W_m = V \oint \mathfrak{H} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{B}. \tag{1a}$$

Gemäß (2.3./1) schreiben wir

$$\mathrm{d}\mathfrak{B} = \mu_0\,\mathrm{d}\mathfrak{H} + \mathrm{d}\mathfrak{M}. \tag{2}$$

Damit folgt aus (1)

$$\oint \mathfrak{H} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{B} = \mu_0 \oint \mathfrak{H} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{H} + \oint \mathfrak{H} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{M}. \tag{3}$$

Das erste Umlaufintegral verschwindet. Das zweite ist gleich der von der Hysteresisschleife eingeschlossenen Fläche:

$$\oint \mathfrak{H}\,\mathrm{d}\mathfrak{M} = \oint \mathfrak{H}\,\mathrm{d}\mathfrak{B} = \frac{W_m}{V}. \tag{4}$$

Bei Annäherung durch das Rechteck aus Sättigungsmagnetisierung und Koerzitivfeldstärke ergibt sich aus (3)

$$V \oint \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{B} = V \oint \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{M} = 10^{-16} \cdot 2 \cdot 2{,}0 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10^{4}\,\mathrm{J} = 4 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{J}.$$

2.3.3. Richardson—Einstein—de-Haas-Effekt (Gyromagnetischer Effekt)

Nach dem Modell der klassischen Physik ist der Magnetismus auf Elementarströme, d. h. auf kreisende Elektronen, zurückzuführen. Bei der Magnetisierung werden diese gleichgerichtet. Die Magnetisierung oder Entmagnetisierung eines Stoffes muß demzufolge mit einem mechanischen Drehimpuls verknüpft sein. Berechnen Sie diesen nach der klassischen Atomtheorie.

Lösung

Ein Elektron e^- umfahre mit der Geschwindigkeit v eine Kreisbahn vom Radius r. Das entspricht dem Strom

$$I = \frac{ev}{2\pi r} \tag{1}$$

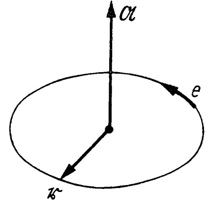


Bild 2.19. Umlaufendes Elektron

(vgl. Bild 2.19). Das magnetische Moment dieses Kreisstroms ist gleich

$$\mathfrak{m} = \mu_0 I \mathfrak{A} = \mu_0 \frac{e}{2} \mathfrak{v} \times \mathfrak{r}, \tag{2}$$

wobei $\mathfrak{A}$ den Kreisflächenvektor angibt. Durch das kreisende Elektron (Masse m_e) entsteht der Drehimpuls

$$\mathfrak{l} = m_e \mathfrak{r} \times \mathfrak{v}. \tag{3}$$

Das magnetische Moment und der erzeugte Drehimpuls sind somit durch die Formel

$$\mathfrak{m} = -\mu_0 \frac{e}{2m_e} \mathfrak{l} \tag{4}$$

miteinander verknüpft.
Zur experimentellen Messung (vgl. Bild 2.20) hängt man einen Eisenstab in eine Spule und schickt durch diese den aperiodischen Entladungsstrom eines Kondensators. Nach der Entladung geht die Magnetisierung $\mathfrak{M}$ nicht wieder auf Null zurück. Infolge der Remanenz bleiben im Mittel N Bahnvektoren der Elektronenbahnen in der Magnetisierungsrichtung. Der Stab behält somit die Magnetisierung

$$\mathfrak{M}_R = N\mathfrak{m}. \tag{5}$$

Die Änderung des Drehimpulses ist gleich

$$\Delta \mathfrak{L} = N\mathfrak{l}. \tag{6}$$

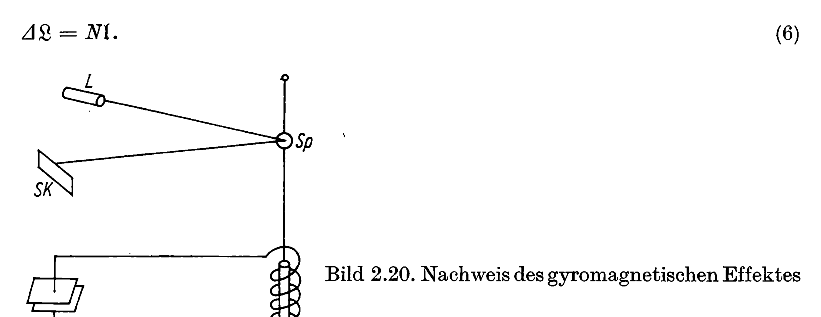


Bild 2.20. Nachweis des gyromagnetischen Effektes

Sie kann aus der erzeugten Drehschwingung des Eisenstabes, in die die mechanischen Größen der Anordnung eingehen, gemessen werden. Andererseits kann die remanente Magnetisierung $\mathfrak{M}_R$ experimentell bestimmt werden. Aus dem Verhältnis beider Meßwerte folgt nach (5) und (6), wenn man (3) und (4) berücksichtigt,

$$\frac{|\mathfrak{M}_R|}{|\Delta \mathfrak{l}|} = \frac{N\,|\mathfrak{m}|}{N\,|\mathfrak{l}|} = -\frac{\mu_0 e}{2m}. \tag{7}$$

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt

$$\frac{|\mathfrak{M}_R|}{|\Delta \mathfrak{l}|} = -\frac{1{,}257 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}60 \cdot 10^{19}}{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}\ \mathrm{A^{-1}\,m\,s^{-1}} = -1{,}105 \cdot 10^{5}\ \mathrm{A^{-1}\,m\,s^{-1}}.$$

Experimentell erhält man dagegen

$$\frac{|\mathfrak{M}_R|}{|\Delta \mathfrak{l}|} = -\frac{\mu_0 e}{m} = -2{,}21 \cdot 10^{5}\ \mathrm{A^{-1}\,m\,s^{-1}}.$$

Aus der größenordnungsmäßigen und qualitativen Übereinstimmung beider Ergebnisse folgt, daß die Elementarmagnete an Drehimpulse gebunden sind und nicht auf elementare Magnetstäbchen im Atom zurückgehen. Andererseits zeigt die Abweichung von der klassischen Theorie, daß weder das elementare magnetische Moment noch der Drehimpuls auf umlaufende Bahnelektronen zurückzuführen sind.
Wie in der Quantentheorie aus optischen Untersuchungen geschlossen wird, haben die Elektronen einen Spin. Sie vollführen eine Kreiselbewegung um die eigene Achse. Hierdurch wird ihnen ein bestimmtes magnetisches Moment und ein bestimmter Drehimpuls erteilt. Das Verhältnis dieser quantentheoretisch zu ermittelnden Größen wird durch die experimentellen Messungen bestätigt.



Aufgaben

A 2.3.1. Wie groß ist die Suszeptibilität einer Flüssigkeit, wenn ein Magnetfeld der Stärke $H = 4 \cdot 10^5\ \mathrm{A\,m^{-1}}$ einen Höhenunterschied im U-Rohr von $h = 5{,}5$ mm erzeugt? Die Dichte der Substanz ist $\varrho = 1{,}1\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$.

A 2.3.2. Eine diamagnetische Flüssigkeit der Suszeptibilität $\varkappa = -5 \cdot 10^{-6}$ wird in ein U-Rohr gebracht. Welche Feldstärke ist erforderlich, um einen Höhenunterschied von $h = 1{,}0$ mm zu erzielen, wenn die Dichte der Flüssigkeit $\varrho = 1{,}4$ g cm^{-3} beträgt?

A 2.3.3. Stellen Sie die Formel für die Steighöhe in einem U-Rohr bei Anwesenheit eines elektrischen Feldes auf.

A 2.3.4. Eine Legierung hat bei 18 °C die magnetische Suszeptibilität $\varkappa = 3{,}3 \cdot 10^{-4}$. Berechnen Sie nach dem CURIEschen Gesetz die Suszeptibilität für -196 °C (CURIE-Temperatur $\Theta = 0$ K).

A 2.3.5. Berechnen Sie aus der Sättigungsmagnetisierung des Eisens das magnetische Moment eines Atoms. Die Sättigungsmagnetisierung beträgt $M_S = 2{,}18$ Vs m^{-2}, die Dichte $\varrho = 7{,}8$ g cm^{-3}, die relative Atommasse $A_r = 55{,}8$.

A 2.3.6. Vergleichen Sie das magnetische Moment eines Eisenatoms mit dem BOHRschen Magneton

$$|\mathfrak{m}_B| = \frac{\mu_0 e h}{4\pi m_e}.$$

A 2.3.7. Die Hysteresisschleife für Schmiedeeisen werde durch ein Rechteck genähert, dessen eine Seite durch die doppelte Koerzitivfeldstärke, dessen andere Seite durch die doppelte Sättigungsmagnetisierung bestimmt ist. Welche Energie ist für einen Umlauf erforderlich? (Masse $m = 1$ kg, Dichte $\varrho = 7{,}8$ g cm^{-3}, Sättigungsmagnetisierung $M_S = 2{,}1$ Vs m^{-2}, Koerzitivfeldstärke $H_c = 2{,}5 \cdot 10^3$ A m^{-1}.)

A 2.3.8. Der CURIE-Punkt des Eisens liegt bei 1043 K. Berechnen Sie die mittlere Wärmeenergie eines Teilchens nach der klassischen Statistik und bestimmen Sie die magnetische Feldstärke H, die zu einer so großen Energie führt, daß sie die Wärmeenergie kompensiert.

2.4. Randwertaufgaben der Magnetostatik

E Einführung

Das Verhalten der elektromagnetischen Größen im Falle des statischen Feldes wird durch die MAXWELLschen Gleichungen (2.1./1)

$$\text{rot}\, \mathfrak{H} = 0 \quad (1), \qquad \text{rot}\, \mathfrak{E} = 0 \quad (1\text{a}),$$

$$\text{div}\, \mathfrak{B} = 0 \quad (2), \qquad \text{div}\, \mathfrak{D} = \varrho \quad (2\text{a})$$

und die Randbedingungen (1.4./12) und (1.4./11)

$$(\mathfrak{H}_I - \mathfrak{H}_{II}) \times \mathfrak{n} = 0 \quad (3), \qquad (\mathfrak{E}_I - \mathfrak{E}_{II}) \times \mathfrak{n} = 0 \quad (3\text{a})$$

sowie (1.4./16) und (1.4./15)

$$(\mathfrak{B}_I - \mathfrak{B}_{II}) \cdot \mathfrak{n} = 0 \quad (4), \qquad (\mathfrak{D}_I - \mathfrak{D}_{II}) \cdot \mathfrak{n} = \sigma \quad (4\text{a})$$

bestimmt. Für $\varrho = 0$, $\sigma = 0$ entsprechen sich somit die Größen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ zur Beschreibung des Feldes einerseits und die Größen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$ zur Charakterisierung des

Mediums andererseits. Man kann daher wegen (1) das skalare magnetische Potential Ψ mittels

$$\mathfrak{H} = -\text{grad}\, \Psi \tag{5}$$

einführen. Durch Übertragung der Formeln (1.2./9) ergibt sich für Ψ die Differentialgleichung

$$\boxed{\triangle \Psi = 0}\,. \tag{6}$$

Die Übertragung der Formeln (1.2./10) und (1.2./11) führt für das magnetische Potential auf die Randbedingungen

$$(\Psi_{\text{I}})_{\text{Rand}} = (\Psi_{\text{II}})_{\text{Rand}}, \tag{7}$$

$$\mu_{\text{I}} \left(\frac{\partial \Psi_{\text{I}}}{\partial n}\right)_{\text{Rand}} = \mu_{\text{II}} \left(\frac{\partial \Psi_{\text{II}}}{\partial n}\right)_{\text{Rand}}. \tag{8}$$

Infolge der Analogie zwischen den elektrischen und den magnetischen Größen können die in den Abschnitten 2.1. und 2.2. dargelegten Methoden auf die Magnetostatik übertragen werden.
Für die magnetostatische Betrachtung sind auf Grund der technischen Anwendung besonders **homogene Felder** von Interesse. Bei homogenen Feldern laufen die Feldlinien parallel. Wird ein Ellipsoid (Grenzfälle: Kugel, Zylinder bzw. zylindrischer Stab, Scheibe) in ein homogenes Feld gebracht, so bildet sich auch in diesem Körper ein homogenes Feld aus. Es hat die Stärke H_{i}, die im allgemeinen von der Stärke H_{a} des äußeren Feldes abweicht. Der Zusammenhang zwischen den beiden Feldgrößen wird bei homogenen Feldern in der Form

$$\mathfrak{H}_{\text{i}} = \frac{\mathfrak{H}_{\text{a}}}{1 + N(\mu_{\text{rel}} - 1)} \tag{9}$$

dargestellt. N wird als **Entmagnetisierungsfaktor** bezeichnet. Er ist von der Geometrie des eingeschlossenen Ellipsoids und von der Richtung des äußeren Feldes abhängig (vgl. 2.4.2./18). Die Größe

$$\mu_{\text{rel}} = \frac{\mu_{\text{i}}}{\mu_{\text{a}}} \tag{10}$$

gibt die Permeabilität des eingeschlossenen Mediums relativ zur Permeabilität des umgebenden Mediums an.
Ist das umgebende Medium Vakuum, so kann man

$$\mu_{\text{rel}} = \mu_{\text{ri}} = \frac{\mu_{\text{i}}}{\mu_0} \tag{11}$$

schreiben. Für die Feldstärke im eingeschlossenen Medium erhält man dann

$$\mathfrak{H}_i = \mathfrak{H}_a - N \frac{\mathfrak{M}_i}{\mu_0}, \tag{12}$$

wobei

$$\mathfrak{M}_i = \mu_0(\mu_{ri} - 1)\, \mathfrak{H}_i \tag{13}$$

die Magnetisierung des eingeschlossenen Mediums angibt. Auf Grund dieses Zusammenhanges wird N Entmagnetisierungsfaktor genannt.
Ersetzt man für den Fall, daß das umgebende Medium Vakuum ist, die relative Permeabilität durch die Suszeptibilität, so folgt aus (9)

$$\boxed{\mathfrak{H}_i = \frac{\mathfrak{H}_a}{1 + N\varkappa}}. \tag{14}$$

Für das Rotationsellipsoid mit der **numerischen Exzentrizität** ε hat der Entmagnetisierungsfaktor den Wert (vgl. 2.4.2.)

$$N = \frac{1 - \varepsilon^2}{\varepsilon^3}\left(\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} - \varepsilon\right). \tag{15}$$

Bei der homogenen Kugel ergibt sich daraus durch Reihenentwicklung für den Grenzfall $\varepsilon \to 0$ der Entmagnetisierungsfaktor $N = 1/3$. Der Entmagnetisierungsfaktor wird sinnvoll nur für das homogene Feld des Ellipsoids und seiner Ausartungen Kugel, Stab, Scheibe angewandt. In allen anderen Fällen ergeben sich innerhalb des betrachteten Körpers inhomogene Felder.
Die aufgeführten Formeln für den Entmagnetisierungsfaktor N gelten unter der Voraussetzung eines Magnetisierungsgesetzes nach (3.1./1)

$$\mathfrak{B} = \mu_0\mathfrak{H} + \mathfrak{M}.$$

In einer Reihe von Lehrbüchern wird die Magnetisierung durch

$$\mathfrak{B} = \mu_0\mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{M}'$$

definiert. In diesem Falle ergibt sich ein Entmagnetisierungsfaktor N', der mit N durch die Gleichung

$$N' = 4\pi N$$

zusammenhängt. Für die Suszeptibilität besteht die Umrechnungsformel

$$\varkappa' = \frac{\varkappa}{4\pi}.$$



Probleme

2.4.1. Entmagnetisierungsfaktor einer homogenen Kugel

Berechnen Sie den Entmagnetisierungsfaktor N einer Kugel unter der Voraussetzung, daß die Kugel völlig homogen ist. Wie groß ist die Feldstärke in der Kugel, wenn diese die relative Permeabilität $\mu_r = 75000$ (Sättigungsmagnetisierung für Mo-Permalloy) besitzt. Die Außenfeldstärke ohne Kugel beträgt $H_a = 10^4$ A m^{-1}. Das Außenmedium sei Vakuum.

Lösung

Wir übertragen die Formeln aus 2.1.5. auf das Magnetfeld und erhalten nach Formel (2.1.5./12) für das homogene Feld in der Kugel

$$\mathfrak{H}_i = \frac{3\mu_a}{\mu_i + 2\mu_a}\,\mathfrak{H}_a = \frac{3}{\mu_{rel} + 2}\,\mathfrak{H}_a. \tag{1}$$

Dabei ist

$$\mu_{rel} = \frac{\mu_i}{\mu_a} \tag{2}$$

die relative Permeabilität des Innenmediums gegen das Außenmedium. Zur Bestimmung des Entmagnetisierungsfaktors N schreiben wir nach (2.4./9)

$$\mathfrak{H}_i = \frac{\mathfrak{H}_a}{1 + N(\mu_{rel} - 1)}. \tag{3}$$

(1) umgeformt liefert

$$\mathfrak{H}_i = \frac{\mathfrak{H}_a}{1 + \frac{1}{3}(\mu_{rel} - 1)}. \tag{4}$$

Aus dem Vergleich von (3) und (4) ergibt sich

$$N = \frac{1}{3}.$$

Mit den vorgegebenen Zahlen erhalten wir aus (3)

$$|\mathfrak{H}_i| = \frac{10000 \cdot \mathrm{Am^{-1}}}{1 + \frac{1}{3}(75000 - 1)} = 0{,}40\ \mathrm{Am^{-1}}.$$

Innerhalb der Kugel ist also nur ein schwaches Feld festzustellen.

2.4.2. Magnetfeld in einem Rotationsellipsoid

Berechnen Sie das Magnetfeld in einem Rotationsellipsoid mit den Halbachsen $a_0 = b_0 = 4$ cm, $c_0 = 10$ cm. Die relative Permeabilität des Mediums gegen das Außenmedium beträgt $\mu_r = 125$.

Das Außenfeld verläuft parallel zur großen Achse und hat die Stärke $H_a = 10 \text{ A m}^{-1}$.

Lösung

Wir führen rotationselliptische Koordinaten u, v, φ ein. Sie sind mit den Cartesischen Koordinaten x, y, z gemäß

$$\left.\begin{aligned} x &= c \sinh u \sin v \cos \varphi, \\ y &= c \sinh u \sin v \sin \varphi, \\ z &= c \cosh u \cos v \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

verknüpft. Die elliptische Koordinate u ist mit x, y, z durch die Gleichung

$$\frac{x^2 + y^2}{c^2 \sinh^2 u} + \frac{z^2}{c^2 \cosh u^2} = 1 \tag{1a}$$

verbunden. $u = u_0$ stellt nach (1a) ein Rotationsellipsoid dar, für das $a_0 = b_0 = c \sinh u_0$, $c_0 = c \cosh u_0$, $c = \sqrt{c_0^2 - a_0^2}$ gilt.
Wir rechnen die Potentialgleichung $\triangle \Phi = 0$ in u, v, φ-Koordinaten um, wobei wir Beziehungen der Form

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \ldots$$

benutzen. Es folgt bei Unabhängigkeit von der zyklischen Koordinate φ

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\sinh u \sin v \, \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\sinh u \sin v \, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) = 0. \tag{2}$$

Als Lösung dieser Gleichung für den Innenraum schreiben wir

$$\Phi_i = C_i z = C_i \cosh u \cos v. \tag{3}$$

Im Außenraum gehen wir von dem Ansatz

$$\Phi_a = C_a \cosh u \cos v + f(u) \cos v \tag{4}$$

aus. Das Feld im Außenraum setzt sich also aus der Überlagerung eines homogenen Feldes und eines durch das Ellipsoid verursachten Störfeldes zusammen.
Wir setzen (4) in (2) ein und erhalten für $f(u)$ die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \left[\sinh u \, \frac{\mathrm{d}f(u)}{\mathrm{d}u} - 2 \sinh u \, f(u) \right] = 0. \tag{5}$$

Mit dem Ansatz

$$f(u) = \cosh u \, g(u) \tag{6}$$

ergibt sich aus (5)

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}u^2} + \frac{3 \sinh^2 u + 1}{\sinh u \cosh u} \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}u} = 0. \tag{7}$$

Diese Gleichung hat die Lösung

$$g(u) = \frac{A}{2} \left(\ln \frac{\cosh u - 1}{\cosh u + 1} + \frac{2}{\cosh u} \right) + B. \tag{8}$$

Hierin kann man $B = 0$ setzen. Für das Potential des Außenraumes folgt

$$\Phi_a = A\left(1 + \frac{\cosh u}{2} \ln \frac{\cosh u - 1}{\cosh u + 1}\right) \cos v + C_a \cosh u \cos v. \tag{9}$$

C_a ist als vorgegeben zu betrachten.
An der Oberfläche des Ellipsoids bestehen die Randbedingungen

$$\Phi_i = \Phi_a, \qquad \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = \mu_r \frac{\partial \Phi_a}{\partial n} \qquad \text{mit} \qquad \mu_r = \frac{\mu_i}{\mu_a}. \tag{10}$$

Die Ableitung in Richtung der Oberflächennormalen $\mathfrak{n}$ ist identisch mit der Ableitung in Richtung des Linienelementes $\mathrm{d}s_n$. Das allgemeine Linienelement $\mathrm{d}s$ im u, v, φ-Raum ist durch

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = (\cosh^2 u - \cos^2 v)(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2) + \sinh^2 u \sin^2 v \, \mathrm{d}\varphi^2 \tag{11}$$

bestimmt. Für festes v und festes φ erhält man aus (11) als Linienelement der u-Linien

$$\mathrm{d}s_u = \sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v} \, \mathrm{d}u. \tag{12}$$

Die Übergangsbedingungen (10) ergeben damit für $u = u_0$ das Gleichungssystem

$$A\left(\frac{1}{\cosh u_0} + \frac{1}{2} \ln \frac{\cosh u_0 - 1}{\cosh u_0 + 1}\right) - C_i = -C_a, \tag{13}$$

$$A\left(\frac{\cosh u_0}{\sinh^2 u_0} + \frac{1}{2} \ln \frac{\cosh u_0 - 1}{\cosh u_0 + 1}\right) - \mu_r C_i = 0. \tag{14}$$

Seine Lösung lautet

$$C_i = \frac{C_a}{1 - (\mu_r - 1) \sinh^2 \mu_0 \left(1 + \frac{1}{2} \cosh u_0 \ln \frac{\cosh u_0 - 1}{\cosh u_0 + 1}\right)}, \tag{15}$$

$$A = \cosh u_0 \sinh^2 u_0 (\mu_r - 1) C_i. \tag{16}$$

Führt man die **numerische Exzentrizität**

$$\varepsilon = \frac{c}{c_0} = \frac{c}{c \cosh u_0} = \frac{1}{\cosh u_0} \tag{17}$$

ein, (c und c_0 wie in (1a)), so folgt aus (15),

$$C_i = \frac{C_a}{1 + (\mu_r - 1) \frac{1 - \varepsilon^2}{\varepsilon^3} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} - \varepsilon\right)}. \tag{18}$$

Wie aus (3) und (4) zu entnehmen ist, gibt C_i/C_a das Verhältnis zwischen dem homogenen Feld innerhalb und dem homogenen Feldanteil außerhalb des Ellipsoids an. Dafür ergibt sich nach

(17) und (18)

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{100 - 16}}{10} = 0{,}917\,,$$

$$\frac{C_i}{C_a} = \frac{1}{1 + 124\,\dfrac{0{,}16}{0{,}917}\left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1{,}917}{0{,}083} - 0{,}917\right)} = 0{,}066\,.$$

Dem homogenen Feld im Außenraum von 10 A m^{-1} entspricht im Innern des Ellipsoids ein Feld der Stärke 0,66 A m^{-1}.

2.4.3. Magnetfeld in einem Kreiszylinder

Berechnen Sie das Magnetfeld in einem dünnen Kreiszylinder. Das Feld im umgebenden Medium ist parallel zur Zylinderachse gerichtet. Welchen Wert hat der Entmagnetisierungsfaktor N?

Lösung

Wir gehen von (2.4.2./15) und (2.4.2./16) aus. Das durch (2.4.2./1a) für $u = u_0$ festgelegte Ellipsoid entartet in einen Kreiszylinder, wenn der Grenzübergang $\varepsilon \to 1$ bzw. $u_0 \to 0$ durchgeführt wird. Aus (2.4.2./18) erhält man für

$$\delta = 1 - \varepsilon \to 0$$

das Verhältnis der Feldstärken außerhalb und innerhalb des Zylinders

$$\frac{C_a}{C_i} = 1 + \varkappa\delta\left(\ln\frac{2}{\delta} - 2\right). \tag{1}$$

Der natürliche Logarithmus $\ln\delta$ strebt schwächer einem Grenzwert zu als jede Potenz δ^n. Es folgt daher

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{C_a}{C_i} = 1\,. \tag{2}$$

In einem dünnen Stab gilt somit

$$H_i = H_a\,. \tag{3}$$

Das Innenfeld ist unabhängig vom Medium gleich dem homogenen Außenfeld. Auf Grund der Gleichung (2.4./9) folgt hieraus für den Entmagnetisierungsfaktor

$$N = 0\,. \tag{4}$$

2.4.4. Homogenes Magnetfeld in einem Hohlraum

In Texturisoperm, das die relative Permeabilität $\mu_{ar} = 125$ besitzt, befindet sich ein kugelförmiger Hohlraum mit der relativen Permeabilität $\mu_{ir} = 1$. Das homogene Magnetfeld im Isoperm hat die Stärke $H_a = 1\,000$ A m^{-1}. Wie groß ist die Feldstärke im Hohlraum?

Lösung

Nach (2.4./9) ist das homogene Magnetfeld in der Kugel durch

$$H_i = \frac{H_a}{1 + N(\mu_{rel} - 1)} \tag{1}$$

bestimmt. Im vorliegenden Fall ist

$$\mu_{\text{rel}} = \frac{\mu_{\text{ir}}}{\mu_{\text{ar}}} = \frac{1}{125}. \tag{2}$$

Der Entmagnetisierungsfaktor N hat nach (2.4.1./5) für die Kugel den Wert 1/3. Somit erhalten wir

$$H_{\text{i}} = \frac{1000}{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{125}} \text{ A m}^{-1} = 997{,}4 \text{ A m}^{-1}.$$

Das homogene Feld des Innenraumes hat praktisch die gleiche Intensität wie das ungestörte homogene Feld des Außenraumes.



Aufgaben

A 2.4.1. Eine Kugel der relativen Permeabilität $\mu_{\text{r}} = 10000$ (Sättigungsmagnetisierung von Hyperm 20) wird in ein homogenes Feld der Stärke $H_{\text{a}} = 20000 \text{ A m}^{-1}$ gebracht. Wie groß ist das Feld H_{i} in der Kugel?

A 2.4.2. Im Außenfeld liege die Feldstärke $H_{\text{a}} = 1000 \text{ A m}^{-1}$ vor. Das Außenmedium sei Luft. Wie groß ist das Feld in einer homogenen Kugel mit der Suszeptibilität $\varkappa = 10^{-3}$?

A 2.4.3. Bestimmen Sie aus dem Feld eines Rotationsellipsoids durch Grenzübergang den Entmagnetisierungsfaktor eines homogenen Vollzylinders, wenn die Magnetisierung senkrecht zur Zylinderachse erfolgt.

A 2.4.4. Wie groß ist das Magnetfeld in einem langgestreckten zylindrischen Hohlraum (Vakuum), wenn das homogene Feld im umgebenden Medium senkrecht zur Zylinderachse gerichtet ist und die Stärke $H_{\text{a}} = 10000 \text{ A m}^{-1}$ hat? Die relative Permeabilität des umgebenden Mediums sei gleich $\mu_{\text{ar}} = 10000$.

A 2.4.5. Berechnen Sie durch Grenzübergang aus einem Ellipsoid den Entmagnetisierungsfaktor einer flachen Scheibe bei Magnetisierung senkrecht und parallel zur Plattenebene.

A 2.4.6. Eine flache Scheibe der relativen Permeabilität $\mu_{\text{ri}} = 1000$ befindet sich in einem homogenen Magnetfeld der Stärke $H_{\text{a}} = 20000 \text{ A m}^{-1}$. Wie groß ist das Feld in der Scheibe, wenn diese so gedreht wird, daß
a) die Feldlinien parallel zur Scheibe verlaufen, b) die Feldlinien senkrecht zur Scheibenebene stehen?

A 2.4.7. Berechnen Sie den Entmagnetisierungsfaktor eines Rotationsellipsoids mit den folgenden Halbachsen: $a_0 = b_0 = 8$ cm, $c_0 = 15$ cm. Das homogene Außenfeld verläuft parallel zur Rotationsachse.

A 2.4.8. Im Zentrum einer großen Kugel aus Supermalloy ($\mu_{\text{r}} = 900000$) befindet sich ein kleinerer kugelförmiger Hohlraum. Außerhalb der massiven Kugel beträgt die Feldstärke $H = 10^6 \text{ A m}^{-1}$. Wie groß ist die Feldstärke in der kleinen Hohlkugel, wenn man annimmt, daß diese den Übergang der Feldlinien aus dem Außenraum in die massive Kugel nicht stört?

A 2.4.9.** Stellen Sie die Formel für das homogene Feld H_{i} im Innern einer Kugelschale auf, die in ein äußeres homogenes Feld der Stärke H_{a} gebracht wird. Berechnen Sie

das Feld H_i für $H_a = 1000\,\mathrm{A\,m^{-1}}$, $R_i = 9{,}9\,\mathrm{cm}$, $R_a = 10{,}0\,\mathrm{cm}$, $\mu_r = 100000$ (Permalloy).

A 2.4.10.* In einem inhomogenen Magnetfeld der Form $\mathfrak{H} = H_0 f(x)\mathfrak{i}$ mit $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} > 0$ befinden sich para- und diamagnetische Stoffe kleiner Ausdehnung. Berechnen Sie die resultierende Kraft auf diese und leiten Sie daraus ihr Verhalten im inhomogenen Feld her.

A 2.4.11. Berechnen Sie die Inklination der Magnetnadel als Funktion der geographischen Breite, wenn die Erde als gleichmäßig magnetisierte Kugel aufgefaßt und die Mißweisung der Magnetnadel vernachlässigt wird.

3. Der stationäre Strom und sein Magnetfeld

3.1. Das Magnetfeld homogener Leiter, in Stromschleifen und Spulen

E Einführung

Die MAXWELLsche Theorie stationärer Felder untersucht Vorgänge, bei denen sich das Feld zeitlich nicht ändert. Sämtliche Ableitungen nach der Zeit sind gleich Null:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0.$$

Im Gegensatz zur Elektrostatik werden **Gleichströme** zugelassen. Die Stromdichte ist konstant, jedoch nicht gleich Null. Aus 1.4. erhält man bei stationären Feldern das folgende System der MAXWELLschen Gleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{E} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathfrak{H} &= \mathfrak{J}, \\ \operatorname{div} \mathfrak{D} &= \varrho, \\ \operatorname{div} \mathfrak{B} &= 0. \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &(1) \\ &(2) \\ &(3) \\ &(4) \end{aligned}$$

Zu seiner Lösung werden das **skalare Potential** Φ und das **Vektorpotential** $\mathfrak{A}$ eingeführt. Aus Gleichung (1) folgt wie im statischen Falle die Existenz eines skalaren Potentials Φ zur Darstellung der elektrischen Feldstärke:

$$\boxed{\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \Phi}. \qquad (5)$$

Gleichung (4) gestattet es, die magnetische Flußdichte $\mathfrak{B}$ aus einem Vektorpotential $\mathfrak{A}$ abzuleiten:

$$\boxed{\mathfrak{B} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}}. \qquad (6)$$

Zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ besteht die Verknüpfung

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}.$$

Man kann daher die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ mittels

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathfrak{A} \tag{7}$$

durch das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ ausdrücken.
Für ein einheitliches Medium ergibt sich aus (2) in Verbindung mit dem Ansatz (7)

$$\mu \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = \mu \mathfrak{J}. \tag{8}$$

Wendet man die Operatorenbeziehung $\triangle = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \operatorname{rot} \operatorname{rot}$ an (vgl. A 1.3.6.), so folgt aus (8)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{A} - \triangle \mathfrak{A} = \mu \mathfrak{J}. \tag{9}$$

Bei vorgegebener magnetischer Flußdichte $\mathfrak{B}$ ist das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ nur bis auf den Gradienten einer beliebigen Ortsfunktion $f = f(\mathfrak{r})$ bestimmt: Wird die Beziehung (6) von einer Vektorfunktion $\mathfrak{A}_0(\mathfrak{r})$ erfüllt, so wird sie auch von der Vektorfunktion

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{r}) = \mathfrak{A}_0(\mathfrak{r}) + \operatorname{grad} f(\mathfrak{r}) \tag{10}$$

erfüllt. Das folgt aus der allgemeingültigen Gleichung

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f(\mathfrak{r}) = 0.$$

Mit

$$\mathfrak{B} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}_0(\mathfrak{r})$$

wird daher auch die Beziehung

$$\mathfrak{B} = \operatorname{rot} [\mathfrak{A}_0(\mathfrak{r}) + \operatorname{grad} f(\mathfrak{r})]$$

befriedigt. Ist demzufolge eine beliebige Lösung $\mathfrak{A}_0(\mathfrak{r})$ der Gleichung (6) bekannt, so kann die Ortsfunktion $f = f(\mathfrak{r})$ derart festgelegt werden, daß sie die Bedingungsgleichung

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f(\mathfrak{r}) = -\operatorname{div} \mathfrak{A}_0(\mathfrak{r}) \tag{11}$$

erfüllt. Für das Vektorpotential $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathfrak{r})$ nach (10) ergibt sich damit

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \operatorname{div} (\mathfrak{A}_0 + \operatorname{grad} f) = 0. \tag{12}$$

Hat man eine Funktion $f(\mathfrak{r})$ mit der geforderten Eigenschaft (11) bestimmt, so erhält man anstelle der komplizierten Gleichung (9)

$$\boxed{\triangle \mathfrak{A} = -\mu \mathfrak{J}} \tag{13}$$

als Differentialgleichung des Vektorpotentials $\mathfrak{A}$. Diese stimmt mit der **Poissonschen Gleichung** (2.1./6) überein.
Als Lösung der Gleichung (13) im Punkte P_0 erhält man analog (2.1./8)

$$\mathfrak{A}(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_V \frac{\mu \mathfrak{J}(P)\, \mathrm{d}V(P)}{r_{PP0}}. \tag{14}$$

P durchläuft bei der Integration alle Punkte des Volumens V.

Beispiel 7

Es ist das **Magnetfeld eines stromdurchflossenen geraden Leiters** aus seinem Vektorpotential zu bestimmen. Die Stromstärke sei I.

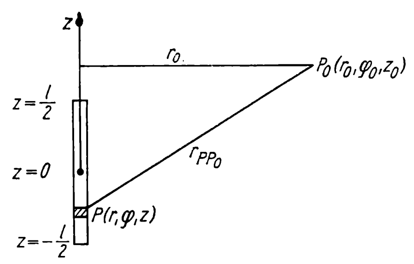


Bild 3.1. Zum Magnetfeld eines geraden Leiterstücks der Länge l

Zur Lösung dieser Aufgabe wird die Richtung des elektrischen Stromes als z-Achse gewählt. Es gilt somit $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_z \mathfrak{e}_z$. Ferner ist $J\,\mathrm{d}V = I\,\mathrm{d}z$. Für ein endlich langes Leiterstück der Länge l kann man den Koordinatenanfangspunkt in die Mitte des Leiters legen (vgl. Bild 3.1). Es seien r_0, φ_0, z_0 die Zylinderkoordinaten des Punktes P_0, in dem das Feld bestimmt werden soll. Die Punkte P des Integrationsgebietes werden durch die Zylinderkoordinaten r, φ, z dargestellt. Nach (14) erhält man damit als einzige Komponente des Vektorpotentials

$$\mathfrak{A}_z = \frac{\mu I}{4\pi} \int\limits_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(z - z_0)^2 + r_0^2}}. \tag{15}$$

Dieses Integral wird mit Hilfe der Substitution $\zeta = z - z_0$ umgeformt:

$$\mathfrak{A}_z = \frac{\mu I}{4\pi} \int\limits_{-\frac{l}{2} - z_0}^{\frac{l}{2} - z_0} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + r_0^2}}. \tag{16}$$

Zur Berechnung des Magnetfeldes ist es nicht erforderlich, dieses Integral auszuwerten. Nach (7) und (1.3./7a) erhält man durch Differentiation

$$\mathfrak{H}_\varphi = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial r_0} = \frac{I r_0}{4\pi}\int\limits_{-\frac{l}{2}-z_0}^{\frac{l}{2}-z_0} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + r_0^2}^3}. \tag{17}$$

Die anderen beiden Zylinderkomponenten sind gleich Null. Aus (17) folgt, wenn man nunmehr integriert,

$$\mathfrak{H}_\varphi = \frac{I}{4\pi r_0}\left[\frac{\frac{l}{2} - z_0}{\sqrt{\left(\frac{l}{2} - z_0\right)^2 + r_0^2}} + \frac{\frac{l}{2} + z_0}{\sqrt{\left(\frac{l}{2} + z_0\right)^2 + r_0^2}}\right]. \tag{18}$$

Im Grenzfall eines unendlich langen Leiters ergibt sich für das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ nach (16) ein unbestimmter Ausdruck. Dagegen erhält man aus (18) durch Grenzübergang $l \to \infty$ für die magnetische Feldstärke in der Umgebung eines unendlich langen stromdurchflossenen Drahtes

$$\lim_{l\to\infty} \mathfrak{H}_\varphi = \frac{I}{2\pi r_0}. \tag{19}$$

Wie man aus dieser Ableitung entnimmt, ist es nicht immer zweckmäßig, das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ direkt zu berechnen. In zahlreichen Fällen ergeben sich die magnetischen Feldkomponenten auch, wenn das Vektorpotential selbst in einen unbestimmten Ausdruck übergeht.

Aus der Lösung (14) für die Poissonsche Gleichung (13) läßt sich das **Biot-Savartsche Gesetz** ableiten (vgl. Bild 3.2). Es gilt für linienförmige Leiter und Strombahnen.

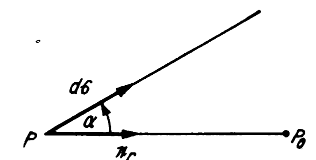


Bild 3.2. Zum magnetischen Feld eines Stromelements $I\,\mathrm{d}\mathfrak{s}(P)$ im Punkt P_0

Aus dem Leiter wird ein Linienelement $\mathrm{d}\mathfrak{s} = \mathrm{d}\mathfrak{s}(P)$ herausgegriffen. Sein Beitrag zum Vektorpotential ist durch $\mathfrak{J}\,\mathrm{d}V = I\,\mathrm{d}\mathfrak{s}$ bestimmt, wobei I die Stromstärke im Leiterelement bezeichnet. Für den Beitrag des herausgegriffenen Stromelementes $I\,\mathrm{d}\mathfrak{s}$ zum Vektorpotential folgt damit nach (14)

$$\mathrm{d}\mathfrak{A} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\mathfrak{s}}{r}. \tag{20}$$

Der Beitrag zur magnetischen Flußdichte $\mathfrak{B}$ ergibt sich aus (20):

$$\mathrm{d}\mathfrak{B} = \frac{\mu I}{4\pi}\,\mathrm{rot}_{P0}\,\frac{\mathrm{d}\mathfrak{s}}{r} = \frac{\mu I}{4\pi}\,\nabla_{P0} \times \frac{\mathrm{d}\mathfrak{s}}{r}. \tag{21}$$

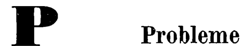
Bei der Rotorbildung ist nur die Größe $r = r_{PP0}$ des Abstandes zwischen P und P_0 zu differenzieren, da das Leiterelement $\mathrm{d}\mathfrak{s}(P)$ nicht vom Aufpunkt P_0 abhängt. Daher erhält man (vgl. 1.2. A 3.)

$$\nabla_{P0} \times \frac{\mathrm{d}\mathfrak{s}}{r} = \nabla_{P0} \frac{1}{r} \times \mathrm{d}\mathfrak{s} = \frac{\mathrm{d}\mathfrak{s} \times \mathfrak{r}}{r^3} = \frac{\mathrm{d}\mathfrak{s} \times \mathfrak{e}_\mathrm{r}}{r^2}, \tag{22}$$

wobei $\mathfrak{e}_\mathrm{r}$ den Einheitsvektor in Richtung $\mathfrak{r}$ angibt.
Setzt man (22) in (21) ein, so folgt das BIOT-SAVARTsche Gesetz in der Form

$$\boxed{\mathrm{d}\mathfrak{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \frac{\mathrm{d}\mathfrak{s} \times \mathfrak{e}_\mathrm{r}}{r^2} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathrm{d}\mathfrak{H} = \frac{I}{4\pi r^2} \mathrm{d}\mathfrak{s} \times \mathfrak{e}_\mathrm{r}}\,. \tag{23}$$

Das BIOT-SAVARTsche Gesetz in der differentiellen Schreibweise (23) kann anschaulich so aufgefaßt werden, daß der gesamte Stromkreis mit Ausnahme des betrachteten Leiterelementes gegen Strahlung nach außen abgeschirmt ist. Die Feldstärke $\mathfrak{B}$ im Punkte P_0 folgt durch Summierung über die von sämtlichen Stromelementen erzeugten differentiellen Felder.



Probleme

3.1.1. Das Magnetfeld der Koaxialleitung (Zylinderkondensator)

In einer Koaxialleitung (Zylinderkondensator unendlicher Länge, vgl. Bild 2.3) beträgt der Radius des kompakten Innenleiters $R_\mathrm{i} = 3$ mm, der Innenradius des Außenleiters $R_\mathrm{a} = 8$ mm. Berechnen Sie das Magnetfeld, wenn die Stromstärke $I = 0{,}1$ A beträgt. Wie groß ist die Feldstärke a) an der Innenleiter-, b) an der Außenleiterwandung?

Lösung

Wegen der MAXWELLschen Gleichung (3.1./2) besteht zwischen der Stromdichte $\mathfrak{J}$ und der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$ die Beziehung

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mathfrak{J}. \tag{1}$$

Nach dem STOKESschen Satz (1.3./10) gilt

$$\iint \operatorname{rot} \mathfrak{H} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} = \oint \mathfrak{H} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{s}. \tag{2}$$

Beim Umlauf auf einer Kreisbahn mit dem Radius r folgt

$$\oint \mathfrak{H} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{s} = 2\pi r \mathfrak{H}_r. \tag{3}$$

Andererseits erhält man für $R_\mathrm{i} < r < R_\mathrm{a}$

$$\iint \mathfrak{J} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} = I, \tag{4}$$

wobei I die Stromstärke im Innenleiter bezeichnet. Daraus ergibt sich

$$\mathfrak{H}_r = \frac{I}{2\pi r}. \tag{5}$$

Die übrigen Komponenten verschwinden, wenn man Randstörungen an den beiden Leiterenden vernachlässigen, d. h. wie mit einem Zylinderkondensator unendlicher Länge rechnen kann. An der Innenleiterwandung folgt mit den vorgegebenen Zahlen

$$(\mathfrak{H}_r)_\mathrm{i} = \frac{0{,}1}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^{-3}}\ \mathrm{A\ m^{-1}} = 5{,}31\ \mathrm{A\ m^{-1}},$$

an der Außenleiterwandung

$$(\mathfrak{H}_r)_\mathrm{a} = \frac{0{,}1}{2\pi \cdot 8 \cdot 10^{-3}}\ \mathrm{A\ m^{-1}} = 1{,}99\ \mathrm{A\ m^{-1}}.$$

Diese Werte sind identisch mit der Oberflächenstromdichte.

3.1.2. Ringspule (Toroid)

Eine Spule aus $n = 1000$ Windungen ist gleichmäßig auf einen Ring mit kreisförmigem Querschnitt gewickelt. Der Außendurchmesser $2R_\mathrm{a}$ und der Innendurchmesser $2R_\mathrm{i}$ des Ringes seien groß gegen den Querschnittdurchmesser $2(R_\mathrm{a} - R_\mathrm{i})$ (vgl. Bild 3.3). Berechnen Sie das Magnetfeld in der Ringspule, wenn durch diese der Strom $I = 0{,}1$ A fließt ($R_\mathrm{a} = 10$ cm, $R_\mathrm{i} = 9{,}5$ cm).

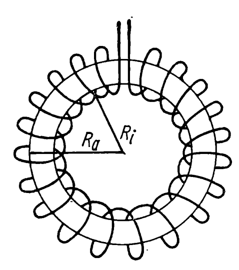


Bild 3.3. Ringspule

Lösung

Wir gehen von der MAXWELLschen Gleichung (3.1./2)

$$\mathrm{rot}\ \mathfrak{H} = \mathfrak{J} \tag{1}$$

aus. Integration liefert nach dem STOKESschen Satz (1.3./10)

$$\iint \mathrm{rot}\ \mathfrak{H} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} = \oint \mathfrak{H} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{s} = \iint \mathfrak{J} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} = I. \tag{2}$$

Als Integrationsweg C wählen wir eine innerhalb des Ringes verlaufende Kreislinie, und zwar den Mittelwert

$$R = \frac{R_\mathrm{a} + R_\mathrm{i}}{2}. \tag{3}$$

Die Kreislinie umschlingt den fließenden Strom n-mal. Es folgt damit aus (2)

$$\oint \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{s} = H 2\pi R = nI. \tag{4}$$

Wir können die Länge $2\pi R$ der Umlaufkurve gleich l setzen und erhalten damit aus (4)

$$H = \frac{nI}{l} = \frac{nI}{\pi(R_a + R_i)}. \tag{5}$$

Diese Formel stimmt mit Gl. (1.1./18) für die Feldstärke in einer Zylinderspule überein. Die Zylinderspule ergibt sich aus der Ringspule, wenn diese auseinandergebogen wird.
Zahlen eingesetzt, folgt aus (5)

$$H = \frac{1000 \cdot 0{,}1}{3{,}14 \cdot 19{,}5 \cdot 10^{-2}}\ \mathrm{A\,m^{-1}} = 163\ \mathrm{A\,m^{-1}}.$$

3.1.3. Ringspule mit Luftspalt

Ein mit einem Schlitz der Breite $b = 2{,}5$ mm versehener Ringmagnet ist mit einer Spule aus $n = 10000$ Windungen umwickelt (vgl. Bild 1.18 und Bild 3.3); durch die Spule fließt der Strom $I = 0{,}02$ A. Die gesamte mittlere Länge einer Feldlinie im Ringmagneten beträgt einschließlich des Luftspaltes $l = 25$ cm. Der Querschnitt A_i des Ringmagneten ist gleich 2 cm². Wie durch Induktionsmessungen festgestellt wird, entspricht dem durch die Spulenwindungen erzeugten Magnetfeld

$$H_w = \frac{nI}{l} = 800\ \mathrm{A\,m^{-1}}$$

im Ringmagneten die magnetische Flußdichte

$$B_i = 0{,}060\ \mathrm{V\,s\,m^{-2}}.$$

Die Permeabilität im Spalt ist gleich $\mu_a = \mu_0$.
Berechnen Sie das Magnetfeld im Ringmagneten und im Spalt unter der Voraussetzung, daß durch den Luftspalt keine Streuung des Magnetfeldes erfolgt und daß man das Feld im Ringmagneten als homogen auffassen kann. Wie groß ist die Magnetisierung?

Lösung

Nach (1.1./25) gilt

$$\oint \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{s} = nI. \tag{1}$$

Daraus folgt

$$H_i(l - b) + H_a b = nI = H_w l. \tag{2}$$

Darin bedeutet H_i die Stärke des Feldes im Ringmagneten, H_a im Luftspalt. H_w wird als symbolische Größe eingeführt und gibt das Feld einer Spule der Länge l aus n Windungen gemäß (1.1./18) an. Die Quellenfreiheit div $\mathfrak{B} = 0$ der magnetischen Flußdichte bedingt die Beziehung

$$B_i A_i = B_a A_a, \tag{3}$$

wobei A_a den Querschnitt des Luftspaltes angibt. Dieser ist bei einem homogenen Feld, wenn keine Streuung der Feldlinien stattfindet, gleich dem Querschnitt A_i des Ringmagneten.
Ferner gilt im Luftspalt

$$B_a = \mu_a H_a, \tag{4}$$

dagegen im Ringmagneten

$$B_i = \mu_0 H_i + M. \tag{5}$$

(4) und (5) in (3) eingesetzt, ergibt wegen $\mu_a = \mu_0$

$$\left(H_i + \frac{M}{\mu_0}\right) A_i = H_a A_a. \tag{6}$$

(2) und (6) bilden ein Gleichungssystem zur Bestimmung der beiden Unbekannten H_i und H_a. Es folgt

$$H_a = \frac{H_w l + \frac{1}{\mu_0} M(l-b)}{A_i b + A_a(l-b)} A_i, \tag{7}$$

$$H_i = \frac{H_w l A_a - \frac{1}{\mu_0} M b A_i}{A_i b + A_a(l-b)}. \tag{8}$$

Aus (5) und (8) erhält man für die Magnetisierung des Ringmagneten die Gleichung

$$M = B_i - \mu_0 H_i = B_i - \mu_0 \frac{H_w A_a l - M A_i}{A_i b + A_a(l-b)}, \tag{9}$$

woraus

$$M = \frac{B_i[A_i b + A_a(l-b)]}{A_a(l-b)} - \mu_0 H_w A_a l \tag{10}$$

folgt. (10) eingesetzt in (7) und (8), gibt die gesuchten Feldstärken. Kann man $A_i = A_a = A$ setzen, so führen (7) und (8) auf

$$H_a = H_w + \frac{M(l-b)}{\mu_0 l}, \qquad H_i = H_w - \frac{Mb}{\mu_0 l}, \tag{11}$$

während man aus (10)

$$M = \frac{B_i - \mu_0 H_w}{l-b} l \tag{12}$$

erhält.
Die Feldstärke im Luftspalt übersteigt die im Magneten um

$$H_a - H_i = \frac{M}{\mu_0}. \tag{13}$$

Man kann das homogene Feld im Magneten in der Form (2.4./12)

$$H_i = H_w - \frac{NM}{\mu_0} \tag{14}$$

schreiben. Hieraus ergibt sich der Entmagnetisierungsfaktor N des Ringmagneten, wenn (14) mit der zweiten Gleichung (11) verglichen wird:

$$N = \frac{b}{l}.$$

Im vorliegenden Fall ist der Entmagnetisierungsfaktor gleich

$$N = \frac{0{,}25}{25} = 0{,}01. \tag{15}$$

Wir setzen M aus (12) in (11) ein, womit folgt

$$H_a = \frac{B_a}{\mu_a} = \frac{B_i}{\mu_a}, \qquad H_i = H_w - \frac{\frac{1}{\mu_0} B_i - H_w}{l - b} b. \tag{16}$$

Mit den vorgegebenen Zahlen erhalten wir

$$H_a = \frac{0{,}060}{1{,}257 \cdot 10^{-6}} \text{ A m}^{-1} = 4{,}78 \cdot 10^4 \text{ A m}^{-1},$$

$$H_i = \left(800 - \frac{4{,}78 \cdot 10^4 - 800}{0{,}25 - 0{,}0025} 0{,}0025\right) \text{ A m}^{-1} = 325 \text{ A m}^{-1}.$$

Gemäß $\mu_a H_a = \mu_i H_i$ ergibt sich hieraus für die relative Permeabilität

$$\mu_i/\mu_0 = \frac{4{,}78 \cdot 10^4}{25} = 1900.$$

Die Magnetisierung wird nach (13) gleich

$$M = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (4{,}78 - 0{,}32) \cdot 10^4 \text{ V s m}^{-2} = 3{,}54 \cdot 10^{-2} \text{ V s m}^{-2}.$$

3.1.4. Magnetfeld eines Drahtringes und einer kurzen Spule

Ein Drahtring mit dem Durchmesser $2R = 8$ cm wird von einem Strom der Stärke $I = 4$ A durchflossen. Wie groß ist das Magnetfeld auf der durch den Mittelpunkt gehenden Achse? Berechnen Sie speziell die Stärke des Feldes im Mittelpunkt und auf der Achse im Abstand $z_0 = 50$ cm.
Wie groß ist das Feld, wenn anstelle des Drahtringes eine sehr kurze Spule aus $n = 80$ enggewickelten Windungen benutzt wird? Dabei ist vorauszusetzen, daß die Spulenlänge l klein ist gegen den Querschnittsradius der Spule.

Lösung

Nach dem BIOT-SAVARTschen Gesetz (3.1./23) gibt

$$d\mathfrak{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I\, d\mathfrak{s} \times \mathfrak{r}}{r^3} \tag{1}$$

die durch ein Stromelement $I\, d\mathfrak{s}$ im Punkt P_0 erzeugte magnetische Feldstärke an.
Wir legen den Koordinatenanfangspunkt in die Mitte des kreisförmigen Leiters und wählen die Leiterebene als x,y-Ebene (vgl. Bild 3.4). Es gilt dann für die Punkte des stromführenden Drahtes

$$x = R \cos \varphi, \qquad y = R \sin \varphi. \tag{2}$$

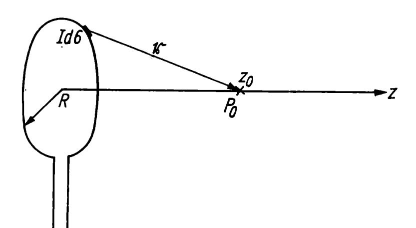


Bild 3.4. Ringförmiger Draht

Daraus erhält man für den Vektor $d\mathfrak{s}$ des Leiterelementes

$$d\mathfrak{s} = R(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)\, d\varphi. \tag{3}$$

Der vom Leiterelement $d\mathfrak{s}$ zum Punkt $P_0(0, 0, z_0)$ auf der Achse gezogene Vektor $\mathfrak{r}$ ist gleich

$$\mathfrak{r} = (-R \cos \varphi, -R \sin \varphi, z_0). \tag{4}$$

Daraus ergibt sich

$$d\mathfrak{s} \times \mathfrak{r} = R(z_0 \cos \varphi, z_0 \sin \varphi, R)\, d\varphi. \tag{5}$$

Die vom Stromkreis hervorgerufene magnetische Feldstärke folgt durch Integration:

$$\mathfrak{H} = \frac{I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\mathfrak{s} \times \mathfrak{r}}{|\mathfrak{r}|^3} = \frac{I}{4\pi} R \int_0^{2\pi} \frac{(z_0 \cos \varphi, z_0 \sin \varphi, R)\, d\varphi}{\sqrt{R^2 + z_0^2}^3}. \tag{6}$$

Für die Umlaufintegrale über die ersten beiden Komponenten erhält man den Wert Null. Es bleibt

$$\mathfrak{H}_z = \frac{I}{2} \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + z_0^2}^3}. \tag{7}$$

In der Mitte der kreisförmigen Windung erhalten wir, wenn wir $z_0 = 0$ setzen,

$$\mathfrak{H}_z = \frac{I}{2R}. \tag{8}$$

Mit den vorgegebenen Zahlen ergibt sich

$$\mathfrak{H}_z = \frac{4}{2 \cdot 0{,}04} \text{ A m}^{-1} = 50 \text{ A m}^{-1}.$$

Dagegen folgt für das Feld im Abstand $z_0 = 0{,}5$ m auf der Achse

$$\mathfrak{H}_z = \frac{4 \cdot 0{,}04^2}{2\sqrt{0{,}04^2 + 0{,}5^2}^3} = 2{,}54 \cdot 10^{-2} \text{ A m}^{-1}.$$

Für eine sehr kurze Spule aus 80 Windungen erhöht sich die Feldstärke um den Faktor 80. Man erhält damit im Zentrum

$$\mathfrak{H}_z = 4000 \text{ A m}^{-1},$$

dagegen im Abstand 50 cm

$$\mathfrak{H}_z = 2{,}03 \text{ A m}^{-1}.$$

Diese Multiplikation mit der Windungszahl ist nur gestattet, wenn die Länge der Spule sehr klein gegen den Querschnittsradius der Spule ist.

3.1.5. Magnetfeld auf der Achse einer endlich langen Spule (Solenoid)

Eine Zylinderspule mit kreisförmigem Querschnitt hat die Länge $l = 5$ cm. Der Radius des Querschnitts beträgt $R = 2$ cm, liegt also in der gleichen Größenordnung wie die Spulenlänge. Die Zahl der Windungen sei $n = 800$, der Strom $I = 0{,}04$ A. Berechnen Sie das Feld auf der Spulenachse, in der Mitte und am äußeren Ende der Spule.

Lösung

Wir gehen von der Formel (3.1.4./7) für die Feldstärke auf der Achse eines Drahtringes mit dem Radius R aus. Befindet sich der Mittelpunkt des Drahtringes an der Stelle z, so wird auf der Achse an der Stelle z_0 das Feld

$$\mathfrak{H}_z = \frac{I}{2} \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + (z - z_0)^2}^3} \tag{1}$$

erzeugt.

Ein herausgeschnittenes Spulenstück der Länge dz können wir durch eine Kreisschleife ersetzen, in der der Strom $\frac{n}{l} I \, \mathrm{d}z$ fließt. n bezeichnet dabei die Windungszahl der gesamten Spule. Im Punkt $P_0(0, 0, z_0)$ auf der Achse erzeugt das Spulenelement die Feldstärke

$$\mathrm{d}\mathfrak{H}_z = \frac{nIR^2 \, \mathrm{d}z}{l\sqrt{R^2 + (z_0 - z)^2}^3}. \tag{2}$$

Hieraus erhält man durch Integration

$$\mathfrak{H}_z = \frac{nIR^2}{2l} \int\limits_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{R^2 + (z_0 - z)^2}^3}. \tag{3}$$

Durch die Substitution

$$z_0 - z = R \tan \varphi \tag{4}$$

ergibt sich

$$\mathfrak{H}_z = \frac{nI}{2l} \int\limits_{\arctan\frac{2z_0-l}{2R}}^{\arctan\frac{2z_0+l}{2R}} \cos\varphi \, \mathrm{d}\varphi = \frac{nI}{2l} \left[\frac{\frac{l}{2} + z_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{l}{2} + z_0\right)^2}} + \frac{\frac{l}{2} - z_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{l}{2} - z_0\right)^2}} \right]. \tag{5}$$

Wie Gl. (5) zeigt, ist das Feld auf der Achse in der Spulenmitte um so weniger veränderlich, je länger die Spule ist, d. h., je besser $l \gg R$ erfüllt ist. Im Grenzfall $l \to \infty$ erhält man in Übereinstimmung mit (1.1./18)

$$(\mathfrak{H}_z)_{l\to\infty} = \frac{nI}{l}. \tag{6}$$

Für die Spulenmitte $z_0 = 0$ folgt bei der endlich langen Spule

$$(\mathfrak{H}_z)_\mathrm{M} = \frac{nI}{2} \frac{1}{\sqrt{R^2 + \frac{l^2}{4}}}, \tag{7}$$

dagegen für das Spulenende $z_0 = \pm 0{,}5l$

$$\mathfrak{H}_z = \frac{nI}{2} \frac{1}{\sqrt{R^2 + l^2}}. \tag{8}$$

Mit den vorgegebenen Zahlen ergibt sich in der Mitte

$$\mathfrak{H}_z = \frac{800 \cdot 0{,}04}{2} \frac{100}{\sqrt{4 + 2{,}5^2}} \text{ A m}^{-1} = 500 \text{ A m}^{-1},$$

dagegen am Ende

$$\mathfrak{H}_z = \frac{800 \cdot 0{,}04}{2} \frac{100}{\sqrt{4 + 25}} \text{ A m}^{-1} = 297 \text{ A m}^{-1}.$$



Aufgaben

A 3.1.1. Zwei parallele Leiter der Länge l werden vom Strom I in einander entgegengesetzten Richtungen durchflossen. Bestimmen Sie das Vektorpotential.

A 3.1.2. Berechnen Sie das Vektorpotential zweier unendlich langer Leiter, die von einander entgegengerichteten Strömen durchflossen werden.

A 3.1.3. Zwei unendlich lange parallele Leiter werden von gleichen Strömen in entgegengesetzten Richtungen durchflossen. Bestimmen Sie aus dem Vektorpotential die magnetischen Feldlinien.

A 3.1.4. Berechnen Sie den magnetischen Fluß in einer Koaxialleitung, bezogen auf die Längeneinheit. Der Innendurchmesser des Außenleiters betrage $2R_\mathrm{a} = 16$ mm, der Durchmesser des Innenleiters $2R_\mathrm{i} = 6$ mm. Das Zwischenmedium sei Luft. Die Stromstärke betrage 1 mA.

A 3.1.5. Berechnen Sie das Magnetfeld zwischen den beiden Bändern einer Bandleitung. Die Breite eines Bandes betrage $b = 2$ cm; der Strom habe die Stärke $I = 0{,}1$ A.

A 3.1.6. Berechnen Sie das Magnetfeld in einer Ringspule aus $n = 18000$ Windungen, durch die der Strom $I = 1{,}5$ A fließt (Außenradius $R_\mathrm{a} = 20$ cm, Innenradius $R_\mathrm{i} = 18$ cm).

A 3.1.7.* Weisen Sie nach, daß bei einem Ringmagneten mit Luftspalt im Falle $\mu_\mathrm{i} \ll \mu_\mathrm{a}$ das Feld im Spalt näherungsweise so groß ist, als wäre die gesamte Spule auf den engen Raum des Luftspalts gewickelt.

A 3.1.8. Ein Ringmagnet der Länge $l = 20$ cm enthält $n = 5000$ Windungen, die vom Strom $I = 0{,}1$ A durchflossen werden. Wie groß ist das Magnetfeld im Luftspalt für $\mu_\mathrm{ri} = 1500$, wenn die Breite des Spaltes $a = 4$ mm beträgt?

A 3.1.9. Berechnen Sie das Feld in der Mitte eines ringförmigen Leiters (eine Windung) vom Radius $R = 25$ cm, wenn die Stromstärke $I = 8$ A beträgt.

A 3.1.10. Wie groß ist das Magnetfeld auf der Achse einer aus fünf engen Windungen bestehenden kreisförmigen Spule vom Radius $R = 0{,}50$ m, wenn die Stromstärke $I = 200$ A beträgt. Berechnen Sie das Feld in der Mitte der Spule und auf der Achse im Abstand $z_0 = 4$ m von der Spulenmitte für $l \ll R$.

A 3.1.11. Zwei Spulen mit den Längen a) $l_1 = 10$ cm und b) $l_2 = 20$ cm haben je $n = 5000$ Windungen und werden vom Strom $I = 0{,}1$ A durchflossen. Der Durchmesser sei für beide Spulen gleich $2R = 8$ cm. Berechnen Sie die magnetische Feldstärke auf den Achsen beider Spulen, und zwar 1. in der Mitte, 2. am Rand jeder Spule.

3.2. Kräfte auf stromdurchflossene Leiter — Gleichstrommeßgeräte



Einführung

Die auf elektrische Ströme wirkenden Kräfte ergeben sich aus der **Gleichung von Lorentz**

$$\boxed{\Delta\mathfrak{F} = \Delta Q(\mathfrak{E} + \mathfrak{v} \times \mathfrak{B})}\,. \tag{1}$$

Darin bezeichnet ΔQ die bewegte elektrische Ladung und $\mathfrak{v}$ ihren Geschwindigkeitsvektor. $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{B}$ geben die elektrische Feldstärke und die magnetische Flußdichte des äußeren elektromagnetischen Feldes an.

Von Interesse sind insbesondere die im magnetischen Feld auftretenden Kräfte

$$\Delta\mathfrak{F}_\mathrm{m} = \Delta Q\, \mathfrak{v} \times \mathfrak{B}\,. \tag{2}$$

Die auf eine bewegte Ladung infolge eines aufgeprägten Feldes $\mathfrak{B}$ ausgeübte Kraft steht sowohl zur Bewegungsrichtung als auch zum äußeren Magnetfeld senkrecht.

Um die bewegte Ladung ΔQ auf die Dichte des Stromes zurückzuführen, betrachtet man ein Leiterelement mit dem Querschnitt ΔA und der Länge Δs. Die Ladung ΔQ sei gleichmäßig über dieses Leiterelement verteilt. Für die Ladungsdichte erhält man somit

$$\varrho = \frac{\Delta Q}{\Delta A \, \Delta s}. \tag{3}$$

Zwischen Ladungsdichte ϱ, Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und Stromdichte $\mathfrak{J}$ besteht nach (1.3./11) die Beziehung

$$\mathfrak{J} = \varrho \mathfrak{v} = \frac{\Delta Q}{\Delta A \, \Delta s} \mathfrak{v}. \tag{4}$$

Sie kann nach der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ aufgelöst werden. Wird der sich dabei ergebende Ausdruck in (2) eingesetzt, so erhält man für die Kraft, die ein Feld auf den Strom der Dichte $\mathfrak{J}$ in einem Leiter mit dem Querschnitt ΔA längs eines geraden Leitungsstückes Δs ausübt,

$$\Delta \mathfrak{F}_{\mathrm{m}} = \Delta A \, \Delta s \, \mathfrak{J} \times \mathfrak{B}. \tag{5}$$

Der Vektor des Leiterelementes Δs und die Stromdichte $\mathfrak{J}$ sind gleichgerichtet. Man kann daher anstelle von (5) die Kraft auch in der Form

$$\boxed{\Delta \mathfrak{F}_{\mathrm{m}} = I \, \Delta s \times \mathfrak{B}} \tag{6}$$

schreiben, wobei I die Stromstärke angibt.
Wenn die magnetische Feldstärke räumlich variabel ist oder wenn gekrümmte Leiter vorliegen, unterteilt man diese in differentielle Stromelemente $I \, \mathrm{d}s$. Die auf ein derartiges Element durch das äußere Magnetfeld ausgeübte Kraft ist nach (6) gleich

$$\mathrm{d}\mathfrak{F}_{\mathrm{m}} = I \, \mathrm{d}s \times \mathfrak{B}. \tag{7}$$

Hieraus erhält man die auf den gesamten Stromkreis wirkende Kraft durch Integration.
Im homogenen Magnetfeld entsteht infolge der LORENTZ-Kraft auf einen Stromkreis ein **Drehmoment,** das diesen senkrecht zum äußeren Feld zu stellen sucht. Es ist gleich

$$\boxed{\mathfrak{M} = \mathfrak{m} \times \mathfrak{H}}. \tag{8}$$

$\mathfrak{m}$ gibt das **magnetische Moment des ebenen Stromkreises** an. Hierfür erhält man

$$\boxed{\mathfrak{m} = \mu I \mathfrak{A}}. \tag{9}$$

Dabei ist A die Größe der eingeschlossenen Fläche, μ die Permeabilität des den Stromkreis umgebenden Mediums. Bei einer **Spule aus n enggewickelten** Windungen vergrößert sich das magnetische Moment $\mathfrak{m}$ und damit das Drehmoment $\mathfrak{M}$ um den Faktor n.

Beispiel 8

Eine Spule aus $n = 1000$ Windungen mit der Querschnittfläche $A = 10\ \text{cm}^2$ wird vom Strom $I = 2$ A durchflossen. Das Zwischenmedium ist Luft mit der Permeabilität $\mu = \mu_0$. Unter dem Winkel $\alpha = 45°$ gegen die Spulenachse geneigt, wirkt auf die Spule ein Magnetfeld der Stärke $H = 1500\ \text{A m}^{-1}$. Es führt nach (8) zu einem Drehmoment der Größe

$$|\mathfrak{M}| = |\mathfrak{m}_n \times \mathfrak{H}| = |\mathfrak{m}_n|\ |\mathfrak{H}| \sin 45°.$$

Setzt man hierin

$$|\mathfrak{m}_n| = n\mu_0 IA = 1000 \cdot 1{,}257 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10^{-4}\ \text{V s m} = 2{,}514 \cdot 10^{-3}\ \text{V s m}$$

ein, so folgt

$$|\mathfrak{M}| = 2{,}514 \cdot 10^{-6}\ \text{V s m} \cdot 1500\ \text{A m}^{-1} \cdot 0{,}707 = 2{,}66 \cdot 10^{-3}\ \text{Nm}.$$



Probleme

3.2.1. Kraft auf einen stromdurchflossenen Draht im Magnetfeld

Im magnetischen Feld der Stärke $H = 10^5\ \text{A m}^{-1}$ befindet sich ein gerades Drahtstück der Länge $l = 15$ cm. Durch dieses fließt Strom der Stärke $I = 100$ A. Wie groß ist die Kraft auf dieses Drahtstück, wenn a) der Leiter senkrecht zum Magnetfeld gerichtet ist, b) unter dem Winkel $\varphi = 30°$ gegen das Magnetfeld geneigt ist?

Lösung

Nach der Lorentz-Gleichung (3.2./6) wirkt auf einen Strom I längs des geraden Leiterstückes l im Magnetfeld die Kraft

$$\mathfrak{F}_m = I\mathfrak{l} \times \mathfrak{B} = I\mu_0\, \mathfrak{l} \times \mathfrak{H}. \tag{1}$$

Sie steht senkrecht zu der vom Stromdichtevektor $\mathfrak{J}$ und vom Magnetfeld $\mathfrak{H}$ gebildeten Ebene. Für den Betrag der Kraft erhalten wir

$$F_m = l\mu_0 IH \sin\varphi. \tag{2}$$

Im Falle $\varphi = 90°$, d. h., wenn $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{H}$ senkrecht zueinander stehen, ergibt sich mit den vorgegebenen Zahlen

$$F = 0{,}15 \cdot 1{,}257 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^5\ \text{N} = 1{,}88\ \text{N} = 192\ \text{p}.$$

Sind die beiden Vektoren dagegen unter $\varphi = 30°$ gegeneinander geneigt, so folgt

$$F = 1{,}88 \cdot 0{,}50\ \text{N} = 0{,}94\ \text{N}.$$

3.2.2. Kräfte zwischen stromdurchflossenen Leitern

Zwei parallele Drähte haben voneinander den Abstand $r = 0{,}5$ cm. Ihre Länge beträgt $l = 2{,}50$ m. Der erste Draht wird vom Strom $I_0 = 5$ A, der zweite in entgegengesetzter Richtung vom Strom $I = 10$ A durchflossen. Berechnen Sie die zwischen diesen beiden Stromleitern wirksamen Kräfte.

Lösung

Nach (3.2./6) wirkt auf ein gerades Leiterstück $\mathfrak{s}$, das vom Strom I durchflossen wird, im Feld $\mathfrak{B}$ die Kraft

$$\mathfrak{F}_\mathrm{m} = I\mathfrak{s} \times \mathfrak{B}. \tag{1}$$

Ein gerader Leiter, der vom Strom I_0 durchflossen wird, erzeugt in seiner Umgebung nach (3.1./19) ein Magnetfeld $\mathfrak{H}$, das in Zylinderkoordinaten nur die Komponente

$$\mathfrak{H}_\varphi = \frac{I_0}{2\pi r} \tag{2}$$

besitzt. Für die magnetische Flußdichte erhält man, wenn das umgebende Medium Luft oder Vakuum ist,

$$\mathfrak{B}_\varphi = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}. \tag{3}$$

Das Feld $\mathfrak{B}$ und die Richtung des Stromes I stehen zueinander senkrecht. Die Kraft $\mathfrak{F}_\mathrm{m}$ steht nach (1) senkrecht zum stromdurchflossenen Leiter.
Wir führen Cartesische Koordinaten ein und wählen die Richtung des Stromes I_0 als z-Achse. Dann können wir schreiben (vgl. 1.2./8)

$$\mathfrak{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\,(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \tag{4}$$

$$I\mathfrak{s} = I(0, 0, -l). \tag{5}$$

$\mathfrak{s}$ weist in Richtung des Stromes I, der entgegen dem Strom I_0 fließt. Der Betrag von $\mathfrak{s}$ ist gleich der Leiterlänge l. (4) und (5) in (1) eingesetzt, ergibt

$$\mathfrak{F}_\mathrm{m} = \frac{\mu_0 I_0 I}{2\pi r}\begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ 0 & 0 & -l \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = \frac{\mu_0 I_0 I l}{2\pi r}\,(\cos\varphi, \sin\varphi, 0). \tag{6}$$

Es befinde sich die Leitung mit dem Strom I rechts vom Strom I_0. An der Stelle des Stromes I hat die Winkelkoordinate den Wert $\varphi = 0$. Somit folgt im vorliegenden Fall entgegengerichteter Ströme aus (6)

$$\mathfrak{F}_\mathrm{m} = \frac{\mu I_0 I l}{2\pi r}\,(1, 0, 0). \tag{7}$$

Man erhält eine von I_0 weg in Richtung der positiven x-Achse weisende Kraft. Die beiden entgegengerichteten Ströme stoßen einander ab. Für den Betrag dieser Kraft folgt

$$|\mathfrak{F}_\mathrm{m}| = \frac{\mu_0 I_0 I l}{2\pi r} = \frac{1{,}257 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10 \cdot 2{,}50}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-3}}\,\mathrm{N}$$
$$= 0{,}0050\,\mathrm{N} = 0{,}51\,\mathrm{p}.$$

Stärkere Kräfte treten erst für sehr hohe Ströme oder bei wesentlich geringeren Abständen auf.

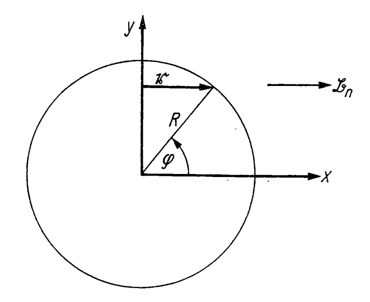
10*

3.2.3. Drehmoment auf eine Spule im Magnetfeld

In einem Magnetfeld der Stärke $H = 5 \cdot 10^5$ A m^{-1} befindet sich eine Spule aus $n = 5000$ Windungen, die vom Strom der Stärke $I = 0{,}1$ A durchflossen wird. Die Spule besitzt einen kreisförmigen Querschnitt vom Radius $R = 1{,}5$ cm. Ihre Achse ist gegen das Magnetfeld unter dem Winkel $\alpha = 30°$ geneigt. Berechnen Sie unter Anwendung der LORENTZ-Gleichung das Drehmoment, das auf die Spule ausgeübt wird.

Lösung

Wir wählen die Querschnittebene der Spule als x,y-Ebene. Die x-Achse legen wir in die Richtung der Projektion des Feldes $\mathfrak{B}$ auf die Querschnittebene (vgl. Bild 3.5). Der Strom fließe im mathematisch positiven Drehsinn.



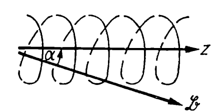


Bild 3.5. Spule im Magnetfeld der Flußdichte $\mathfrak{B}$

Das vektorielle Linienelement des Kreises $r = R$ ist

$$\mathrm{d}\mathfrak{s} = \mathrm{d}x\mathfrak{i} + \mathrm{d}y\mathfrak{j} = R(-\sin\varphi\mathfrak{i} + \cos\varphi\mathfrak{j})\,\mathrm{d}\varphi. \tag{1}$$

Die magnetische Flußdichte $\mathfrak{B}$ ist auf Grund der Festlegung des Koordinatensystems durch

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_x\mathfrak{i} + \mathfrak{B}_z\mathfrak{k} \tag{2}$$

bestimmt. Für die Komponenten von $\mathfrak{B}$ gelten die Gleichungen

$$\mathfrak{B}_z = B\cos\alpha, \qquad \mathfrak{B}_x = B\sin\alpha. \tag{3}$$

Die auf das Stromelement $I\,\mathrm{d}\mathfrak{s}$ wirkende Kraft $\mathrm{d}\mathfrak{F}$ wird gleich

$$\mathrm{d}\mathfrak{F} = I\,\mathrm{d}\mathfrak{s} \times \mathfrak{B} = IBR \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{vmatrix} \mathrm{d}\varphi, \tag{4}$$

d. h. ausgerechnet

$$d\mathfrak{F} = IBR(\cos\alpha\cos\varphi\mathfrak{i} + \cos\alpha\sin\varphi\mathfrak{j} - \sin\alpha\cos\varphi\mathfrak{k})\,d\varphi. \tag{5}$$

Durch die Komponente $\mathfrak{B}_z$ des magnetischen Feldes wird auf den Stromkreis eine Kraft ausgeübt, die in jedem Punkt radial nach außen gerichtet ist und den Spulenquerschnitt zu vergrößern sucht. Sie ist nicht mit einem Drehmoment zu verknüpfen. Dagegen bewirkt die parallel zur Querschnittebene in Richtung der x-Achse weisende Komponente $\mathfrak{B}_x$ in jedem Punkt des Stromleiters eine Kraft, die für $x < 0$ parallel, für $x > 0$ antiparallel zur z-Achse steht. Die Gerade $x = 0$, $z = 0$, d. h. die y-Achse, gibt somit die Achse des entstehenden Drehmomentes an. Für den Radiusvektor $\mathfrak{r}$ folgt daher

$$\mathfrak{r} = R\cos\varphi\mathfrak{i}. \tag{6}$$

Als Drehmoment $d\mathfrak{M}$, das von einem Leiterelement $d\mathfrak{s}$ verursacht wird, erhält man aus (6) im Zusammenhang mit (5)

$$d\mathfrak{M} = \mathfrak{r} \times \overrightarrow{d\mathfrak{F}} = IBR^2 \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \cos\varphi & 0 & 0 \\ \cos\alpha\cos\varphi & \cos\alpha\sin\varphi & -\sin\alpha\cos\varphi \end{vmatrix} d\varphi, \tag{7}$$

d. h.

$$d\mathfrak{M} = IBR^2(\sin\alpha\cos^2\varphi\mathfrak{j} + \cos\alpha\cos\varphi\sin\varphi\mathfrak{k})\,d\varphi.$$

Das gesamte, von einer vollen Stromwindung erzeugte Drehmoment ergibt sich daraus durch Integration. Die $\mathfrak{k}$-Komponente verschwindet wegen

$$\int_0^{2\pi} \cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi = 0.$$

Dagegen ist

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi = \pi.$$

Als Drehmoment einer Windung erhalten wir damit

$$\mathfrak{M}_1 = \pi R^2 IB\sin\alpha\mathfrak{j} = \mathfrak{m}_1 \times \mathfrak{H}. \tag{8}$$

Das magnetische Moment $\mathfrak{m}_1$ ist dabei in Richtung der positiven z-Achse orientiert. Sein Betrag ist gleich

$$|\mathfrak{m}_1| = \mu_0\pi R^2 I. \tag{9}$$

Für die Spule aus n Windungen folgt das Drehmoment

$$\mathfrak{M}_n = n\mathfrak{m}_1 \times \mathfrak{H} = n\mu_0\pi R^2 IH\sin\alpha\mathfrak{j}. \tag{10}$$

Mit den vorgegebenen Zahlen ergibt sich als Betrag des Drehmomentes

$$|\mathfrak{M}_n| = 5000 \cdot 1{,}257 \cdot 10^{-6} \cdot \pi \cdot (1{,}5 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 0{,}1 \cdot 5 \cdot 10^5 \cdot 0{,}5\,\mathrm{Nm} = 0{,}111\,\mathrm{Nm}.$$

3.2.4. Spiegelgalvanometer

Im Spalt zwischen den Polen eines starken Elektromagneten befindet sich eine Spule aus $n = 600$ Windungen mit dem Querschnitt $A = 12\ \mathrm{cm}^2$ (vgl. Bild 3.6). Sie steht, wenn durch die Windungen kein Strom fließt, mit der Achse senkrecht zum äußeren Magnetfeld ($\alpha = 90°$). Die Stärke des äußeren Feldes beträgt $H = 5 \cdot 10^5\ \mathrm{A\,m^{-1}}$. Das Trägheitsmoment der Spule ist $J = 4 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{kg\,m^2}$, die Winkelrichtgröße $D = 8{,}5 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}$. Die Dämpfungskonstante hat den Wert $b = 6{,}5 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$. Untersuchen Sie die Auslenkung, wenn durch das Gerät ein Strom der Stärke $I = 1\ \mu\mathrm{A}$ fließt.

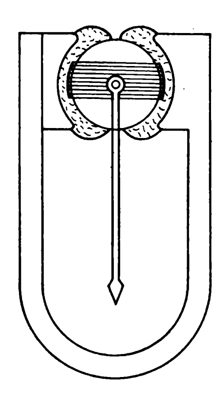


Bild 3.6. Strommeßgerät

Lösung

Wir betrachten den Auslenkwinkel φ. Er gibt die Abweichung aus der Ruhelage $\alpha = 90°$ an. Der Vektor $\vec{\varphi}$ hat die Richtung der festen Drehachse. Das Galvanometer folgt der Stromänderung verzögert. Infolgedessen stellt sich der Endausschlag erst nach einer gewissen Zeit ein.
Bei einem trägen System ist die Summe aller Drehmomente gleich dem Beschleunigungsmoment:

$$J \frac{\mathrm{d}^2\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t^2} = \mathfrak{M}_{\mathrm{el}} + \mathfrak{M}_{\mathrm{D}} + \mathfrak{M}_{\mathrm{d}}. \tag{1}$$

Darin bezeichnet

$$\mathfrak{M}_{\mathrm{el}} = \mathfrak{m} \times \mathfrak{H} \tag{2}$$

das elektromagnetisch verursachte Drehmoment, das sich als Vektorprodukt aus dem magnetischen Moment $\mathfrak{m}$ der Spule und der äußeren Feldstärke ergibt. Für die Komponente des Drehmomentes senkrecht zur Ebene aus Spulenachse und Feldstärke folgt auf Grund der Definition des magnetischen Momentes

$$M_{\mathrm{el}} = \mu_0 nAHJ \sin\alpha = \mu_0 nAHJ \cos\varphi. \tag{2a}$$

Bei kleinem Auslenkwinkel φ aus der Normallage kann man $\cos\varphi = \sin\alpha = 1$ setzen und erhält

$$M_{\mathrm{el}} = \mu_0 nAHJ. \tag{2b}$$

Die elastischen Kräfte erzeugen das rücktreibende Moment

$$\mathfrak{M}_{\mathrm{D}} = -D\vec{\varphi}. \tag{3}$$

Durch die Dämpfung entsteht ein den Bewegungsablauf verzögerndes Moment

$$\mathfrak{M}_\mathrm{d} = -b\,\frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t}. \tag{4}$$

Wir setzen (2), (3) und (4) in (1) ein. Daraus erhalten wir bei kleinem Auslenkwinkel für die Komponente des resultierenden Drehmomentes in Richtung senkrecht zur Schwingungsebene der Zylinderachse

$$J\,\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + b\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + D\varphi = \Phi_\mathrm{F} I. \tag{5}$$

Hierin gibt

$$\Phi_\mathrm{F} = \mu_0 n H A \tag{6}$$

den resultierenden magnetischen Fluß $n\iint \mathfrak{B}\,\mathrm{d}\mathfrak{A}$ durch die Spulenwindungen an.
Nach hinreichend langer Zeit bewirken die Dämpfungen, daß das System zur Ruhe kommt. Die zeitlichen Änderungen des Auslenkwinkels verschwinden, und es bleibt in (5)

$$D\varphi_\mathrm{M} = \Phi_\mathrm{F} I. \tag{7}$$

Hieraus folgt als Meßauslenkung

$$\varphi_\mathrm{M} = \frac{\Phi_\mathrm{F}}{D}\,I = \frac{\mu_0 n A H I}{D}. \tag{8}$$

Mit den vorgegebenen Zahlen ergibt sich aus (8)

$$\varphi_\mathrm{M} = \frac{1{,}257\cdot 10^{-6}\cdot 600\cdot 12\cdot 10^{-4}\cdot 5\cdot 10^{5}\cdot 10^{-6}}{8{,}5\cdot 10^{-5}} = 5{,}32\cdot 10^{-3} = 0{,}305^\circ.$$

Verbindet man die Spule mit einem Spiegel, auf den ein Lichtstrahl fällt, so bewirkt der Strom $J = 1\ \mu\mathrm{A}$ auf einer Skale in 1 m Entfernung eine Verschiebung der Lichtmarke um

$$\Delta x = 2\alpha l = 2\cdot 5{,}32\cdot 10^{-3}\cdot 1\ \mathrm{m} = 10{,}6\ \mathrm{mm}.$$

Um die Einstellzeit zu bestimmen, lösen wir die Differentialgleichung (5) mit den Anfangsbedingungen

$$\varphi(0) = 0, \qquad \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = 0. \tag{9}$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist durch (8) bestimmt. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung wird am zweckmäßigsten durch die Hyperbelfunktionen ausgedrückt. Es folgt

$$\varphi = \frac{\Phi_\mathrm{F} I}{D}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{bt}{2J}}\left[\cosh\frac{\sqrt{b^2 - 4JD}\,t}{2J} + \frac{b}{\sqrt{b^2 - 4JD}}\sinh\frac{\sqrt{b^2 - 4JD}\,t}{2J}\right]\right). \tag{10}$$

Der zweite Summand in der Klammer setzt sich aus einem mit der Zeit abklingenden und einem mit der Zeit zunehmenden Faktor zusammen. Wie man hieraus entnimmt, strebt der Zeiger seiner

Endstellung am schnellsten zu, wenn die Beziehung

$$b^2 = 4JD \tag{11}$$

(aperiodischer Grenzfall) erfüllt ist.
In der Exponentialfunktion erhält man für $t = 3$ s

$$\frac{bt}{2J} = \frac{6{,}5 \cdot 10^{-5} \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-6}} = 24{,}3.$$

Nach Einsetzen der Zahlenwerte folgt für die Argumente der hyperbolischen Funktionen

$$\frac{\sqrt{b^2 - 4JD}}{2J}\, t = \sqrt{8{,}1^2 - 21{,}25} \cdot 3 = 20{,}0.$$

Ferner ergibt sich

$$\frac{b}{\sqrt{b^2 - 4JD}} = 1{,}18.$$

Bei großem Argument $x > 20$ kann man genähert schreiben

$$\sinh x = \cosh x = \frac{e^x}{2}.$$

Damit erhalten wir für das Zusatzglied in (10) mit $t = 3$ s

$$e^{-24{,}3} \cdot \frac{e^{20{,}0} \cdot 2{,}18}{2} \cdot 1{,}1 \cdot e^{-4{,}3} = 0{,}015.$$

Nach drei Sekunden hat der Ausschlag 98,5% des Endwertes erreicht. Man kann daher bei einem Meßfehler von 1,5% mit einer Einstellzeit von drei Sekunden rechnen.

3.2.5. Ballistisches Galvanometer

Es soll die während eines kurzzeitigen Stromstoßes übertragene Ladung

$$Q = \int_0^{\Delta t} I \, \mathrm{d}t \tag{1}$$

gemessen werden. Hierzu verwendet man ein ballistisches Galvanometer (Spiegelgalvanometer mit großer Schwingungsdauer).
Das Feld des Elektromagneten habe die Stärke $H = 5 \cdot 10^5$ A m^{-1}. Die Spule enthalte $n = 8000$ Windungen, ihre Querschnittsfläche sei $A = 15$ cm^2, ihr Trägheitsmoment $J = 7{,}5 \cdot 10^{-5}$ kg m^2. Die Winkelrichtgröße habe den Wert $D = 5{,}0 \cdot 10^{-6}$ kg m^2 s^{-2}. Für die Dämpfungskonstante ergebe sich $b = 1{,}0 \cdot 10^{-6}$ kg m^2 s^{-1}. Wie groß ist die übertragene Ladung, wenn die Messung des maximalen Ausschlags $\varphi_{\max} = 7{,}4°$ ergibt?

Lösung

Wir fassen den kurzzeitigen Stromstoß (1) als einmaligen Impuls auf das schwingungsfähige System auf. Die Zeit rechnen wir vom Ende des Stromstoßes an. Für $t = 0$ habe also das Schwin-

gungssystem die von Null verschiedene Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0. \tag{2}$$

Der Strom erzeugt den Drehimpuls

$$\int \mathfrak{M}\, dt = \int \mathfrak{m}(t) \times \mathfrak{H}\, dt = \mu_0 n \mathfrak{A} \times \int I(t) \mathfrak{H}\, dt. \tag{3}$$

$\mathfrak{A}$ bezeichnet den Vektor der Spulenfläche.
Da im Anfangszustand $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{H}$ senkrecht zueinander stehen, können wir hierfür auch schreiben

$$\int M\, dt = \mu_0 n A H \int I\, dt = \Phi_F \int I\, dt = \Phi_F Q. \tag{4}$$

Andererseits besteht zwischen dem übertragenen Drehimpuls und der erzielten Anfangswinkelgeschwindigkeit der Zusammenhang

$$\int M\, dt = J \dot{\varphi}_0. \tag{5}$$

Somit folgt als Beziehung zwischen der übertragenen Ladung und der Winkelgeschwindigkeit am Ende des Stromstoßes

$$\dot{\varphi}(0) = \frac{\Phi_F Q}{J}. \tag{6}$$

Wir können voraussetzen, daß die Dauer des Stromstoßes so kurz ist, daß an seinem Ende noch keine merkliche Auslenkung aus der Normallage erfolgt ist. Es gilt daher

$$\varphi(0) = 0. \tag{7}$$

Mit Ausnahme des Anfangsimpulses wirkt auf das Schwingungssystem kein erzwingendes Drehmoment. Daher besteht nach (3.2.4./5) die Differentialgleichung

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + b \frac{d\varphi}{dt} + D\varphi = 0. \tag{8}$$

Ihre Lösung unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen lautet

$$\varphi = \frac{2\Phi_F Q}{\sqrt{4DJ - b^2}}\, e^{-\frac{bt}{2J}} \sin \sqrt{\frac{D}{I} - \left(\frac{b}{2I}\right)^2}\, t. \tag{9}$$

Um den Maximalausschlag φ_M und die Einstellzeit t_M zu bestimmen, setzen wir die erste Ableitung von φ nach der Zeit gleich Null. Das ergibt als Einstellzeit

$$t_M = \frac{2J}{\sqrt{4JD - b^2}} \arctan \sqrt{\frac{4JD - b^2}{b^2}}. \tag{10}$$

Wir berücksichtigen die Reihenentwicklung

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} \pm \cdots \tag{11}$$

für große Argumente x. Aus (10) und (11) ergibt sich die Einstellzeit

$$t_M = \sqrt{\frac{J}{D}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{b}{\sqrt{4JD}}\right). \tag{12}$$

Bei der näherungsweisen Berechnung des Maximalausschlages nach (9) benutzen wir die Reihenentwicklung

$$e^{-y} = 1 - y \pm \cdots \tag{13}$$

für kleine Werte y. Damit erhalten wir, wenn wir (12) in (9) einsetzen,

$$\varphi_M = \frac{\mu_0 n A H Q}{\sqrt{JD}} \left(1 - \frac{\pi}{4} \frac{b}{\sqrt{JD}}\right). \tag{14}$$

Die Näherungen (12) und (14) gelten um so genauer, je besser die Ungleichung

$$b \ll 2\sqrt{JD} \tag{15}$$

erfüllt ist.
Aus (14) folgt durch Umformen die während des Stromstoßes übertragene Ladung:

$$Q = \frac{\sqrt{JD}}{\mu_0 n A H} \left(1 + \frac{\pi}{4} \frac{b}{\sqrt{JD}}\right) \varphi_M. \tag{16}$$

Mit den vorgegebenen Zahlen erhalten wir nach (15)

$$\frac{b}{2\sqrt{JD}} = \frac{10^{-6}}{2\sqrt{7,5 \cdot 10^{-5} \cdot 5,0 \cdot 10^{-6}}} = 0,026 \ll 1.$$

Aus (16) ergibt sich damit

$$Q = \frac{\sqrt{7,5 \cdot 10^{-5} \cdot 5,0 \cdot 10^{-6}}}{1,257 \cdot 10^{-6} \cdot 8000 \cdot 15 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^{5}} (1 + 0,04) \frac{7,4\pi}{180} \text{ As} = 3,4 \cdot 10^{-9} \text{ C}.$$

Für die Einstellzeit folgt aus (12) der Wert

$$t_M = \sqrt{\frac{7,5 \cdot 10^{-5}}{5,0 \cdot 10^{-6}}} \left(\frac{\pi}{2} - 0,025\right) \text{ s} = 6,0 \text{ s}.$$



Aufgaben

A 3.2.1. In einem Elektronenbeschleuniger rotiert eine Ladung der Stärke $Q = 10^{-15}$ As mit der Geschwindigkeit $v = 0,01c$ in einem Kreisring mit dem Radius $R = 2$ m. Wie groß ist der hierdurch verursachte elektrische Strom?

A 3.2.2. Wie groß ist in einem Magnetfeld mit der Flußdichte $B = 1$ V s m^{-2} die Kraft auf ein Drahtstück der Länge $l = 10$ cm, das von einem Strom der Stärke $I = 10$ A durchflossen wird? Das Magnetfeld steht senkrecht zur Stromrichtung.

A 3.2.3. Berechnen Sie die Kraft, mit der sich zwei parallele Ströme der Stärke $I = 100$ A anziehen, die voneinander den Abstand 1 mm haben. Die Länge jeder Leitung sei gleich 10 m.

A 3.2.4. Berechnen Sie das Drehmoment, das auf eine kreiszylindrische Spule aus $n = 1500$ Windungen im Feld der Stärke $H = 1000$ A m^{-1} ausgeübt wird. Der

Radius des Querschnitts ist $R = 3$ cm. Die Stromstärke beträgt $I = 0{,}2$ A. Das Magnetfeld steht senkrecht zum fließenden Strom. Das Zwischenmedium ist Luft.

A 3.2.5. Berechnen Sie zur vorangegangenen Aufgabe das Drehmoment für $\mu = 1500\,\mu_0$.

A 3.2.6. Die Feldstärke in einem Spiegelgalvanometer ist gleich $H = 10^6$ A m^{-1}. Es wird eine Spule aus $n = 3000$ Windungen mit der Querschnittfläche $A = 16$ cm^2 verwendet. Die Winkelrichtgröße hat den Wert $D = 5{,}5 \cdot 10^{-6}$ kg m^2 s^{-2}. Wie groß ist der Strom, der einen Ausschlag von einer Winkelminute hervorruft?

A 3.2.7.* Stellen Sie die Formel für die Auslenkung eines Spiegelgalvanometers im aperiodischen Grenzfall $b^2 - 4JD \to 0$ auf.

A 3.2.8.* In einem Spiegelgalvanometer ist das Trägheitsmoment $J = 4 \cdot 10^{-6}$ kg m^2, die Winkelrichtgröße $D = 8{,}5 \cdot 10^{-5}$ kg m^2 s^{-2}. Die Dämpfung wird so abgestimmt, daß der aperiodische Grenzfall vorliegt. Bestimmen Sie die Zeit, die das Instrument braucht, um 99% des Endausschlages zu erreichen.

A 3.2.9. Wie groß ist in einem ballistischen Galvanometer die Anfangswinkelgeschwindigkeit, wenn durch die Spule aus $n = 5000$ Windungen mit der Querschnittfläche $A = 12{,}5$ cm^2 ein Stromstoß von 10^{-7} As hindurchgeht? Die Feldstärke beträgt $H = 10^6$ A m^{-1}, das Trägheitsmoment $J = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ kg m^2.

A 3.2.10. Berechnen Sie zur vorangegangenen Aufgabe den Maximalausschlag und die Einstellzeit, wenn die Dämpfungskonstante gleich $b = 1{,}2 \cdot 10^{-6}$ kg m^2 s^{-1}, die Winkelrichtgröße $D = 8{,}8 \cdot 10^{-6}$ kg m^2 s^{-2} ist.

A 3.2.11. Bestimmen Sie für ein ballistisches Galvanometer die Auslenkung, den maximalen Ausschlag und die Einstellzeit im aperiodischen Grenzfall.

A 3.2.12. Bestimmen Sie den Zeigerausschlag bei einem Spiegelgalvanometer im Falle $b^2 < 4JD$. Welchen Ausschlag relativ zum Endausschlag erreicht dieses Galvanometer im Grenzfall $b \to 0$ nach einer Schwingungsperiode?

A 3.2.13. Berechnen Sie die Meßauslenkung und die Einstellzeit für ein Galvanometer mit den folgenden Daten: $J = 7{,}2 \cdot 10^{-6}$ kg m^2, $D = 2{,}4 \cdot 10^{-5}$ kg m^2 s^{-2}, $\Phi_F = 0{,}13$ Vs, $b = 6 \cdot 10^{-8}$ kg m^2 s^{-1}. Der Strom ist gleich $I = 10$ A.

A 3.2.14.* **Kriechgalvanometer oder Flußmesser.** Um den magnetischen Fluß durch eine Spule zu messen, verwendet man das Kriechgalvanometer, das langsame Feldänderungen genau anzeigt. Es besitzt einen kleinen inneren Widerstand, der eine große elektromagnetische Dämpfung bedingt. Das rücktreibende Richtmoment ist sehr klein und kann während des kurzzeitigen Stromstoßes, der mit dem Aufbau des magnetischen Feldes verbunden ist, vernachlässigt werden. Dagegen ist es für den Rückstellvorgang zu beachten. Die Massenträgheit kann gegen das große Dämpfungsglied während des gesamten Meßprozesses vernachlässigt werden.
Bestimmen Sie für ein Kriechgalvanometer die Meßauslenkung im Falle $b = 6{,}5 \cdot 10^{-4}$ kg m^2 s^{-1}, $\Phi_F = 4 \cdot 10^{-3}$ Vs, $D = 1{,}3 \cdot 10^{-6}$ kg m^2 s^{-2}. Nach welcher Gleichung geht ohne zusätzliche äußere Einwirkung der Rückstellprozeß vor sich? Der Stromstoß ist gleich

$$\int I \, dt = 4{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ As}.$$

A 3.2.15. In einer Aufhängung mit der Richtgröße $k = 8 \cdot 10^{-4}$ kg s^{-2} befindet sich ein Drahtring mit dem Radius $R = 20$ cm, der vom Strom $I = 0{,}1$ A durchflossen wird. Parallel dazu im Abstand $x_0 = 2$ cm fließt ein Strom der Stärke $I_0 = 1$ A. Berechnen Sie die Endauslenkung der elastischen Aufhängung. Wie lautet die Differentialgleichung zur Beschreibung des Auslenkvorganges?

A 3.2.16. **Saitengalvanometer.** Ein Draht der Länge $l = 10$ cm ist in einem Magnetfeld der Stärke $H = 10^5$ A m^{-1} senkrecht zur Feldrichtung ausgespannt. Er befindet sich

in einer Anordnung mit der Richtgröße $k = 2{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,s^{-2}}$. Stellen Sie die Differentialgleichung für den Auslenkvorgang auf, wenn durch den Draht ein Strom der Stärke $I = 1$ mA fließt. Wie groß ist die Endauslenkung?

3.3. Eigenschaften stationärer Ströme — Kirchhoffsche Gesetze

E Einführung

Stationäre Ströme verhalten sich wie inkompressible Flüssigkeiten. An die Stelle des Druckes tritt die Spannung oder Potentialdifferenz, während die Flüssigkeitsmenge durch die elektrische Ladung zu ersetzen ist. Das folgt aus den MAXWELLschen Gleichungen (3.1./1) bis (3.1./4) für das stationäre Feld:

Nach (3.1./5) ergibt sich aus (3.1./1) die Existenz eines skalaren Potentials

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \Phi. \tag{1}$$

Dieses kann bei der Integration in (3.1./1) eingeführt werden. Dabei erhält man unter Anwendung des STOKESschen Satzes (1.3./10) wegen rot $\mathfrak{E} = 0$

$$\iint\limits_A \operatorname{rot} \mathfrak{E} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} = \oint\limits_C \mathfrak{E} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{s} = -\oint\limits_C \operatorname{grad} \Phi \cdot \mathrm{d}\mathfrak{s} = 0. \tag{2}$$

Das Integral über einen geschlossenen Stromkreis C läßt sich in Teilabschnitte zerlegen, die sich aus dem Aufbau des Stromkreises ergeben (vgl. Bild 3.7):

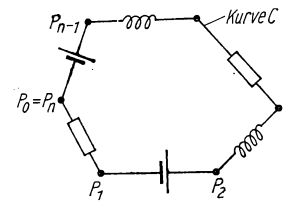


Bild 3.7. Geschlossener Stromkreis

$$\oint\limits_C \operatorname{grad} \Phi \cdot \mathrm{d}\mathfrak{s} = \int\limits_{P_0}^{P_1} \operatorname{grad} \Phi \cdot \mathrm{d}\mathfrak{s} + \cdots + \int\limits_{P_{n-1}}^{P_n} \operatorname{grad} \Phi \cdot \mathrm{d}\mathfrak{s} = 0. \tag{3}$$

Daraus folgt, wenn die Integrationen ausgeführt werden,

$$(\Phi_{P_1} - \Phi_{P_0}) + (\Phi_{P_2} - \Phi_{P_1}) + \cdots + (\Phi_{P_n} - \Phi_{P_{n-1}}) = 0 \tag{4}$$

bzw.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} = \Delta\Phi_i = 0}\,. \tag{5}$$

Gleichung (5) enthält das **erste Kirchhoffsche Gesetz der Stromverzweigung:** In jedem geschlossenen Stromkreis ist die algebraische Summe der Potentialdifferenzen

zwischen den einzelnen Abschnitten gleich Null. Die Potentialdifferenzen setzen sich aus eingeprägten Spannungsquellen (Batterien, Maschinenspannungen) und ohmschen Spannungsverlusten

$$\Delta\Phi_i = -U_i = -R_i I \tag{6}$$

zusammen. In der Wechselstromtechnik tritt dazu die induzierte Spannung.
Durch die MAXWELLsche Gleichung (3.1./2) wird die Quellenfreiheit des Stromfeldes $\mathfrak{J}$ zum Ausdruck gebracht:

$$\operatorname{div} \mathfrak{J} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0. \tag{7}$$

In Verbindung mit dem GAUSSschen Satz (1.3./17) ergibt sich daraus durch Integration

$$\iiint\limits_{\Delta V} \operatorname{div} \mathfrak{J} \, \mathrm{d}V = \oiint\limits_{A} \mathfrak{J} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} = 0. \tag{8}$$

Betrachtet man eine Stromverzweigung gemäß Bild 3.8, so kann um den Verzweigungspunkt P eine geschlossene Fläche A gelegt werden. Für die einzelnen durch diese Fläche A hindurchtretenden Ströme gilt nach (8)

$$\boxed{\sum_{\nu} I_\nu = 0}\,. \tag{9}$$

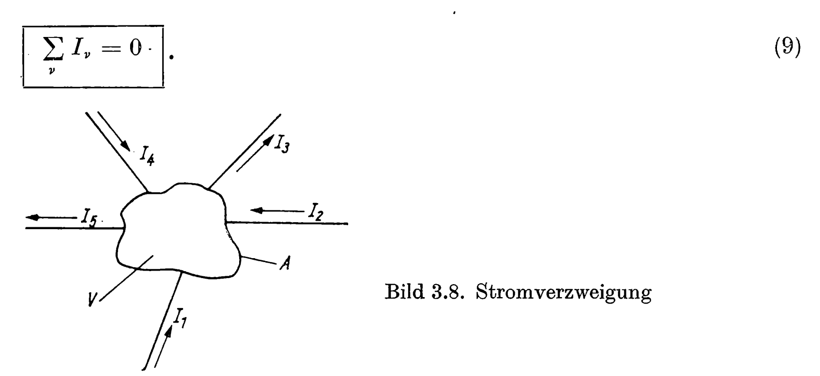


Bild 3.8. Stromverzweigung

Entsprechend der Festlegung in 1.3. sind in (9) alle aus dem betrachteten Volumen V austretenden Ströme positiv, alle eintretenden Ströme negativ zu zählen.
Gleichung (9) bringt das **zweite Kirchhoffsche Gesetz der Stromverzweigung** zum Ausdruck: An jedem Verzweigungspunkt ist die algebraische Summe der Ströme gleich Null, bzw. der Betrag aller zufließenden Ströme ist gleich dem Betrag aller abfließenden Ströme.

Beispiel 9

Betrachtet wird eine Verzweigung in zwei parallele Ströme nach Bild 3.9. Das erste KIRCHHOFFsche Gesetz (5) fordert, daß die Summe der Potentialdifferenzen über jeden der beiden möglichen Stromwege verschwindet. Hieraus folgt, daß die Potentialdifferenz zwischen den beiden Punkten A und B unabhängig von der betrachteten Stromleitung sein muß:

$$\Phi_B - \Phi_A = U_{AB} = R_1 I_1 = R_2 I_2. \tag{10}$$

Das zweite KIRCHHOFFsche Gesetz besagt, daß die algebraische Summe aller Ströme im Punkte B gleich Null sein muß:

$$-I_1 - I_2 + I = 0. \tag{11}$$

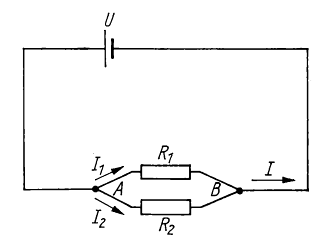


Bild 3.9. Ströme und Widerstände in einer Stromverzweigung

(10) und (11) bilden ein Gleichungssystem zur Bestimmung der unbekannten Ströme I_1 und I_2. Aus diesem erhält man

$$I_1 = \frac{IR_2}{R_1 + R_2}, \qquad I_2 = \frac{IR_1}{R_1 + R_2}. \tag{12}$$

Für das Verhältnis der **Verzweigungsströme** folgt daraus

$$I_1 : I_2 = \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2}, \tag{12a}$$

d. h., diese verhalten sich wie die **Leitwerte.**

P **Probleme**

3.3.1. Änderung des Meßbereiches eines Amperemeters durch Nebenschluß

Ein Strommeßgerät hat einen Meßbereich bis zu 25 μA. Sein Innenwiderstand beträgt $R = 8{,}2\ \text{k}\Omega$. Der Meßbereich soll auf 500 μA erweitert werden. Wie groß muß hierzu der Nebenschlußwiderstand R_{sh} (Shunt) sein (vgl. Bild 3.10)?

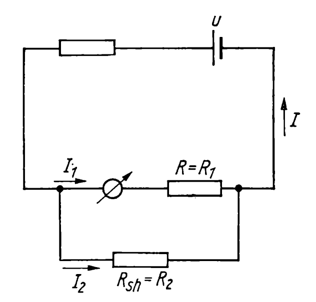


Bild 3.10. Nebenschlußwiderstand R_{sh}

Lösung

Aus den KIRCHHOFFschen Gesetzen (3.3./5) und (3.3./9) folgt nach (3.3./10) und (3.3./11)

$$I_1R_1 - I_2R_2 = 0, \qquad I_1 + I_2 = I. \tag{1}$$

In diesem Gleichungssystem ist $R_1 = 8{,}2\,\mathrm{k\Omega}$ bekannt. Wir setzen $I_1 = 25\,\mu\mathrm{A}$, $I = 500\,\mu\mathrm{A}$ und erhalten damit im Gleichungssystem (1) als Unbekannte die beiden Größen R_2 und I_2. I_2 wird aus der zweiten Gleichung (1) berechnet und ergibt

$$I_2 = I - I_1 = (500 - 25)\,\mu\mathrm{A} = 475\,\mu\mathrm{A}. \tag{2}$$

Mit diesem Wert folgt aus der ersten Gleichung (1)

$$R_{\mathrm{sh}} = R_2 = \frac{I_1 R_1}{I_2} = \frac{25 \cdot 10^{-6} \cdot 8{,}2 \cdot 10^3}{475 \cdot 10^{-6}}\,\Omega = 431{,}5\,\Omega. \tag{3}$$

Die Erweiterung des Meßbereiches auf 500 μA wird durch einen Nebenschlußwiderstand von 431,5 Ω bewirkt. Bei einem kleineren Widerstand verringert sich der Strom durch das Amperemeter. Dagegen führt ein größerer Widerstand dazu, daß die obere Grenze des zulässigen Stromes durch den Hauptschlußwiderstand überschritten und das Meßgerät damit zerstört wird. (3) stellt somit die **obere Grenze** der zulässigen Nebenschlußwiderstände dar.

3.3.2. Verwendung des Strommeßgerätes als Spannungsmesser

Es soll der Spannungsabfall längs eines Widerstandes R_1 gemessen werden. Dazu steht ein Amperemeter mit einem Meßbereich bis zu $I_{0\mathrm{Max}} = 25\,\mu\mathrm{A}$ und einem Innenwiderstand von $R = 8{,}2\,\mathrm{k\Omega}$ zur Verfügung. Zur Messung wird das Gerät im Nebenschluß gemäß Bild 3.11 geschaltet. Berechnen Sie, welchen **Vorschaltwiderstand** R_V man am Instrument anzubringen hat, wenn die auftretende Spannung Werte von maximal $U = 1{,}5$ V erreicht.

Lösung

Nach der aus dem ersten KIRCHHOFFschen Gesetz (3.3./5) folgenden Beziehung (3.3./10) sind die Potentialdifferenzen über die beiden möglichen Stromwege gleich. Es gilt daher (vgl. Bild 3.11)

$$U_1 = R_1 I_1 = (R_V + R)\, I_0. \tag{1}$$

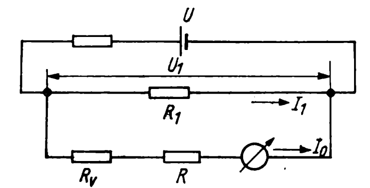


Bild 3.11. Vorschaltwiderstand R_V

Hieraus erhält man

$$I_0 = \frac{U_1}{R_V + R} < \frac{U}{R_V + R} = I_{0\mathrm{Max}}. \tag{2}$$

Wir lösen in (2) nach dem Vorschaltwiderstand R_V auf und erhalten

$$R_V = \frac{U}{I_{0\mathrm{Max}}} - R. \tag{3}$$

Mit den vorgegebenen Zahlen folgt

$$R_V = \left(\frac{1{,}5}{25 \cdot 10^{-6}} - 8{,}2 \cdot 10^3\right)\Omega = 51{,}8 \cdot 10^3\,\Omega.$$

Durch Vergrößerung des Vorschaltwiderstandes wird der durch das Meßgerät fließende Strom verringert. Die berechnete Größe R_V stellt also den **Mindestwert** des vorzuschaltenden Widerstandes dar.

3.3.3. Wheatstonesche Brücke

Zur Messung des unbekannten Widerstandes R_x wird dieser gemäß Bild 3.12 in eine WHEATSTONEsche Brücke geschaltet. Diese enthält einen homogenen Meßdraht der Länge $l = 1$ m. An seine Enden wird eine kleine Meßspannung gelegt. Parallel zum Meßdraht werden der unbekannte Widerstand R_x und ein bekannter Widerstand $R = 500\,\Omega$ in Reihe geschaltet. An den Meßdraht

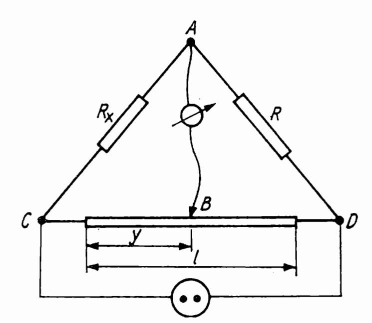


Bild 3.12. WHEATSTONEsche Brücke

wird ein Schleifkontakt gelegt, der mit dem Punkt A zwischen den beiden Widerständen R_x und R verbunden wird. Das Amperemeter in dieser Brücke zeige die Spannung Null für $y = 18{,}5$ cm. Berechnen Sie daraus den Wert des unbekannten Widerstandes R_x.

Lösung

Zwischen den Punkten A und B besteht im allgemeinen eine Potentialdifferenz. Wird diese gleich Null, so ist der Spannungsabfall längs der Meßstrecke y gleich dem Spannungsabfall längs des unbekannten Widerstandes R_x. Es gilt dann

$$U_1 = R_x I_1 = \frac{y}{\gamma}\,\Delta A I_2. \tag{1}$$

Dabei gibt $1/\gamma$ den spezifischen Widerstand, ΔA den Querschnitt des Meßdrahtes an.
Ebenso folgt

$$U_2 = R I_1 = \frac{l - y}{\gamma}\,\Delta A I_2. \tag{2}$$

Wir dividieren (1) durch (2), wobei der Drahtquerschnitt, der spezifische Widerstand und die Ströme herausfallen:

$$\frac{R_x}{R} = \frac{y}{l - y} \qquad \text{bzw.} \qquad R_x = \frac{y}{l - y}\,R. \tag{3}$$

Mit den gegebenen Werten folgt

$$R_x = \frac{18{,}5}{81{,}5} \cdot 500\,\Omega = 113{,}5\,\Omega.$$

Die Meßgenauigkeit hängt maßgeblich von der Homogenität des Drahtes und von der Genauigkeit des Amperemeters in der Brücke ab.

3.3.4. Widerstand des Halbraumes bei Verwendung eines Oberflächenerders

Zur Erdung eines Strahlungsempfängers wird eine metallische Halbkugel in die Erde eingegraben, so daß die Durchmesserebene mit der Erdoberfläche abschließt (vgl. Bild 3.13). Der Radius der Halbkugel ist $r_0 = 25$ cm. Mit dieser Erdung wird als Ausbreitungswiderstand des

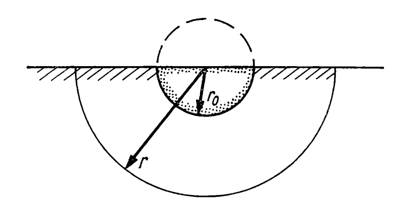


Bild 3.13. Oberflächenerder

Halbraumes bzw. als Erdwiderstand die Größe $R = 12\,\Omega$ gemessen. Berechnen Sie daraus den spezifischen Leitwert des umgebenden Bodens.

Lösung

Wir berechnen zunächst den Halbraumwiderstand bei Verwendung der Halbkugel als Erder. Dazu ergänzen wir den Halbraum mit seinen Stromlinien spiegelbildlich zum Vollraum, die Halbkugel zur Vollkugel. Die Leitfähigkeit bei Ausbreitung des Stromes in den gesamten Raum ist doppelt so groß wie die Leitfähigkeit bei Stromausbreitung in den Halbraum.
Für den gesamten durch die Kugel fließenden Strom $2I$ können wir nach dem zweiten KIRCHHOFFschen Gesetz (3.3./9) schreiben

$$2I = \oint\!\!\!\oint_A \mathfrak{J} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A}. \tag{1}$$

$\mathfrak{J}$ gibt die Stromdichte, A eine beliebige geschlossene Fläche um den Kugelmittelpunkt an. Wählt man für A eine Kugelfläche vom Radius r (vgl. Bild 3.13), so folgt durch Auswertung des Integrals (1)

$$2I = |\mathfrak{J}|\, 4\pi r^2. \tag{2}$$

Wir lösen diese Gleichung nach der Stromdichte $\mathfrak{J}$ auf und verwenden gleichzeitig das OHMsche Gesetz:

$$|\mathfrak{J}(r)| = \gamma\, |\mathfrak{E}(r)| = \frac{I}{2\pi r^2}. \tag{3}$$

Zwischen zwei Kugelschalen mit den Radien r_1 und r_2 besteht die Potentialdifferenz

$$\varDelta\Phi = U = \int_{r_1}^{r_2} \mathfrak{E} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{r} = \frac{I}{2\pi\gamma} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \tag{4}$$

Läßt man r_2 über alle Grenzen wachsen und wählt für r_1 den Radius der Halbkugel, so erhält man damit den **Widerstand des Halbraumes:**

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi r_0 \gamma}. \tag{5}$$

Er ist doppelt so groß wie der Widerstand einer Vollkugel.
Aufgelöst nach der Leitfähigkeit γ folgt

$$\gamma = \frac{1}{2\pi r_0 R}. \tag{6}$$

Mit den vorgegebenen Zahlen erhalten wir

$$\gamma = \frac{1}{2\pi \cdot 0{,}25 \cdot 12} \Omega^{-1}\,\mathrm{m}^{-1} = 5{,}3 \cdot 10^{-2} \Omega^{-1}\,\mathrm{m}^{-1}$$

bzw. für den spezifischen Widerstand des Bodens

$$\frac{1}{\gamma} = 19{,}0 \Omega\,\mathrm{m} = 1{,}9 \cdot 10^7 \Omega\,\mathrm{mm}^2/\mathrm{m}.$$

Wie man aus (5) erkennt, kann der gesamte Erdwiderstand gleichwertig durch einen zylindrischen Leiter ersetzt werden, dessen Länge gleich dem Kugelradius und dessen Querschnitt gleich der halben Kugeloberfläche ist.



Aufgaben

A 3.3.1. Ein Amperemeter hat einen Meßbereich von 0,1 bis 10 mA. Sein Innenwiderstand ist gleich 1,5 kΩ. Welcher Nebenschlußwiderstand R_{sh} ist anzubringen, wenn der Meßbereich bis zu 1 A erweitert werden soll?

A 3.3.2. Ein Amperemeter gestattet Messungen bis zu 100 mA. Sein Innenwiderstand beträgt $R_i = 9{,}5$ kΩ. Um den Meßbereich zu erweitern, wird ein Nebenschlußwiderstand $R_{sh} = 250\,\Omega$ angebracht. Welche Ströme können damit gemessen werden?

A 3.3.3. Welcher Vorschaltwiderstand ist in der vorangegangenen Aufgabe anzubringen, wenn mit dem Meßgerät im Nebenschluß Spannungsabfälle bis zu $U = 10000$ V gemessen werden sollen?

A 3.3.4. Mit einer WHEATSTONEschen Brücke wird ein Widerstand R_x gemessen. Der homogene Meßdraht hat die Länge $l = 50$ cm. Potentialausgleich erfolgt für $y = 14{,}4$ cm. Der bekannte Widerstand befindet sich auf der entgegengesetzten Seite der Meßbrücke und ist gleich $R = 250\,\Omega$. Wie groß ist R_x?

A 3.3.5. Berechnen Sie den Erdwiderstand für einen Boden des mittleren spezifischen Widerstandes $1/\gamma = 8 \cdot 10^7 \Omega\,\mathrm{mm}^2/\mathrm{m}$, wenn in diesen eine metallische Halbkugel mit dem Durchmesser $2r_0 = 50$ cm eingegraben wird.

3.4. Elektrische Ströme und gleichmäßig bewegte Ladungen in Gasen und im Hochvakuum



Einführung

Die MAXWELLschen Gleichungen gestatten keine Aussage über die Träger der Elektrizität. Elektrische Erscheinungen, die auf den Struktureigenschaften der Elektrizitätsträger beruhen, werden durch die MAXWELLsche Kontinuumstheorie nicht erfaßt.
Zu diesen Erscheinungen gehören insbesondere die Gesetze der Elektrizitätsleitung in Gasen, Flüssigkeiten und festen Körpern. Ihre Deutung erfolgt auf Grund einer **atomistischen Theorie.**
Durch die Messung der transportierten elektrischen Ladung und aus der Ablenkung elektrischer Ströme in elektrischen und in magnetischen Feldern werden genaue Aussagen über die Ladungsträger möglich.

Die **Elementarladung** $\boldsymbol{e}$ läßt sich nach der in 3.4.1. dargestellten Schwebemethode von MILLIKAN bestimmen. Dabei wird die konstante Geschwindigkeit einer aus wenigen Elementarladungen bestehenden elektrischen Ladung im elektrischen Feld beobachtet; es liegt also der Grenzfall eines stationären Stromes vor.
Zur Messung der **Elektronenmasse** betrachtet man die Ablenkung von Katoden- oder β-Strahlen durch ein elektrisches und ein senkrecht dazu gerichtetes magnetisches Feld (vgl. 3.4.2.).
Die für Leitungsvorgänge wichtigsten Träger positiver Ladungen sind die **Ionen,** die in Kanalstrahlen auftreten. Ihre Masse kann aus der Strahlablenkung in parallel gerichteten elektrischen und magnetischen Feldern bestimmt werden (vgl. 3.4.3.).



Probleme

3.4.1. Millikan-Versuch

Zur Messung der elektrischen Elementarladung sprüht man nach MILLIKAN Öltröpfchen zwischen die Platten eines Kondensators (vgl. Bild 3.14). Durch den Sprühvorgang werden die Tröpfchen mit einer oder mehreren elektrischen Elementarladungen versehen. Ein Lichtstrahl macht die Öltröpfchen sichtbar, so daß ihr Steigen und Fallen unter dem Einfluß des elektrischen Feldes und der Schwerkraft mit einem Meßfernrohr beobachtet werden kann.

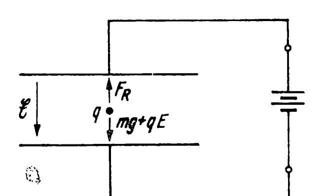


Bild 3.14. Kräfte auf eine Ladung q beim MILLIKAN-Versuch

Die Messung mit dem in Richtung der Schwerkraft eingeschalteten elektrischen Feld der Stärke $E = 10^6\ \mathrm{V\,m^{-1}}$ ergibt bei der Beobachtung über eine längere Zeit die Fallgeschwindigkeit $v_1 = 1{,}930\ \mathrm{mm\,s^{-1}}$. Dagegen erhält man bei dem entgegen der Schwerkraft eingeschalteten Feld gleicher Stärke die Fallgeschwindigkeit $v_2 = 2{,}551\ \mathrm{mm\,s^{-1}}$. Berechnen Sie daraus die Ladung des Teilchens ($g = 9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, Dichte des Öls $\varrho = 0{,}915\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$, dynamische Viskosität der Luft $\eta = 1{,}819 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N\,s\,m^{-2}}$).

Lösung

Wir betrachten zunächst die Bewegung des Öltröpfchens unter dem Einfluß von Schwerkraft und Reibung. Die Schwerkraft ist durch

$$F_\mathrm{S} = mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho g \tag{1}$$

gegeben. Für die Reibungskraft gilt das STOKESsche Gesetz

$$F_\mathrm{R} = -6\pi\eta r v_0, \tag{2}$$

wobei v_0 die konstante Geschwindigkeit des Teilchens angibt. Aus der Gleichgewichtsbedingung $F_\mathrm{S} + F_\mathrm{R} = 0$ erhalten wir durch Auflösen nach v_0

$$v_0 = \frac{2}{9}\frac{\varrho r^2 g}{\eta}. \tag{3}$$

In dieser Gleichung ist nach Messung der Fallgeschwindigkeit v_0 nur der Radius des beobachteten Teilchens unbekannt, der somit bestimmt werden kann.
Mit eingeschaltetem elektrischem Feld folgt anstelle von (1) für die resultierende Kraft

$$F_G = \frac{4}{3} \pi r^3 \varrho g + qE, \tag{4}$$

wobei q die Ladung des Tröpfchens angibt. E ist positiv, wenn das Erdschwere- und das elektrische Feld gleichgerichtet sind, negativ, wenn beide Felder einander entgegenwirken.
Wir bezeichnen mit v_i $(i = 1, 2)$ die Tröpfchengeschwindigkeit im Falle des eingeschalteten elektrischen Feldes. v_i tritt in (2) an die Stelle von v_0. Aus der Gleichgewichtsbedingung $F_R + F_G = 0$ folgt durch Auflösen nach v_i

$$v_i = v_0 + \frac{qE}{6\pi\eta r}. \tag{5}$$

Die Messung von v_0 bei abgeschaltetem elektrischem Feld und von v_i bei bekannter Feldstärke E liefert zwei Gleichungen zur Bestimmung der beiden Unbekannten r und q.
Im vorliegenden Fall wurden v_1 und v_2 gemessen. Nach (5) sind diese Größen durch

$$v_{1,2} = v_0 \pm \frac{q\,|E|}{6\pi\eta r} \tag{6}$$

gegeben. Wir addieren diese beiden Gleichungen, berücksichtigen (3) und lösen nach r auf. Damit erhalten wir

$$r = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\eta(v_1 + v_2)}{\varrho g}}. \tag{7}$$

Subtrahieren wir dagegen (6) von (5) und setzen in den sich ergebenden Ausdruck (7) ein, so folgt durch Auflösen nach der Ladung

$$q = \frac{9\pi\eta^{\frac{3}{2}}}{2\,|E|} \sqrt{\frac{v_1 + v_2}{\varrho g}}\,(v_1 - v_2). \tag{8}$$

Mit den vorgegebenen Zahlen erhalten wir

$$q = \frac{9\pi \cdot (1{,}819 \cdot 10^{-5})^{\frac{3}{2}}}{2 \cdot 10^6} \sqrt{\frac{4{,}481 \cdot 10^{-3}}{0{,}915 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81}}\,(-0{,}621 \cdot 10^{-3})\,\text{As} = -4{,}81 \cdot 10^{-19}\,\text{C}.$$

Zur Messung der Elementarladung e wird eine große Zahl von Öltröpfchen beobachtet. Dabei stellt man fest, daß sämtliche Ladungen q als ganzzahliges Vielfaches einer Elementargröße e geschrieben werden können:

$$q = Ze. \tag{9}$$

Genaue Messungen in der beschriebenen Art ergeben $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ As. Das Elektron hat die Ladung $-e = -1{,}602 \cdot 10^{-19}$ As.
Im vorliegenden Fall trägt das Öltröpfchen somit 3 Elektronenladungen.

3.4.2. Messung der spezifischen Elektronenladung mit dem Braunschen Katodenstrahlrohr

Es soll das Verhältnis zwischen der Elementarladung e und der Elektronenmasse m_e bestimmt werden. Zu diesem Zweck untersucht man in einer BRAUNschen Röhre nach Bild 3.15 die Ablenkung eines Elektronenstrahles durch ein senkrecht dazu gerichtetes elektrisches Feld $\mathfrak{E}$. Die Elektronen durchlaufen dabei einen Kondensator der Länge l_K, durchqueren einen feldfreien Raum und treffen danach mit dem Achsenabstand ϱ_z auf einen Leuchtschirm S. Der Abstand zwischen der Austrittsstelle aus dem elektrischen Feld und dem Leuchtschirm ist gleich l_S.

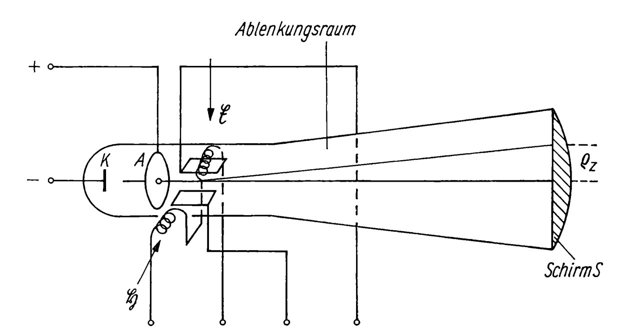


Bild 3.15. BRAUNsche Röhre

Die Ablenkung hängt außer von der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ von der Geschwindigkeit v_0 der Elektronen beim Eintritt in das elektrische Feld ab. Diese ist in der Regel nicht bekannt. Um sie festzustellen, setzt man den Elektronenstrahl zusätzlich einem magnetischen Feld $\mathfrak{H}$ aus. Es ist so gerichtet, daß es der Auslenkung durch das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ entgegenwirkt. Seine Größe wird derart geregelt, daß sich die auslenkenden Kräfte des elektrischen und des magnetischen Feldes gerade aufheben, der Strahl also genau wieder in der Achse verläuft.
Berechnen Sie die spezifische Elektronenladung, wenn folgende Meßdaten vorliegen: $l_K = 5$ mm, $l_S = 25$ cm, $\varrho_z = 3{,}71$ cm, $E = 1000\ \mathrm{V\,m^{-1}}$, $H = 325\ \mathrm{A\,m^{-1}}$.
Welcher Wert ergibt sich für die Elektronenmasse, wenn $e = 1{,}602 \cdot 10^{-15}$ As bekannt ist?

Lösung

Wir betrachten zunächst den Fall, daß nur das elektrische Feld eingeschaltet ist. Durch dieses wirkt auf die Elektronen die Kraft $\mathfrak{F}_e = -e\mathfrak{E}$, die zu einer Beschleunigung $\mathfrak{a}$ führt:

$$\mathfrak{F}_e = -e\mathfrak{E} = m_e\mathfrak{a}. \tag{1}$$

Diese Beschleunigung ist senkrecht zur Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ beim Eintritt in das homogene elektrische Feld des Plattenkondensators gerichtet. Sie überlagert sich auf die Anfangsgeschwindigkeit, die in der Achsenrichtung liegt. Die Elektronen durchlaufen den Kondensator in der Zeit

$$t = \frac{l_K}{v_0}. \tag{2}$$

Sie verlassen ihn mit dem Achsenabstand

$$z = \frac{1}{2}\,at^2. \tag{3}$$

Setzen wir (1) und (2) in (3) ein, so folgt

$$z = -\frac{1}{2}\frac{eEl_{\mathrm{K}}^2}{m_{\mathrm{e}}v_0^2}. \tag{4}$$

Nach Durchlaufen des Kondensators haben die Elektronen außer der Geschwindigkeitskomponente $\mathfrak{v}_0$ in Achsenrichtung eine Geschwindigkeitskomponente in Richtung des elektrischen Feldes der Größe

$$v_z = at = \frac{-eEl_{\mathrm{K}}}{m_{\mathrm{e}}v_0}. \tag{5}$$

Sie treffen infolgedessen mit der Achsenablenkung

$$\varrho_z = z + v_z\frac{l_{\mathrm{S}}}{v_0} = -\frac{1}{2}\frac{eEl_{\mathrm{K}}(l_{\mathrm{K}} + 2l_{\mathrm{S}})}{m_{\mathrm{e}}v_0^2} \tag{6}$$

auf den Schirm.
In (6) ist außer m_{e} die Anfangsgeschwindigkeit v_0 unbekannt. Um diese zu bestimmen, schaltet man ein Magnetfeld $\mathfrak{H}$ ein, das senkrecht zur Anfangsgeschwindigkeit und senkrecht zum elektrischen Feld $\mathfrak{E}$ gerichtet ist. Nach der Lorentz-Gleichung ist die auf ein bewegtes Elektron durch ein Magnetfeld $\mathfrak{H}$ wirkende Kraft gleich

$$\mathfrak{F}_{\mathrm{m}} = -e\mathfrak{v} \times \mathfrak{B} = -\mu_0 e\mathfrak{v} \times \mathfrak{H}. \tag{7}$$

Das Magnetfeld hebt die Auslenkung durch das elektrische Feld gerade auf:

$$\mathfrak{F}_{\mathrm{e}} + \mathfrak{F}_{\mathrm{m}} = 0. \tag{8}$$

Dazu muß nach (1) und (7) die Beziehung

$$E = \mu_0 v_0 H \tag{9}$$

gelten.
Mit den vorgegebenen Zahlen folgt aus (9), wenn wir nach v_0 auflösen,

$$v_0 = \frac{1000}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 325}\ \mathrm{m\,s^{-1}} = 2{,}45 \cdot 10^6\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Diesen Wert können wir in (6) einsetzen und nach der spezifischen Ladung auflösen. Es ergibt sich

$$\frac{e}{m_{\mathrm{e}}} = \frac{2 \cdot 3{,}71 \cdot 10^{-2}(2{,}45 \cdot 10^6)^2}{1000 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}505}\ \mathrm{A\,s\,kg^{-1}} = 1{,}76 \cdot 10^{11}\ \mathrm{C\,kg^{-1}}.$$

Setzt man $e = 1{,}602 \cdot 10^{-91}$ As als bekannt voraus, so erhält man für die Elektronenmasse

$$m_{\mathrm{e}} = \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{kg}}{1{,}76 \cdot 10^{11}} = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}.$$

3.4.3. Messung der spezifischen Ionenladung nach Thomson (Parabelmethode)

Bei einer Gasentladung entstehen einfach positiv geladene Ionen, die sich mit unterschiedlicher Geschwindigkeit bewegen. Um die auftretenden Teilchen zu analysieren, wird ihre spezifische Ladung e/m_{I} bestimmt (m_{I} Ionenmasse). Hierzu werden die Teilchen in Form eines Massenstrahles durch ein Ablenksystem geleitet. Dieses besteht aus einem homogenen elektrischen Feld $\mathfrak{E}$ und einem parallel dazu gerichteten homogenen magnetischen Feld $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ stehen senkrecht zur Strahlrichtung beim Eintritt in das Ablenksystem (vgl. Bild 3.16). Die Ablenkung ist für die einzelnen Teilchen verschieden und hängt von ihrer Anfangsgeschwindigkeit v_0 ab. Nach Durchlaufen des Ablenksystems treffen die Teilchen auf eine Photoplatte, wo ihre Spur sichtbar gemacht werden kann. Sie hat die Form einer Parabel.

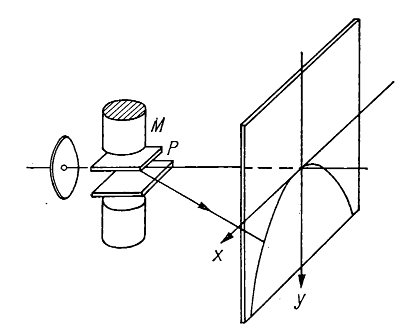


Bild 3.16. THOMSONsche Parabelmethode. M Magnetpole, P Kondensatorplatte

Der Leuchtschirm habe vom Eintrittsspalt den Abstand $l = 30$ cm. Die elektrische Feldstärke betrage $E = 10^6$ V m^{-1}, die magnetische $H = 8 \cdot 10^5$ A m^{-1}. Auf der Photoplatte ergebe sich als Spur der abgelenkten Teilchen die Parabel

$$y^2 = Cx \tag{1}$$

mit

$$C = 0{,}126 \text{ m}. \tag{2}$$

Berechnen Sie daraus die spezifische Ionenladung e/m_{I}.

Lösung

Auf die bewegten, mit einer positiven elektrischen Elementarladung versehenen Teilchen wirkt nach der LORENTZ-Gleichung (3.2./1) die Kraft

$$\mathfrak{F} = e(\mathfrak{E} + \mathfrak{v} \times \mathfrak{B}). \tag{3}$$

Wir wählen die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit als z-Achse, die Richtung der beiden Felder als x-Achse. Bei positiven Ionen führt somit das elektrische Feld zu einer Ablenkung in Richtung der x-Achse, dagegen das Magnetfeld zu einer Ablenkung in Richtung der y-Achse. Für die Ablenkung x durch das elektrische Feld erhalten wir nach (3)

$$x = \frac{1}{2} a_x t^2 = \frac{1}{2} \frac{eE}{m_{\mathrm{I}}} t^2. \tag{4}$$

a_x bedeutet die Beschleunigung durch das elektrische Feld. t bezeichnet die Zeit, gerechnet vom Eintritt des Teilchens in das Ablenksystem.
Um vom Eintrittsspalt bis zur Photoplatte zu gelangen, ist für ein Teilchen mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_z = v_0$ die Zeit

$$t_0 = \frac{l}{v_0} \tag{5}$$

erforderlich. Setzen wir diesen Wert in (4) ein, so folgt für die auf der Platte feststellbare Ablenkung in Richtung der x-Achse

$$x = \frac{eEl^2}{2m_I v_0{}^2}. \tag{6}$$

Die Ablenkung in Richtung der y-Achse kann in gleicher Weise bestimmt werden. Aus (3) und (5) ergibt sich

$$y = \frac{1}{2} \frac{ev_0Bt_0{}^2}{m_I} = \frac{e\mu_0 Hl^2}{2m_I v_0}. \tag{7}$$

In (6) und (7) ist die Anfangsgeschwindigkeit v_0 unbekannt. Wir können diese Größe eliminieren und erhalten

$$y^2 = \frac{e}{m_I} \frac{\mu_0{}^2 H^2 l^2}{2E} x. \tag{8}$$

Durch Vergleich mit (1) folgt

$$C = \frac{e}{m_I} \frac{\mu_0{}^2 H^2 l^2}{2E}. \tag{9}$$

(9) kann nach der spezifischen Ionenladung aufgelöst werden. Setzt man den ermittelten Wert (2) ein, so ergibt sich

$$\frac{e}{m_I} = \frac{0{,}126 \cdot 2 \cdot 10^6}{(4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 8 \cdot 10^5 \cdot 0{,}30)^2} \text{ A s kg}^{-1} = 2{,}77 \cdot 10^6 \text{ C kg}^{-1}.$$

Bei einfach geladenen Ionen erhalten wir daraus für die relative Ionenmasse M_I des Isotops

$$M_I = m_I N_A = \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19}}{2{,}77 \cdot 10^6} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{26} = 34{,}8.$$

Aus Tabellen über die relative Ionenmasse entnimmt man, daß es sich bei der betrachteten Substanz um ein Isotop des Chlors handelt.



Aufgaben

A 3.4.1. Berechnen Sie die elektrische Ladung eines Schwebeteilchens, wenn dieses nur unter dem Einfluß der Schwerkraft die konstante Fallgeschwindigkeit $v_0 = 9{,}68 \text{ mm s}^{-1}$ hat, dagegen bei dem in Richtung der Schwerkraft eingeschalteten elektrischen Feld

$E = 5 \cdot 10^5\,\mathrm{V\,m^{-1}}$ im Fadenkreuz der Meßanordnung verbleibt ($\eta = 1{,}819 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{N\,s\,m^{-2}}$, $g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $\varrho = 0{,}915\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$).

A 3.4.2. Welche elektrische Feldstärke ist erforderlich, um ein Öltröpfchen, das eine elektrische Elementarladung trägt, gegen die Schwerkraft unbeweglich im Fadenkreuz zu halten ($\varrho = 0{,}915\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$, Teilchenradius $r = 1\,\mu\mathrm{m}$)?

A 3.4.3. Berechnen Sie die Fallgeschwindigkeit für ein Öltröpfchen, das eine elektrische Elementarladung trägt. Der Tröpfchenradius ist gleich 10 μm. Das elektrische Feld der Stärke $E = 10^6\,\mathrm{V\,m^{-1}}$ wird einmal parallel, das andere Mal antiparallel zum Erdschwerefeld gerichtet ($\eta = 1{,}819 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{N\,s\,m^{-2}}$, $g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $\varrho = 0{,}915\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$).

A 3.4.4. Welche Geschwindigkeiten ergeben sich in der vorhergehenden Aufgabe, wenn das Öltröpfchen zwei Elementarladungen trägt?

A 3.4.5. Wie groß ist der Ablenkwinkel α für ein Elektron, das senkrecht zu den Feldlinien auf ein homogenes Feld der Stärke $E = 10^4\,\mathrm{V\,m^{-1}}$ trifft und im Feld die Strecke $l = 1$ mm zurücklegt? Die Anfangsgeschwindigkeit des Elektrons beträgt $0{,}01c$. Wie groß ist die Geschwindigkeitskomponente in Feldrichtung nach erfolgter Ablenkung?

A 3.4.6. Um den Elektronenradius r_e abzuschätzen, nimmt man das Elektron als kleine Kugel an, die mit der Ladung e^- versehen ist. Welcher Wert ergibt sich für r_e, wenn die potentielle Energie gleich der Ruhenergie des Elektrons gesetzt wird?

A 3.4.7. Zur Messung der spezifischen Ionenladung nach der Parabelmethode wird ein Magnetfeld der Stärke $H = 5 \cdot 10^5\,\mathrm{A\,m^{-1}}$ und ein elektrisches Feld der Stärke $E = 8 \cdot 10^5\,\mathrm{V\,m^{-1}}$ verwendet. Die Länge der Ablenkplatten beträgt $l = 35$ cm. Berechnen Sie die von den beiden Isotopen des Chlors erzeugten Parabeln. Wie groß ist die auf der Photoplatte festzustellende Ablenkdifferenz zwischen den beiden Parabeln in der Richtung senkrecht zur Anfangsbewegung und senkrecht zum elektrischen Feld, wenn in Richtung des elektrischen Feldes eine Ablenkung von 5 cm erfolgt? Die relativen Isotopenmassen sind gleich 35,0 bzw. 37,0.

3.5. Grundgesetze der elektrischen Leitung in Flüssigkeiten und festen Körpern

E Einführung

Wird ein Stoff AB in einer **Flüssigkeit** gelöst, so bildet sich ein Gleichgewicht zwischen den nichtzerfallenen Molekülen AB und den Ionen A^+, B^- aus:

$$\mathrm{AB} \rightleftarrows \mathrm{A^+} + \mathrm{B^-}. \tag{1}$$

Bei starken Elektrolyten, z. B. bei NaCl, zerfällt der weitaus größte Teil der Moleküle in Ionen Na^+Cl^-. Der **Dissoziationsgrad** α gibt den Anteil der in Ionen zerfallenen Moleküle zur Gesamtzahl der gelösten Moleküle an (vgl. Tabelle 3).
Es bezeichne c die **Konzentration** des gelösten Stoffes, d. h. die Zahl der Kilomol je Kubikmeter bzw. die Zahl der Mol je Liter. Dann gilt

$$c = \frac{m^*}{M}. \tag{2}$$

Darin gibt m^* die Masse des gelösten Stoffes, bezogen auf einen Kubikmeter Flüssigkeit an. M bedeutet die molare Masse ($M = M_r\,\mathrm{kg\,kmol^{-1}}$). Bei einwertigen Elektro-

lyten der Form $AB \rightleftarrows A^+ + B^-$ ist die Zahl der Ladungsträger je Kubikmeter gleich

$$N_+ = N_- = \alpha c N_A. \tag{3}$$

Darin bedeutet

$$\boxed{N_A = 6{,}0220 \cdot 10^{26}\ \text{kmol}^{-1}}$$

die **Avogadrosche Zahl.**

Dagegen ist bei Elektrolyten $A_{Z_1}B_{Z_2} \rightleftarrows Z_2A^{Z_1+} + Z_1B^{Z_2-}$ die Zahl der Ladungsträger durch

$$N_+ = Z_2 \alpha c N_A, \qquad N_- = Z_1 \alpha c N_A \tag{4}$$

gegeben.

Beispiel 10

HBr hat die relative Molekülmasse 80,9. $c = 0{,}10$ mol/l bedeutet also 8,09 kg je m^3 Flüssigkeit. Der Dissoziationsgrad ist nach Tabelle 3 gleich 0,90. Die Zahl der positiven und der negativen Ionen je Kubikmeter ist daher in einer zehntelnormalen Bromsäurelösung gleich

$$N_+ = N_- = 0{,}90 \cdot 0{,}10 \cdot N_A\ \text{kmol/m}^3 = 0{,}09 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{26}\ \text{m}^{-3} = 5{,}42 \cdot 10^{25}\ \text{m}^{-3}.$$

Dagegen folgt für $H_2CO_3 \rightleftarrows 2H^+ + CO_3^{2-}$ mit $\alpha = 0{,}0017$ für $c = 0{,}1$ mol/l:

$$N_+ = 2 \cdot 0{,}0017 \cdot 0{,}1\ N_A\ \text{kmol/m}^3 = 2{,}05 \cdot 10^{23}\ \text{m}^{-3},$$
$$N_- = 1 \cdot 0{,}0017 \cdot 0{,}1\ N_A\ \text{kmol/m}^3 = 1{,}02 \cdot 10^{23}\ \text{m}^{-3}.$$

Durch ein von außen angelegtes Feld werden die positiv geladenen Kationen A^+ zur Katode, die negativ geladenen Anionen B^- zur Anode gezogen. Die **Elektrizitätsleitung durch Flüssigkeiten** ist daher mit einem Massentransport verbunden. An der Anode geben die Anionen B^- ihre Ladung ab, der Stoff B wird abgeschieden. Die Kationen A^+ geben ihre Ladung an der Katode ab, der Stoff A wird abgeschieden.
Bei **einfach geladenen Ionen** ist der Ausgleich einer Elementarladung mit dem Abscheiden einer Atomgruppe A bzw. B verbunden. Das Abscheiden eines Kilomols mit einer einwertigen Atomgruppe bedeutet daher, daß zu jeder Elektrode die elektrische Ladung

$$\pm N_A e = \pm F \tag{5}$$

gewandert ist. F wird als **Faradaysche Konstante** bezeichnet. F hat den Wert

$$\boxed{F = 6{,}0220 \cdot 10^{26} \cdot 1{,}6022 \cdot 10^{-19}\ \text{As kmol}^{-1} = 9{,}6485\ \text{C kmol}^{-1}}. \tag{5a}$$

Beispiel 11

In einer Silbernitratlösung zerfällt das Molekül $AgNO_3$ in die Ionen Ag^+ und NO_3^-. An der Katode wird 1 kmol (107,87 kg) Silber abgeschieden, wenn ein Ladungsausgleich von

$$q = \int I\, dt = 9{,}6485 \cdot 10^7\ \text{As}$$

erfolgt ist. Es wird somit

$$\frac{M}{F} = \frac{107{,}87\ \text{kg/kmol}}{9{,}6485 \cdot 10^7\ \text{A s/kmol}} = 1{,}118\ \text{mg As}^{-1} \tag{6}$$

Silber abgeschieden (mit $M = A_r$ kg/kmol als molare Masse; A_r bezeichnet die relative Atommasse).

Allgemein wird die Menge des abgeschiedenen Stoffes durch die FARADAYschen Gesetze der Elektrolyse bestimmt (vgl. 3.5.1.). Elektrolytisch abgeschiedene Stoffmengen lassen sich sehr genau messen. Aus der Masse des abgeschiedenen Silbers und seiner relativen Atommasse kann daher nach (3) die FARADAYsche Konstante $F = N_A e$ bestimmt werden. Da e aus dem Millikanversuch 3.4.1. bekannt ist, liefert die Messung von F gleichzeitig ein Verfahren zur Messung der AVOGADROschen Zahl N_A. Die AVOGADROsche Zahl und die BOLTZMANN-Konstante $k = 1{,}3807 \cdot 10^{-23}$ J K^{-1} sind mit der Gaskonstanten $R = 8{,}314 \cdot 10^3$ J K^{-1} kmol^{-1} durch die Beziehung

$$\boxed{N_A k = R} \tag{7}$$

verknüpft. R ist aus Messungen über die Eigenschaften der Gase genau bekannt. Die Messung von F bzw. N_A liefert somit auch ein Verfahren zur Messung von k. Seine Messung kann ebenfalls auf spektroskopischem Weg erfolgen (vgl. [25] 4.2.), wobei sich genaue Übereinstimmung der auf zwei völlig verschiedenen physikalischen Wegen abgeleiteten Größen ergibt.

Bei den **elektrischen Leitungsvorgängen** in Flüssigkeiten und festen Körpern bewegen sich positive und negative elektrische Ladungen unter dem Einfluß eines elektrischen Feldes. Es bezeichne N_+ die Zahl der Träger positiver Ladung je Raumeinheit, N_- die entsprechende Zahl der Träger negativer Ladungen. Z_+ und Z_- kennzeichnen die Zahl der Ladungen je Ladungsträger. $\mathfrak{v}_+$ bzw. $\mathfrak{v}_-$ geben die mittleren **Driftgeschwindigkeiten** der Ladungsträger unter dem Einfluß des elektrischen Feldes an. Sie sind klein gegen die mittleren Geschwindigkeiten der Teilchen und dürfen mit diesen nicht verwechselt werden (vgl. 3.5.2. und 3.5.3.).

Für die von den positiven bzw. negativen Ladungsträgern verursachte elektrische Stromdichte gilt

$$\mathfrak{j}_+ = N_+ Z_+ e \mathfrak{v}_+, \qquad \mathfrak{j}_- = -N_- Z_- e \mathfrak{v}_-. \tag{8}$$

Die resultierende Stromdichte ist gleich

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{j}_+ + \mathfrak{j}_- = (N_+ Z_+ \mathfrak{v}_+ - N_- Z_- \mathfrak{v}_-)\, e. \tag{9}$$

Dabei ist zu beachten, daß die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_+$ und $\mathfrak{v}_-$ einander entgegengerichtet sind. Nach dem OHMschen Gesetz besteht die Beziehung

$$\mathfrak{J} = \gamma \mathfrak{E}. \tag{10}$$

Im folgenden wird vorausgesetzt, daß die elektrolytische Substanz in der Flüssigkeit nur in sehr geringer Konzentration vorhanden ist. Die Geschwindigkeit der Ladungs-

träger wächst dann proportional dem äußeren elektrischen Feld. Sie ist bei positiven Ladungen dem äußeren Feld gleich-, bei negativen Ladungen dem äußeren Feld entgegengerichtet. Man schreibt daher

$$\mathfrak{v}_+ = b_+\mathfrak{E}, \qquad \mathfrak{v}_- = -b_-\mathfrak{E} \tag{11}$$

und definiert die Skalare b_+ bzw. b_- als **Beweglichkeit der Ladungsträger.** Durch Einführen von (11) in (8) folgt

$$\mathfrak{J} = (N_+Z_+b_+ + N_-Z_-b_-)\, e\mathfrak{E}. \tag{12}$$

Die Leitfähigkeit ist also nach dem Ohmschen Gesetz (10) durch

$$\gamma = (N_+Z_+b_+ + N_-Z_-b_-)\, e \tag{13}$$

gegeben. Bei nach außen hin neutralen Lösungen ist

$$N_+Z_+ = N_-Z_- = NZ, \tag{14}$$

so daß man anstelle von (13) die Gleichung

$$\gamma = NZ(b_+ + b_-)\, e \tag{15}$$

erhält.
Die Messung der Leitfähigkeit eines Stoffes liefert nach (15) nur die Summe der Beweglichkeiten aller Ladungsträgersorten. Um die Beweglichkeit einer Ionenart zu bestimmen, ist es erforderlich, den von ihr verursachten elektrischen Strom unabhängig von den anderen Ionen zu bestimmen bzw. die Stromdichte einer Ionenart im Verhältnis zur gesamten Stromdichte festzustellen. Das geschieht am einfachsten nach der Methode der wandernden Grenzschicht (vgl. 3.5.2.). Aus diesen Messungen ergibt sich nach (8), (10) und (11), wenn man (14) berücksichtigt,

$$\frac{|\mathfrak{j}_+|}{|\mathfrak{J}|} = \frac{b_+}{b_+ + b_-}. \tag{16}$$

Das Verhältnis (16) wird nach Hittorf als **relative Überführungszahl** der positiven Ionen bezeichnet. Wie aus (16) hervorgeht, ist die Summe der relativen Überführungszahlen gleich eins.
Die Beweglichkeit eines Ions hängt nur im Grenzfall **unendlicher Verdünnung** von ihm allein und dem Lösungsmittel ab. Bei endlicher Konzentration wirken sämtliche beteiligten Reaktionspartner auf die Beweglichkeit eines Ions mit. Infolgedessen stellen die abgeleiteten Formeln nur erste Näherungen dar.
In Tabelle 4 sind die Beweglichkeiten verschiedener Ionen zusammengestellt. Sie werden üblicherweise auf die Faradaysche Konstante bezogen. Die absoluten Zahlen erhält man daraus nach Beispiel 12 im Anschluß an Tabelle 4.
In **festen Körpern,** insbesondere bei den metallischen Leitern, erfolgt die Elektrizitätsleitung im wesentlichen durch Teilchen einer Sorte, in der Regel durch Elektronen. Die elektrische Stromdichte wird für Elektronen nach (9) durch

$$\mathfrak{J} = -N_-e\mathfrak{v}_- = Ne\mathfrak{v} = Neb\mathfrak{E}, \tag{17}$$

die elektrische Leitfähigkeit nach (10) und (11) durch

$$\gamma = Neb \tag{18}$$

dargestellt. $\mathfrak{v}$ ist in (17) dem Elektronenstrom entgegen, dem elektrischen Feld parallel gerichtet. N bezeichnet die Zahl der Teilchen je Raumeinheit.
Im Gegensatz zur Elektrizitätsleitung durch Flüssigkeiten ist bei festen Körpern die Zahl der Ladungsträger N nicht bekannt. Da auch die Beweglichkeit b der Ladungsträger nicht bekannt ist, liefert die Messung der Leitfähigkeit auch bei festen Körpern nur eine Gleichung für zwei Unbekannte. Eine zweite Gleichung zur Bestimmung von N und b ergibt sich aus der Ablenkung des Elektronenstroms durch ein magnetisches Feld. Die hierauf beruhende physikalische Erscheinung bei der Elektrizitätsleitung in festen Körpern wird als **Hall-Effekt** bezeichnet. Der HALL-Effekt wird in 3.5.5. behandelt.
Wie die Messung der elektrischen Leitfähigkeit und des HALL-Effektes zeigt, ist bei einer Reihe von Metallen, z. B. bei Kupfer und bei Silber, die Zahl der Leitungselektronen genähert gleich der Zahl der Atome. Dagegen zeigen andere Metalle, z. B. Wismut, ein Differieren um Größenordnungen zwischen den genannten Größen (vgl. Tabelle 5).

Tabelle 3. Dissoziationsgrad α bei Zimmertemperatur

Säuren und Laugen

Stoff	Konzentration c in mol l^{-1}	α
HBr	0,1	0,90
H_2CO_3	0,1	0,0017
$Ca(OH)_2$	0,1	0,90
HCl	1	0,78
KOH	1	0,77
NaOH	1	0,73

Salze

Stoff	c in mol l^{-1}	0,1	0,01	0,001
A^+B^- (z. B. KCl)		0,83	0,93	0,98
$A^{++}(B^-)_2$ (z. B. $BaCl_2$)		0,75	0,87	0,95
$(A^+)_2B^{--}$ (z. B. K_2SO_4)		0,75	0,87	0,95
$A^{++}B^{--}$ (z. B. $BaSO_4$)		0,40	0,65	0,75

Tabelle 4. Ionenbeweglichkeit b bei unendlicher Verdünnung

Ion	b in Ω^{-1} m^2 kmol^{-1} F^{-1}	Ion	b in Ω^{-1} m^2 kmol^{-1} F^{-1}
H^+	315	OH^-	174
Na^+	42,6	F^-	47,6
K^+	63,7	Cl^-	66,3

Fortsetzung Tabelle 4

Ion	b in Ω^{-1} m^2 kmol^{-1} F^{-1}	Ion	b in Ω^{-1} m^2 kmol^{-1} F^{-1}
Cs^+	66,8	Br^-	68,2
Ag^+	53,2	J^-	66,8
Cu^{++}	45,3	ClO_3^-	55,8
Zn^{++}	45	BrO_3^-	49
Fe^{++}	45	NO_3^-	62,6
Fe^{+++}	61	CH_3COO^-	35
Ca^{++}	50,4	SO_4^{--}	68,7

Beispiel 12

Es soll die Beweglichkeit der Kalium-Ionen bestimmt werden. Aus

$$b_K = 63{,}7\,\Omega^{-1}\,\mathrm{m^2\,kmol^{-1}}\,F^{-1}$$

folgt mit $F = 9{,}65 \cdot 10^7$ As kmol^{-1}

$$b_K = \frac{63{,}7\ \mathrm{V^{-1}\,A\,m^2\,kmol^{-1}}}{9{,}65 \cdot 10^7\ \mathrm{As\,kmol^{-1}}} = 0{,}66 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m/s\,V\,m^{-1}} = 0{,}66 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2\,V^{-1}\,s^{-1}}.$$

Das bedeutet: In einem Feld der Stärke 10^3 V m^{-1} driften die Ionen in einer Sekunde um die Strecke 0,66 mm in Feldrichtung.



Probleme

3.5.1. Faradaysche Gesetze der Elektrolyse

An eine stark verdünnte Lösung von $CuSO_4$ wird eine elektrische Spannung gelegt, wodurch es an der Katode zur Abscheidung von Kupfer kommt. Die Abscheidung erfolgt über eine Zeit von $t = 1$ h, wobei die konstante Stromstärke $I = 10$ A aufrechterhalten wird. Wie groß ist die Menge des abgeschiedenen Kupfers ($A_{Cu} = 63{,}54$, $Z_{Cu} = 2$)? Welche Menge wird abgeschieden, wenn die Lösung ein Chromsalz enthält ($A_{Cr} = 52{,}00$, $Z_{Cr} = 3$)?

Lösung

Die Moleküle des gelösten Salzes setzen sich aus den Z-fach positiv geladenen Kationen und den Z-fach negativ geladenen Anionen zusammen. Im vorliegenden Fall werden die Kationen von den zweifach positiv geladenen Kupferionen Cu^{++} repräsentiert, die Anionen von der Gruppe SO_4^{--}. Unter dem Einfluß des elektrischen Feldes wandern die Kationen zur Katode, die Anionen zur Anode. Dabei trägt jede positive elektrische Ladung e^+ die Masse

$$\Delta m = \frac{M}{ZN_A}, \tag{1}$$

wobei $M = A_r$ kg kmol^{-1} die molare Masse der Kationen angibt. Durch N Elementarladungen wird die Masse

$$m = N\,\Delta m = \frac{NM}{ZN_A} \tag{2}$$

abgeschieden. Die gesamte zur Katode gewanderte Ladung ist mit dem Strom I und der Zeit t durch die Beziehung

$$Ne = It \tag{3}$$

gegeben. Wir setzen (3) in (2) ein und erhalten für die abgeschiedene Masse

$$m = \frac{M}{ZN_{\mathrm{A}}e} It. \tag{4}$$

Hierin bezeichnet

$$N_{\mathrm{A}}e = F = 9{,}6485 \cdot 10^7 \text{ As kmol}^{-1} \tag{5}$$

die FARADAY-Konstante.
Als **elektrochemisches Äquivalent** definiert man

$$\boxed{k = \frac{M}{ZF}}. \tag{6}$$

Mit diesem ergibt sich aus (4) das

1. Faradaysche Gesetz

$$\boxed{m = kIt = \frac{M}{ZF} It}. \tag{7}$$

Als Verhältnis der abgeschiedenen Massen bei gleichem Wert It folgt aus (7) bzw. (4) das

2. Faradaysche Gesetz

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{M_1/Z_1}{M_2/Z_2}}. \tag{8}$$

Mit den vorgegebenen Zahlen erhalten wir für die Masse abgeschiedenen Kupfers aus (4)

$$m_{\mathrm{Cu}} = \frac{63{,}54}{2 \cdot 9{,}65 \cdot 10^7} \text{ kg A}^{-1}\text{ s}^{-1} \cdot 10 \cdot 3600 \text{ As}$$
$$= 0{,}3293 \text{ mg A}^{-1}\text{ s}^{-1} \cdot 10 \cdot 3600 \text{ As} = 11{,}86 \text{ g}.$$

Die Größe $k_{\mathrm{Cu}} = 0{,}3293$ mg A^{-1} s^{-1} bezeichnet das elektrochemische Äquivalent des zweiwertigen Kupfers.
Für die Masse des abgeschiedenen Chroms ergibt sich aus (8)

$$m_{\mathrm{Cr}} = \frac{52{,}00 \cdot 2}{3 \cdot 63{,}54} \cdot 11{,}86 \text{ g} = 6{,}47 \text{ g}.$$

3.5.2. Ionenbeweglichkeit und relative Überführungszahl

In einem graduierten Rohr (vgl. Bild 3.17) wird eine Lösung aus Kupferchlorid auf eine Lösung aus Eisenchlorid geschichtet, so daß eine deutlich erkennbare Schichtgrenze entsteht. Die beiden Lösungen sind an ihrer Färbung deutlich zu erkennen; es können jedoch auch kompliziertere

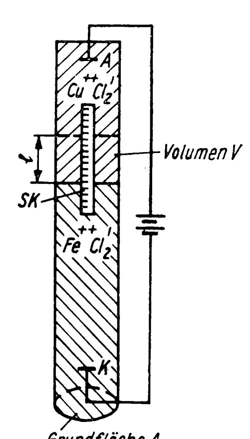


Bild 3.17. Messung der relativen Überführungszahl in einem graduierten Rohr

optische Beobachtungsmethoden angewandt werden. Bei der Elektrolyse wird ein Strom von $I = 19{,}56$ mA festgestellt. Das Rohr hat den Querschnitt $A = 15{,}0\ \text{mm}^2$. Die Grenzschicht wandert in der Zeit $\Delta t = 254{,}5$ s über eine Strecke von $\Delta l = 8{,}00$ cm nach oben. In der Flüssigkeit von 100 cm³ sind 1,345 g Kupferchlorid gelöst. Für die Leitfähigkeit der Lösung wird der Wert $\gamma = 1{,}942\,\Omega^{-1}\,\text{m}^{-1}$ gemessen. Welche Werte ergeben sich für die Beweglichkeit der Kupferionen und für die Beweglichkeit der Chlorionen?

Lösung

Nach (3.5./12) ist die elektrische Stromdichte durch die Gleichung

$$\mathfrak{J} = (N_+Z_+b_+ + N_-Z_-b_-)\, e\mathfrak{E} \tag{1}$$

bestimmt. $\mathfrak{J} = \mathfrak{j}_+ + \mathfrak{j}_-$ setzt sich aus dem Strom $\mathfrak{j}_+$ der Kationen und dem Strom $\mathfrak{j}_-$ der Anionen zusammen. Im Falle $N_+Z_+ = N_-Z_- = NZ$ ist

$$\mathfrak{j}_+ = NZb_+e\mathfrak{E}, \qquad \mathfrak{j}_- = NZb_-e\mathfrak{E}. \tag{2}$$

Das OHMsche Gesetz besagt nach (3.5./15)

$$\gamma = NZe(b_+ + b_-). \tag{3}$$

Damit liegt eine Gleichung zur Bestimmung von b_+ und b_- vor.
Wie die Untersuchung über die wandernde Grenzfläche ergibt, werden in der Zeit Δt die Ionen im raumfesten Volumen $\Delta V = A\,\Delta l$ durch andere ersetzt. Hierdurch entsteht ein Ionenstrom der Stärke

$$I_+ = A\,|\mathfrak{j}_+| = \frac{NZe\,\Delta V}{\Delta t}. \tag{4}$$

Andererseits können wir den Strom positiver Ionen durch $\mathfrak{j}_+$ ausdrücken. Durch Vergleich mit (4) erhalten wir

$$\frac{\Delta l}{\Delta t} = b_+ |\mathfrak{E}|. \tag{5}$$

Nach (1) kann die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ durch den Gesamtstrom $A\mathfrak{J}$ ausgedrückt werden:

$$|\mathfrak{E}| = \frac{I}{NZ(b_+ + b_-)\, eA}. \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt eine zweite Gleichung zur Bestimmung der Ionenbeweglichkeiten:

$$\frac{b_+}{b_+ + b_-} = \frac{NZe}{I} A \frac{\Delta l}{\Delta t}. \tag{7}$$

Die Zahl der Ladungsträger je Raumeinheit ergibt sich aus der Konzentration c der Lösung und dem Dissoziationsgrad α:

$$N_+ = \alpha c N_{\mathrm{A}}. \tag{8}$$

Im vorliegenden Fall ist die relative Molekülmasse gleich 134,5, die Konzentration also $c = 0{,}01$ g/l. Dem entspricht nach Tabelle 3 der Dissoziationsgrad $\alpha = 0{,}87$. Daraus folgt wegen $Z_+ = 2$

$$NZ = 2 \cdot 0{,}87 \cdot 0{,}01 N_{\mathrm{A}} = 0{,}0174 N_{\mathrm{A}}.$$

Wir berücksichtigen $N_{\mathrm{A}} e = F = 9{,}648 \cdot 10^7$ As kmol^{-1} und erhalten aus (3)

$$1{,}942 \text{ V}^{-1}\,\text{m}^2\,\text{s}^{-1} = 0{,}0174 \cdot 9{,}648 \cdot 10^7 (b_+ + b_-),$$

während aus (7)

$$\frac{b_+}{b_+ + b_-} = \frac{0{,}0174 \cdot 9{,}648 \cdot 10^7}{19{,}56 \cdot 10^{-3}} \cdot 15 \cdot 10^{-6}\, \frac{8 \cdot 10^{-2}}{254{,}5} = 0{,}405$$

folgt. Durch Auflösung des Gleichungssystems ergibt sich

$$b_+ = \frac{45{,}2\,\Omega^{-1}\,\text{m}^2\,\text{kmol}^{-1}}{F} = 4{,}68 \cdot 10^{-7} \text{ m/s V m}^{-1},$$

$$b_- = \frac{66{,}4\,\Omega^{-1}\,\text{m}^2\,\text{kmol}^{-1}}{F} = 6{,}88 \cdot 10^{-7} \text{ m/s V m}^{-1}.$$

Die Driftgeschwindigkeiten sind also sehr niedrig.

3.5.3. Driftgeschwindigkeit der Elektronen in festen Körpern

An eine Kupferleitung wird die Feldstärke $E = 0{,}1$ V m^{-1} gelegt. Wie groß ist die Driftgeschwindigkeit der Elektronen? Kupfer hat die elektrische Leitfähigkeit $\gamma = 0{,}57 \cdot 10^8\,\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$, die Massendichte $\varrho = 8{,}9$ g cm^{-3}, die relative Atommasse $A_{\mathrm{r}} = 63{,}5$.

Lösung

Infolge des elektrischen Feldes $\mathfrak{E}$ führen die Elektronen eine Driftbewegung entgegen der Feldrichtung aus. Die Driftgeschwindigkeit werde mit $\mathfrak{v}_- = -\mathfrak{v}$ bezeichnet. N gebe die Zahl der Elektronen je Raumeinheit (m³) an. Als Stromdichte folgt

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{i}_- = -Ne\mathfrak{v}_- = Ne\mathfrak{v}. \tag{1}$$

Die Zahl N der Leitungselektronen kann angenähert gleich der Zahl n der Atome gesetzt werden, da ungefähr jedes Kupferatom ein Leitungselektron liefert. Für die Zahl der Atome je Raumeinheit erhalten wir

$$n = \frac{\varrho}{m_A} = \frac{\varrho}{A_r \text{ kg kmol}^{-1}} N_A, \tag{2}$$

wobei m_A die Masse eines Atoms angibt.
Die Stromdichte bei bekannter Leitfähigkeit und bekannter Feldstärke folgt aus dem OHMschen Gesetz

$$\mathfrak{J} = \gamma\mathfrak{E}. \tag{3}$$

Wir denken uns einen homogenen Leiter, dessen Querschnitt gleich der Flächeneinheit ist (1 m²). Der Betrag des Vektors $\mathfrak{J}$ gibt die Ladung an, die in der Zeiteinheit (1 s) einen bestimmten Querschnitt A_0 des homogenen Leiters passiert:

$$\mathfrak{J} = \gamma \cdot \mathfrak{E} = -Ne\mathfrak{v}. \tag{4}$$

Hieraus erhalten wir für die Driftgeschwindigkeit der Elektronen

$$\mathfrak{v} = \frac{\gamma\mathfrak{E}}{Ne} = \frac{\gamma\mathfrak{E}}{\varrho N_A e} A_r \text{ kg kmol}^{-1}. \tag{5}$$

Mit den vorgegebenen Zahlen folgt

$$v = \frac{0{,}57 \cdot 10^8 \cdot 0{,}1 \cdot 63{,}5}{8{,}9 \cdot 10^3 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{26} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} \text{ m s}^{-1} = 0{,}41 \text{ mm s}^{-1}.$$

Auch in festen Körpern ist die Driftgeschwindigkeit also sehr klein.

3.5.4. Ohmsches Gesetz

In einem Kupferblock mit dem Volumen 1 m³ beträgt die Innere Energie der Leitungselektronen bei 300 K $U = 1{,}69 \cdot 10^{11}$ J (vgl. [25] 3.4.1.). Die mittlere freie Weglänge der Elektronen zwischen zwei Zusammenstößen mit Kupferatomen ist durch die Gleichung

$$\lambda = \frac{1}{4\sqrt{2}\,\pi r_0^2 N} \tag{1}$$

gegeben [vgl. [25], Gl. (3.4./5)]. Darin bedeutet r_0 den Radius des Wirkungsquerschnittes eines Kupferatoms, N die Zahl der Leitungselektronen je m³. Zusammenstöße zwischen Elektronen können wegen der geringen Ausdehnung der Elektronen vernachlässigt werden.
Wird an ein Metall eine Spannung gelegt, so wirkt auf jedes Leitungselektron eine Kraft, die es in Richtung des elektrischen Feldes beschleunigt. Während der Zeit zwischen zwei Stößen erwirbt

das Elektron eine Driftgeschwindigkeit v, die für den entstehenden elektrischen Strom verantwortlich ist. Bei jedem Zusammenstoß verliert das Elektron die Driftgeschwindigkeit wieder.
Leiten Sie nach diesem Modell eine Gleichung zwischen der mittleren freien Weglänge, der mittleren Elektronengeschwindigkeit u und der Driftgeschwindigkeit v her. Bestimmen Sie aus der Leitfähigkeit $\gamma = 0{,}57 \cdot 10^8 \Omega^{-1}\,\mathrm{m}^{-1}$ des Kupfers den Wirkungsquerschnitt der Kupferatome für Stöße mit Leitungselektronen. Nach 3.5.3. kann die Zahl der Leitungselektronen für Kupfer gleich $N = 8{,}4 \cdot 10^{28}\,\mathrm{m}^{-3}$ gesetzt werden.

Lösung

Die mittlere Geschwindigkeit u der Leitungselektronen ist mit der Inneren Energie des Elektronengases durch

$$U = \frac{Nm_e}{2} u^2 \qquad \text{bzw.} \qquad u = \sqrt{\frac{2U}{Nm_e}} \tag{2}$$

verknüpft. Bei fehlendem elektrischem Feld sind die Elektronengeschwindigkeiten über alle Richtungen gleich verteilt.
Zwischen zwei Zusammenstößen vergeht im Mittel die Zeit

$$\Delta t = \frac{\lambda}{u}. \tag{3}$$

Unmittelbar nach dem Zusammenstoß hat das Elektron die Driftgeschwindigkeit Null. Am Ende der Zeit Δt hat es nach dem zweiten NEWTONschen Axiom die Geschwindigkeit

$$\mathfrak{v}_{\Delta t} = \frac{-e\mathfrak{E}}{m_e} \Delta t = -\frac{e\lambda\mathfrak{E}}{m_e u} \tag{4}$$

erlangt. Im Mittel besitzt ein Elektron somit die Driftgeschwindigkeit

$$\mathfrak{v} = -\frac{1}{2} \frac{e\lambda}{m_e u} \mathfrak{E}. \tag{5}$$

Nach (3.5./5) ist die durch den Elektronenfluß verursachte Stromdichte gleich

$$\mathfrak{j} = \mathfrak{j}_- = -eN\mathfrak{v} = \frac{1}{2} \frac{e^2\lambda N}{m_e u} \mathfrak{E}. \tag{6}$$

Aus dem Vergleich mit dem OHMschen Gesetz erhalten wir somit

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{e^2\lambda N}{m_e u}. \tag{7}$$

Nach (2) folgt für die mittlere Geschwindigkeit der nach allen Richtungen sich bewegenden Elektronen

$$u = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}68 \cdot 10^{11}}{8{,}4 \cdot 10^{28} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}}\ \mathrm{m\,s^{-1}} = 2{,}10 \cdot 10^6\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Dagegen liegt nach 3.5.3. die Driftgeschwindigkeit nur in der Größenordnung $\mathrm{mm\,s^{-1}}$.

Für den Radius des Wirkungsquerschnittes ergibt sich aus (7) und (1)

$$r_0 = \frac{e}{\sqrt{8\sqrt{2}\;\pi \gamma m_e u}}, \tag{8}$$

mit den vorgegebenen Zahlenwerten

$$r_0 = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}}{\sqrt{8{,}0 \cdot 1{,}41 \cdot \pi \cdot 0{,}57 \cdot 10^8 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 2{,}1 \cdot 10^6}}\ \mathrm{m} = 2{,}6 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{m}.$$

Das Kupferatom hat den Radius $1{,}3 \cdot 10^{-10}$ m. Die Leitungselektronen werden also durch die äußeren Elektronen der Kupferatome nur wenig beeinflußt.

3.5.5. Hall-Effekt

Ein Streifen aus Wismut wird von elektrischem Strom I durchflossen. Er befindet sich in einem homogenen Magnetfeld $\mathfrak{B}$, dessen Feldlinien den Leiter senkrecht durchsetzen (vgl. Bild 3.18). Infolge dieses Feldes wirkt nach der LORENTZ-Gleichung auf die elektrischen Ladungsträger eine Kraft. Sie führt dazu, daß sich die Elektronen auf dem oberen Teil des Streifens in Bild 3.18 an-

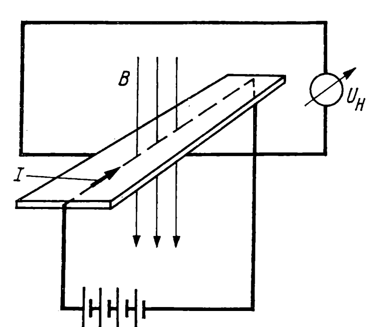


Bild 3.18. Messung der HALL-Spannung in einem Elektronenleiter

reichern. Hierdurch entsteht zwischen dem oberen und dem unteren Streifenende eine elektrisch Spannung U_H, die als HALL-Spannung bezeichnet wird. Der Wismutstreifen habe die Breite $a = 10$ cm, die Dicke $d = 1$ mm und die Länge $l = 1$ m. Die Stromstärke quer zu den magnetischen Feldlinien betrage $I = 10$ A. Das magnetische Feld besitze die Flußdichte $B = 0{,}7\ \mathrm{V\,s\,m^{-2}}$. Dabei wird die Hall-Spannung $U_H = 3{,}5 \cdot 10^{-3}$ V gemessen. Berechnen Sie daraus die Beweglichkeit b der Elektronen in Wismut. Wie groß ist die Driftgeschwindigkeit, wie groß die Zahl der Ladungsträger? Vergleichen Sie die Zahl der Elektronen je Raumeinheit mit der Zahl der Atome je Raumeinheit ($\varrho = 9{,}8\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$, $A_r = 209{,}0$, $\gamma = 8{,}6 \cdot 10^5\ \mathrm{V\,m\,A^{-1}}$).

Lösung

Unter dem Einfluß des magnetischen Feldes wirkt auf ein Elektron mit der Ladung $-e$ die Kraft

$$\mathfrak{F}_m = -e\,\mathfrak{v} \times \mathfrak{B}. \tag{1}$$

In Bild 3.18 wird daher in der Richtung nach rechts auf jedes Elektron im Mittel die Kraft

$$F_{\mathrm{m}} = evB \tag{2}$$

wirksam. Sie führt dazu, daß sich die Elektronen im oberen Teil des Streifens ansammeln. Dadurch entstehen abstoßende Kräfte, d. h., es wird ein elektrisches Feld $\mathfrak{E}_{\mathrm{H}}$ aufgebaut. Man bezeichnet dieses als HALL-Feld. Im Gleichgewichtszustand besteht die Beziehung

$$-e\,\mathfrak{v} \times \mathfrak{B} - e\mathfrak{E}_{\mathrm{H}} = 0. \tag{3a}$$

Hieraus folgt für die HALL-Feldstärke

$$E_{\mathrm{H}} = vB \qquad \text{bzw.} \qquad \mathfrak{E}_{\mathrm{H}} = -\mathfrak{v} \times \mathfrak{B}. \tag{3}$$

Die Stromstärke I läßt sich durch die Dichte N und die Geschwindigkeit v der Ladungsträger ausdrücken:

$$I = NevA = Nevad. \tag{4}$$

$A = ad$ bezeichnet den Leiterquerschnitt. Wir lösen (4) nach v auf und setzen diese Größe in (3) ein. Damit ergibt sich

$$E_{\mathrm{H}} = \frac{IB}{NeA} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathfrak{E}_{\mathrm{H}} = -\frac{\mathfrak{J} \times \mathfrak{B}}{Ne}. \tag{5}$$

Für die der Messung zugängliche HALL-Spannung erhält man

$$U_{\mathrm{H}} = E_{\mathrm{H}} a = \frac{IB}{Ned}. \tag{6}$$

Allgemein schreibt man Gleichung (5) bei Elektronenleitung in der Form

$$\mathfrak{E}_{\mathrm{H}} = R_{\mathrm{H}}\, \mathfrak{J} \times \mathfrak{B}, \tag{7a}$$

Gleichung (6) in der Form

$$U_{\mathrm{H}} = -R_{\mathrm{H}} \frac{IB}{d}. \tag{7b}$$

Die Größe

$$\boxed{R_{\mathrm{H}} = \frac{1}{Ne^-} = -\frac{1}{Ne}} \tag{8}$$

wird als HALL-Konstante bezeichnet. R_{H} ist bei Elektronenleitung negativ. Erfolgt dagegen die Elektrizitätsleitung durch positive Ladungsträger, so ist

$$R_{\mathrm{H}} = \frac{1}{Ne}, \tag{8a}$$

d. h. positiv. Dieser Fall liegt z. B. für Kadmium vor.

Aus der Messung der HALL-Spannung kann somit nach (8) und (7b) die Ladungsträgerdichte N bestimmt werden. Außerdem kann auf die Art der Ladungsträger geschlossen werden.
Wir führen gemäß (3.5./17) die Beweglichkeit b ein:

$$\mathfrak{J} = Ne\mathfrak{v} = Neb\mathfrak{E}. \tag{9}$$

Nach dem OHMschen Gesetz $\mathfrak{J} = \gamma\mathfrak{E}$ können wir $\gamma = Neb$ schreiben. Anstelle von (8) erhält man somit

$$R_{\mathrm{H}} = -\frac{1}{Ne} = \frac{-v}{\gamma E} = -\frac{b}{\gamma}. \tag{10}$$

Die Beweglichkeit b geht demnach aus der HALL-Konstanten R_{H} und aus der Leitfähigkeit hervor:

$$\boxed{b = -\gamma R_{\mathrm{H}}}. \tag{11}$$

Wir setzen die Meßergebnisse in die nach R_{H} aufgelöste Gleichung (7) ein und erhalten

$$-R_{\mathrm{H}} = \frac{U_{\mathrm{H}}d}{IB} = \frac{3{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 0{,}7}\ \mathrm{m^3\,A^{-1}\,s^{-1}}.$$

Damit folgt nach (8) für die Elektronenzahl je m³

$$N = \frac{1}{5 \cdot 10^{-7} \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}}\ \mathrm{m^{-3}} = 1{,}25 \cdot 10^{25}\ \mathrm{m^{-3}}.$$

Im Gegensatz dazu beträgt die Atomzahl je m³

$$n = \frac{\varrho N_{\mathrm{A}}}{A_{\mathrm{r}}\ \mathrm{kg\,kmol^{-1}}} = \frac{9{,}8 \cdot 10^{3} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{26}}{209}\ \mathrm{m^{-3}} = 2{,}8 \cdot 10^{28}\ \mathrm{m^{-3}}.$$

Bei Wismut liefert also im Gegensatz zu Kupfer und Silber nur ein kleiner Bruchteil der Atome ein freies Elektron.
Für die Beweglichkeit erhalten wir aus (11)

$$b = 8{,}6 \cdot 10^{5} \cdot 5 \cdot 10^{-7}\ \frac{\mathrm{m\,s^{-1}}}{\mathrm{V\,m^{-1}}} = 0{,}43\ \mathrm{m^2\,V^{-1}\,s^{-1}}.$$

Dieser Wert liegt um zwei Größenordnungen über dem des Kupfers. Um die Teilchengeschwindigkeit zu bestimmen, ermitteln wir den Widerstand und für $I = 10$ A die Feldstärke:

$$R = \frac{l}{\gamma a d} = \frac{1}{8{,}6 \cdot 10^{5} \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-3}}\,\Omega = 0{,}012\,\Omega,$$

$$E = \frac{U}{l} = \frac{RI}{l} = \frac{0{,}012 \cdot 10}{1}\ \mathrm{V\,m^{-1}} = 0{,}12\ \mathrm{V\,m^{-1}}.$$

Damit ergibt sich für die Driftgeschwindigkeit der Elektronen

$$v = bE = 0{,}43 \cdot 0{,}12\ \mathrm{m\,s^{-1}} = 5{,}2\ \mathrm{cm\,s^{-1}}.$$

Tabelle 5. HALL-Konstante R_H, Beweglichkeit b, Leitfähigkeit γ, Zahl N der Ladungsträger, Atomzahl n

	Stoff Ag	Cu	Au	Bi	Cd
R_H in 10^{-10} m³ A⁻¹ s⁻¹	−0,84	−0,536	−0,704	−6330	+0,589
b in 10^{-3} m² V⁻¹ s⁻¹	5,2	3,1	3,2	525	0,78
γ in $10^8\,\Omega^{-1}$ m⁻¹	0,62	0,57	0,45	0,0083	0,132
N in 10^{28} m⁻³	7,4	11,6	8,9	0,0010	10,6
n in 10^{28} m⁻³	5,9	8,4	5,9	2,8	4,6
B in Vs m⁻²	0,3···2,2	1,13	0,69	0,393	1,07

Anmerkung: Die HALL-Konstante R_H und die Ladungsträgerzahl N sind von der magnetischen Flußdichte abhängig.



Aufgaben

A 3.5.1. Berechnen Sie das elektrochemische Äquivalent für Aluminium ($A_{Al} = 26{,}98$, $Z_{Al} = 3$), Wasserstoff ($A_H = 1{,}008$, $Z_H = 1$) und für die OH-Gruppe ($M_{OH} = 17{,}01$, $Z_{OH} = 1$).

A 3.5.2. Das elektrochemische Äquivalent für Silber ist $k_{Ag} = 1{,}1179\,\text{mg A}^{-1}\,\text{s}^{-1}$. Berechnen Sie daraus die FARADAY-Konstante F ($A_{Ag} = 107{,}87$, $Z_{Ag} = 1$).

A 3.5.3. Ein Ring von 300 mm² Oberfläche soll galvanisch eine 0,01 mm dicke Goldschicht erhalten. Wie lange muß der Ring in der Lösung bleiben, wenn ein Strom von 0,5 A fließt ($k_{Au} = 0{,}681\,\text{mg A}^{-1}\,\text{s}^{-1}$, Dichte $\varrho_{Au} = 19{,}3\,\text{g cm}^{-3}$)?

A 3.5.4. Berechnen Sie die elektrische Leitfähigkeit einer Kochsalzlösung der Konzentration $c = 0{,}01$ mol/l. Die Ionenbeweglichkeiten sind Tabelle 4 zu entnehmen. Der Dissoziationsgrad kann gleich eins gesetzt werden.

A 3.5.5. Berechnen Sie zur vorangegangenen Aufgabe die Geschwindigkeit der Kaliumionen, wenn die Stromdichte $\mathfrak{J} = 1{,}0\,\text{mA mm}^{-2}$ beträgt.

A 3.5.6. Mit welcher Geschwindigkeit bewegen sich Wasserstoffionen (b_H nach Tabelle 4), wenn das äußere Feld die Stärke 1 V cm⁻¹ besitzt?

A 3.5.7. Die Messung der Ionenbeweglichkeit nach der Methode der wandernden Grenzschicht erfordert für genaue Messungen, daß die Schichtgrenze während der Untersuchung scharf erhalten bleibt. Hierzu wird die Konzentration der nicht untersuchten Indikatorlösung unterhalb der Meßlösung so gewählt, daß sowohl die Kationen der Meßlösung als auch die Kationen der Indikatorlösung mit gleicher Geschwindigkeit wandern. Es sei eine $CuCl_2$-Lösung der Konzentration $c = 0{,}01$ mol/l zu untersuchen. Als Indikator werde eine $CaCl_2$-Lösung verwendet. Welche Konzentration muß diese haben (Werte nach Tabelle 4)?

A 3.5.8. Wie groß ist die Driftgeschwindigkeit der Elektronen in einem Kupferdraht von 1 mm² Querschnitt, wenn ein Strom von 1 A fließt ($b_{Cu} = 3{,}1 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^2\,\text{V}^{-1}\,\text{s}^{-1}$)?

A 3.5.9. Welche Elektronenbeweglichkeit ergibt sich für Silber, wenn die Zahl der Atome n gleich der Zahl der Elektronen N gesetzt wird ($\varrho_{Ag} = 10{,}5\,\text{g cm}^{-3}$, $A_{Ag} = 107{,}9$, $\gamma_{Ag} = 0{,}62 \cdot 10^8\,\Omega^{-1}\,\text{m}^{-1}$)?

A 3.5.10. Wie groß ist die HALL-Spannung in einem Kupferstreifen, durch den der Strom $I = 100$ A fließt? Das Magnetfeld hat die Stärke $H = 5 \cdot 10^5$ A m^{-1}. Die Streifendicke beträgt 0,1 mm ($R_H = 0{,}66 \cdot 10^{-10}$ m^3 A^{-1} s^{-1}).

A 3.5.11. Die Elektronenbeweglichkeit in Kupfer beträgt $3{,}8 \cdot 10^{-3}$m/s V m^{-1}. Berechnen Sie die Driftgeschwindigkeit für $E = 0{,}1$ V m^{-1}.

A 3.5.12. Aluminium hat die HALL-Konstante $R_H = -0{,}34 \cdot 10^{-10}$A^{-1} s^{-1} m^3. Berechnen Sie daraus die Zahl der Elektronen je Raumeinheit.

4. Quasistationäre Stromkreise und elektromagnetische Wellen auf Leitungen

4.1. Quasistationäre Stromkreise

E Einführung

Die quasistationäre Näherungsmethode wird bei langsam veränderlichen elektromagnetischen Feldern angewandt. Im allgemeinen sind die Änderungen periodisch, so daß man von niederfrequenten Wechselströmen spricht. Ihre Zeitabhängigkeit kann in der Form $\sin \omega t$ oder $e^{i\omega t}$ bzw. $\sum_n a_n e^{i\omega_n t}$ dargestellt werden.

Zur Integration der MAXWELLschen Gleichungen wird der Stromkreis in kleine Abschnitte unterteilt und innerhalb eines jeden Teilstücks mit einem **einheitlichen Schwingungszustand** gerechnet. Diese Methode ist zulässig, wenn die Ausdehnung Δl eines Abschnitts klein gegen die Wellenlänge $\lambda = c/f = 2\pi c/\omega$ ist:

$$\boxed{\Delta l \ll \lambda}\,. \tag{1}$$

Ein Gebiet kann, wenn dafür (1) erfüllt ist, den ganzen Stromkreis umfassen. Es ist jedoch auch eine Unterteilung in differentiell kleine Abschnitte möglich (vgl. 4.4.). Die quasistationäre Näherung besteht darin, daß das Magnetfeld wie bei stationären Prozessen berechnet wird. Von den Verschiebungsströmen verursachte Felder bleiben unberücksichtigt. Bei der Magnetfeldberechnung werden also Verschiebungsströme gegen die in der Umgebung fließenden elektrischen Ströme vernachlässigt:

$$\left|\iint \dot{\mathfrak{D}} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A}\right| \ll \left|\iint \mathfrak{J} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A}\right|. \tag{2}$$

In den MAXWELLschen Gleichungen (1.4./1) bis (1.4./4) wird bei quasistationären Rechnungen die Verschiebungsstromdichte $\dot{\mathfrak{D}}$ vernachlässigt. Es ergeben sich damit die Gleichungen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mathfrak{J}, \tag{3}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}, \tag{4}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho, \tag{5}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0. \tag{6}$$

Bei langsam veränderlichen Feldern arbeitet man mit den **Koeffizienten der Selbst- und der Gegeninduktion.** Sie ergeben sich auf Grund der folgenden Betrachtung:

Die magnetische Energie W_m folgt nach (1.4./21) aus den Feldgrößen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ gemäß

$$W_\text{m} = \frac{1}{2} \iiint\limits_V \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{B}\, \mathrm{d}V. \tag{7}$$

Das Integral erstreckt sich über den gesamten Raum. V kennzeichnet also z. B. eine Kugel um das betrachtete Leitersystem mit dem Durchmesser $2R \to \infty$.
Nach (3.1./6) kann die magnetische Flußdichte durch das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ ausgedrückt werden. Damit erhält man

$$W_\text{m} = \frac{1}{2} \iiint\limits_V \mathfrak{H} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{A}\, \mathrm{d}V. \tag{7a}$$

Für zwei beliebige Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{H}$ gilt nach (A 1.3.5.)

$$\operatorname{div} (\mathfrak{A} \times \mathfrak{H}) = \mathfrak{H} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{A} - \mathfrak{A} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{H}. \tag{8}$$

Hiermit ergibt sich aus (7a)

$$W_\text{m} = \frac{1}{2} \iiint\limits_V \operatorname{div} (\mathfrak{A} \times \mathfrak{H})\, \mathrm{d}V + \frac{1}{2} \iiint\limits_V \mathfrak{A} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{H}\, \mathrm{d}V. \tag{7b}$$

Der erste Summand verschwindet:
Nach dem Gaussschen Satz (1.3./17) besteht die Beziehung

$$\iiint\limits_v \operatorname{div} (\mathfrak{A} \times \mathfrak{H})\, \mathrm{d}V = \oiint\limits_\sigma (\mathfrak{A} \times \mathfrak{H}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\sigma}, \tag{9}$$

wobei σ die Oberfläche des Volumens V angibt. Für das Oberflächendifferential der Kugel gilt

$$\mathrm{d}\sigma = R^2 \sin \vartheta\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}\varphi. \tag{10}$$

Das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ ist nach (3.1./14) auf der Kugeloberfläche gleich

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_\text{K} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\mathfrak{J}_P\, \mathrm{d}V_P}{r_{P\text{K}}}. \tag{11}$$

Bei der Integration sind sämtliche Punkte P auf den Stromleitern zu durchlaufen. Der Index K charakterisiert, daß das Vektorpotential für einen Punkt auf der Kugeloberfläche bestimmt wird.

Nach (11) verschwindet das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ im Grenzfall $R \to \infty$ mindestens wie C_1/R, wobei C_1 eine vom Leitersystem abhängige Konstante ist. Die Feldstärke $\mathfrak{H}$ folgt nach dem BIOT-SAVARTschen Gesetz

$$\mathrm{d}\mathfrak{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{I}{r^2} \mathrm{d}\mathfrak{s} \times \mathfrak{e}_r, \tag{12}$$

d. h., sie verschwindet auf der Kugel mindestens wie C_2/R^2. Dagegen wächst die Kugeloberfläche nur wie $C_0 R^2$. Aus (10), (11) und (12) erhält man daher, daß das Integral (9) für $R \to \infty$ mindestens wie

$$C_0 R^2 \frac{C_1}{R} \frac{C_2}{R^2} = \frac{\text{const}}{R}$$

verschwindet.
Die magnetische Energie ist somit nach (7 b) durch

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2} \iiint\limits_V \mathfrak{A} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{H} \, \mathrm{d}V \tag{13}$$

bestimmt. Auf Grund von (3) kann man hierfür

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2} \iiint\limits_V \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{J} \, \mathrm{d}V \tag{14}$$

schreiben. Da $\mathfrak{J}$ außerhalb der Leiter verschwindet, braucht das Integral (14) nur über sämtliche Punkte P der Leiter erstreckt zu werden. Man erhält

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2} \iiint\limits_{V_P} \mathfrak{A}_P \cdot \mathfrak{J}_P \, \mathrm{d}V_P. \tag{15}$$

Das Vektorpotential in einem Punkt P der Leiter errechnet sich wie das Potential $\mathfrak{A}_\mathrm{K}$ in (11) nach (3.1./14) auf Grund der Formel

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_P = \frac{\mu}{4\pi} \iiint\limits_{V_Q} \frac{\mathfrak{J}_Q \mathrm{d}V_Q}{r_{PQ}}, \tag{16}$$

wobei Q wieder sämtliche Punkte auf den Leitern durchläuft. Rechnet man für den gesamten Raum mit einheitlicher Permeabilität, so folgt aus (15) und (16)

$$W_\mathrm{m} = \frac{\mu}{8\pi} \iiint\limits_{V_P} \iiint\limits_{V_Q} \frac{\mathfrak{J}_P \cdot \mathfrak{J}_Q}{r_{PQ}} \, \mathrm{d}V_Q \, \mathrm{d}V_P. \tag{17}$$

Bei elektrotechnischen Problemen interessiert vielfach die Wirkung zweier Leiter *1* und *2* aufeinander, z. B. der Hin- und der Rückleitung eines Stromkreises. Für diesen

Fall kann (17) in vier Teilintegrale zerlegt werden:

P und *Q* auf *1*	(Selbstinduktion des Leiters *1*),
P und *Q* auf *2*	(Selbstinduktion des Leiters *2*),
P auf *1*, *Q* auf *2*	(Gegeninduktion *2* auf *1*),
P auf *2*, *Q* auf *1*	(Gegeninduktion *1* auf *2*).

Das Ergebnis der Integration (17) wird in der Form

$$\boxed{W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\left(L_{11}I_1^2 + 2L_{12}I_1I_2 + L_{22}I_2^2\right)} \tag{18}$$

dargestellt. Darin geben I_1 und I_2 den Strom in 1 und 2 an. Für die beiden **Koeffizienten der Selbstinduktion** ergeben sich aus (17) die Definitionsgleichungen

$$L_{11} = \frac{\mu}{4\pi}\iiint\limits_{V_P^{(1)}}\iiint\limits_{V_Q^{(1)}} \frac{\mathfrak{i}_P\cdot\mathfrak{i}_Q}{r_{PQ}}\,\mathrm{d}V_Q\,\mathrm{d}V_P, \tag{19}$$

$$L_{22} = \frac{\mu}{4\pi}\iiint\limits_{V_P^{(2)}}\iiint\limits_{V_Q^{(2)}} \frac{\mathfrak{i}_P\mathfrak{i}_Q}{r_{PQ}}\,\mathrm{d}V_Q\,\mathrm{d}V_P. \tag{20}$$

Als **Koeffizienten der Gegeninduktion** definiert man nach (17) und (18)

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\mu}{4\pi}\iiint\limits_{V_P^{(1)}}\iiint\limits_{V_Q^{(2)}} \frac{\mathfrak{i}_P\cdot\mathfrak{i}_Q}{r_{PQ}}\,\mathrm{d}V_Q\,\mathrm{d}V_P$$

$$= \frac{\mu}{4\pi}\iiint\limits_{V_P^{(2)}}\iiint\limits_{V_Q^{(1)}} \frac{\mathfrak{i}_P\cdot\mathfrak{i}_Q}{r_{PQ}}\,\mathrm{d}V_Q\,\mathrm{d}V_P. \tag{21}$$

Die **Stromliniendichtevektoren** $\mathfrak{i}_P$ und $\mathfrak{i}_Q$ sind rein geometrische Größen. Sie ergeben sich aus den Stromdichtevektoren $\mathfrak{J}_P$ und $\mathfrak{J}_Q$, indem diese durch die Stromstärken dividiert werden:

$$\mathfrak{i}_P = \frac{\mathfrak{J}_P}{I_P}, \quad \mathfrak{i}_Q = \frac{\mathfrak{J}_Q}{I_Q}. \tag{22}$$

I_P und I_Q sind je nach der Integration über 1 oder 2 identisch mit I_1 oder I_2.
Bei einem System zweier paralleler, von entgegengerichteten Strömen durchflossenen Leiter gilt

$$I_1 = -I_2 = I. \tag{23}$$

Ferner kann man zusammenfassend

$$L = L_{11} + L_{22} - 2L_{12}$$

schreiben und L als Koeffizienten der **Selbstinduktion des gesamten Stromkreises** definieren. Aus (18) ergibt sich damit

$$\boxed{W_\mathrm{m} = \frac{1}{2} L I^2}. \tag{24}$$

Die Induktionskoeffizienten haben nach (24) die Maßeinheit

$$[L] = \frac{[W]}{[I^2]} = \mathrm{Vs\,A^{-1}} = \mathrm{H\ (Henry)}. \tag{25}$$

Beispiel 13

Eine Spule mit der Selbstinduktivität $L_{11} = 0{,}1$ H speichert bei einem Strom der Stärke $I_1 = 2$ A die magnetische Energie

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 \cdot 2^2\,\mathrm{J} = 0{,}2\,\mathrm{J}.$$

Ein Stromkreis aus zwei parallelen Drähten mit der Selbstinduktivität $L = 1$ mH speichert bei einem Strom der Stärke $I = 0{,}1$ A die magnetische Energie

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}1^2\,\mathrm{J} = 5\,\mu\mathrm{J}.$$

Nach (3) gilt außerhalb eines Leiters in quasistationärer Näherung

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0. \tag{26}$$

Man kann daher das magnetische Feld außerhalb der Stromleiter durch ein **magnetisches Potential** Ψ darstellen:

$$\boxed{\mathfrak{H} = -\operatorname{grad} \Psi}. \tag{27}$$

Wegen $\operatorname{div} \mathfrak{B} = \operatorname{div} \mu\mathfrak{H}$ nach (6) gilt für Medien mit einheitlicher Permeabilität

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Psi = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \triangle \Psi = 0. \tag{28}$$

Ψ erfüllt die Potentialgleichung.
Die Potentialfunktion Ψ ist keine eindeutige Funktion des Ortes; sie ist **mehrdeutig:** Bei der Integration über den Leiterquerschnitt folgt

$$\iint \operatorname{rot} \mathfrak{H} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} = \iint \mathfrak{J} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} = I. \tag{29}$$

Andererseits kann man nach dem Stokesschen Satz (3.1./10)

$$\iint \operatorname{rot} \mathfrak{H} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} = \oint \mathfrak{H} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{s} \tag{30}$$

schreiben, wobei das Umlaufintegral über die Begrenzung des Leiterquerschnitts zu erstrecken ist. Für das Umlaufintegral über eine geschlossene Kurve C, die den Strom I umschlingt, folgt aus (30) mittels (27) (vgl. Bild 4.1)

$$\oint_C \mathfrak{H} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{s} = -\oint_C \operatorname{grad} \Psi \cdot \mathrm{d}\mathfrak{s} = -\oint_C \Psi \,\mathrm{d}s = \Psi_A - \Psi_B. \tag{31}$$

Wegen (29) und (30) ergibt sich bei einmaligem Umfahren des Leiters

$$\Psi_A - \Psi_B = \Psi_\mathrm{U} - \Psi_0 = I. \tag{32}$$

Da die Punkte A und B bei einmaligem Umfahren des Leiters zusammenfallen, erhält man für Ψ an ein und demselben Raumpunkt verschiedene Werte. Bei mehrmaligem Umlauf unterscheiden sich zwei »Zweige« der Potentialfunktion Ψ um ein ganzzahliges Vielfaches der Stromstärke.

Die **eindeutige Festlegung** auf einen bestimmten Zweig wird bei linearen Leitern, d. h. bei Leitern mit dem Querschnitt Null, wie folgt vorgenommen: In den Stromkreis, mit diesem als Berandung, wird eine Fläche S gelegt (vgl. Bild 4.1). Sie kann beliebig gekrümmt sein. S wird als **Verzweigungsschnitt** bezeichnet. Der Durchgang

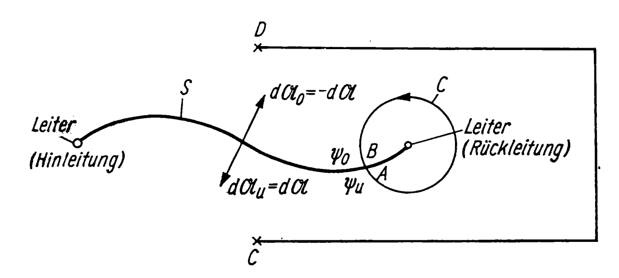


Bild 4.1. Verzweigungsschnitt

durch diese Fläche S bei Operationen im elektromagnetischen Feld wird untersagt. Damit wird die Potentialfunktion Ψ im gesamten Raum mit Ausnahme des Verzweigungsschnittes S zu einer eindeutigen Funktion.

Nachdem Ψ eindeutig festgelegt ist, kann die Potentialfunktion mittels (27) zur Berechnung der magnetischen Feldenergie verwendet werden. Aus (5) ergibt sich

$$W_\mathrm{m} = \frac{\mu}{2} \iiint \mathfrak{H}^2 \,\mathrm{d}V = \frac{\mu}{2} \operatorname{grad}^2 \Psi \,\mathrm{d}V. \tag{33}$$

Der GREENsche Satz in der Form (2.1./20) besagt nach (2.1./21) für Funktionen, die der Potentialgleichung genügen,

$$\iiint \operatorname{grad}^2 \Psi \,\mathrm{d}V = \oint \Psi \operatorname{grad} \Psi \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A}. \tag{34}$$

Für die magnetische Energie erhält man damit aus (33)

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{\mu}{2} \oiint \Psi \operatorname{grad} \Psi \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A}. \tag{35}$$

Wegen der Mehrdeutigkeit von Ψ in den Punkten des Verzweigungsschnittes S sind diese aus dem Integrationsgebiet V auszuschließen. Das Integral ist also über den gesamten Raum mit Ausnahme der Abgrenzung, d. h. der durch den Verzweigungsschnitt S geschaffenen Begrenzung, zu erstrecken. Daher läuft das Oberflächenintegral (35) sowohl über die obere als auch über die untere Fläche von S. Der Verzweigungsschnitt umfaßt ein Gebiet endlicher Energiedichte, seine räumliche Ausdehnung ist gleich Null. In den Leitern, die als ideale Leiter vorausgesetzt werden, ist ebenfalls keine magnetische Energie enthalten. (35) liefert daher bei der Integration über die obere und die untere Fläche des Verzweigungsschnittes die gesamte magnetische Feldenergie.
Bei der Integration über die obere Fläche von S folgt

$$\iint \Psi \operatorname{grad} \Psi \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} = -\iint \Psi_{\mathrm{O}} \mathfrak{H} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A}_{\mathrm{O}} = -\iint \Psi_{\mathrm{O}} \mathfrak{H} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A}. \tag{36}$$

Dagegen ergibt sich wegen

$$\mathrm{d}\mathfrak{A}_{\mathrm{O}} = -\mathrm{d}\mathfrak{A}_{\mathrm{U}} = \mathrm{d}\mathfrak{A} \tag{37}$$

bei der Integration über die untere Fläche

$$\iint \Psi \operatorname{grad} \Psi \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} = -\iint \Psi_{\mathrm{U}} \mathfrak{H} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A}_{\mathrm{U}} = \iint \Psi_{\mathrm{U}} \mathfrak{H} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A}. \tag{38}$$

Somit erhält man für die magnetische Energie

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{\mu}{2} \iint_A (\Psi_{\mathrm{U}} - \Psi_{\mathrm{O}})\, \mathfrak{H} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} = \frac{\mu I}{2} \iint_A \mathfrak{H} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} = \frac{I}{2} \iint_A \mathfrak{B} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A}. \tag{39}$$

A gibt die vom Stromkreis umschlungene Fläche an. Die Größe

$$\Phi_{\mathrm{F}} = \iint_A \mathfrak{B} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} \tag{40}$$

kennzeichnet den magnetischen Fluß durch den Stromkreis.
Nach (39) und (40) kann man für die magnetische Feldenergie auch schreiben

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} \Phi_{\mathrm{F}} I. \tag{41}$$

Andererseits läßt sich nach (24) die magnetische Feldenergie durch den Induktions-

koeffizienten L ausdrücken. Zwischen L und Φ_F besteht nach (24) und (41) die Beziehung

$$\boxed{\Phi_F = \iint \mathfrak{B} \cdot d\mathfrak{A} = LI}. \tag{42}$$

Für die induzierte Spannung bei Änderung des Stromes I ergibt sich daraus auf Grund der MAXWELLschen Gleichung (4) mit Hilfe des STOKESschen Satzes

$$\boxed{L \frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \iint \mathfrak{B} \cdot d\mathfrak{A} = -\oint \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{s} = -U_{\text{ind}}}. \tag{43}$$

Die Gleichung (43) gibt die Möglichkeit zur Messung der Induktivität eines Stromkreises aus der Änderung des Stromes und der induzierten Gegenspannung.

Beispiel 14

Wird in einer Spule mit der **Selbstinduktivität** $L_{11} = 0{,}1$ H der Strom $I_1 = 2$ A im Verlauf der Zeit $\Delta t = 0{,}01$ s ausgeschaltet, so wird damit in Richtung des Stromes I_1 die Spannung

$$|U_{\text{ind}}| = 0{,}1 \cdot \frac{2}{0{,}01} \text{ V} = 20 \text{ V}$$

induziert. Aus $\Delta I_1 = 2$ A, $\Delta t = 0{,}01$ s, $U_{\text{ind}} = 20$ V folgt andererseits $L_{11} = 0{,}1$ H.

Einen **unverzweigten Stromkreis** kann man durch die Ersatzschaltung nach Bild 4.2 darstellen. Nach dem POYNTINGschen Satz (1.4./22) besteht die Beziehung

$$\dot{W}_e + \dot{W}_m + \dot{W}_W = -\oint\!\!\!\oint \mathfrak{S} \cdot d\mathfrak{A}. \tag{44}$$

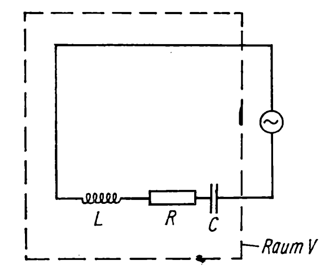


Bild 4.2. Ersatzschaltung eines unverzweigten Stromkreises

Die Summanden auf der linken Seite geben die Energieänderung im Raum V an. Nach (2.1./26) und (2.1./16) ist die elektrische Energie eines Kondensators gleich

$$W_e = \frac{UQ}{2} = \frac{Q^2}{2C}, \tag{45}$$

wobei Q die elektrische Ladung einer Kondensatorplatte angibt. Die magnetische Energie ist durch (24) bestimmt. Für die Wärmeleistung erhält man nach (1.4./22) und (1.4./25) bei einem homogenen Leiter

$$\dot{W}_W = \iiint \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{J} \, dV = \frac{1}{\sigma} \iiint \mathfrak{J}^2 \, dV = \frac{I^2 l \, \Delta A \sigma}{\sigma \Delta A^2} = RI^2. \tag{46}$$

Die Ladung Q ist durch

$$Q = \int I \, dt \tag{47}$$

gegeben. Damit folgt aus (45)

$$\dot{W}_e = \frac{\dot{Q}Q}{C} = \frac{I \int I \, dt}{C}, \tag{48}$$

während sich aus (24)

$$\dot{W}_m = LI\dot{I} \tag{49}$$

ergibt.
Die in das Gebiet V einfließende Energie ist gleich

$$-\oiint \mathfrak{S} \cdot d\mathfrak{A} = U_e I, \tag{50}$$

wobei U_e die äußere bzw. eingeprägte Spannung bezeichnet. Setzt man (46) sowie (48) bis (50) in den POYNTINGschen Satz (44) ein, so kürzt sich die Stromstärke I heraus, und man erhält

$$L\dot{I} + RI + \frac{\int I \, dt}{C} = U_e. \tag{51}$$

Durch Differentiation entsteht hieraus die **Schwingungsgleichung**

$$\boxed{L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C} I = \dot{U}_e}. \tag{52}$$

Die Lösung dieser Gleichung erfolgt in der Elektrotechnik mit Hilfe des Ansatzes

$$I = I_0 \, e^{i\omega t}. \tag{53}$$

Für die freie Schwingung ist $U_e = 0$ und damit auch $\dot{U}_e = 0$. Setzt man $\dot{U}_e = 0$ zusammen mit (53) in (52) ein, so erhält man eine algebraische Gleichung mit den Lösungen

$$\omega_0 = \pm \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}} + \frac{i R}{2L}. \tag{54}$$

Bei Vernachlässigung der Dämpfung folgt aus (54) die

Thomsonsche Formel $$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}. \tag{55}$$

Die Lösung mit negativem Vorzeichen ist physikalisch nicht sinnvoll.
$f_0 = \omega_0/2\pi$ bezeichnet die Eigen- oder **Resonanzfrequenz** des Schwingkreises. R, L, C sind im allgemeinen frequenzabhängig. Der Widerstand $R(f_0) = R_0$ wird als **Resonanzwiderstand** bezeichnet.
Für die **erzwungene Schwingung** ist besonders der eingeschwungene Zustand von Interesse. Wird der Stromkreis an eine Wechselspannung

$$U_e = U_0\, e^{i\omega t} \tag{56}$$

gelegt, so kann man zur Bestimmung des Stromes im eingeschwungenen Zustand von dem Ansatz

$$I = I_0\, e^{i\omega t} \tag{57}$$

ausgehen. Mit den Funktionen (56) und (57) ergibt sich aus (52)

$$I_0 \left(-\omega^2 L + i\,\omega R + \frac{1}{C}\right) = i\,\omega U_0 .$$

Hieraus folgt das OHMsche Gesetz für Wechselstrom (vgl. Bild 4.3)

$$\boxed{\frac{U_0}{I_0} = \Re = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}. \tag{58}$$

Der komplexe Widerstand

$$\Re = |\Re| e^{i\varphi} \tag{58a}$$

wird als **Impedanz** bezeichnet. Sein Absolutbetrag

$$|\Re| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \tag{59}$$

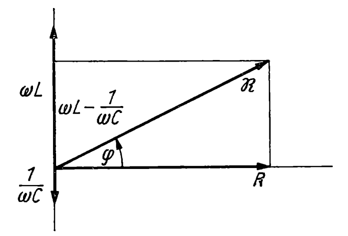


Bild 4.3. OHMsches Gesetz für Wechselstrom

gibt den **Scheinwiderstand** an; für den **Phasenwinkel** φ erhält man

$$\tan \varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}. \tag{60}$$

Der reelle Anteil R des komplexen Widerstandes $\mathfrak{R}$ in (58) wird als **Wirkwiderstand,** der imaginäre Anteil $\omega L - \frac{1}{\omega C}$ als **Blindwiderstand** definiert.

φ kennzeichnet die Phasenverschiebung zwischen der Spannung $U = U_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ und dem Strom

$$I = I_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \frac{U_0}{|\mathfrak{R}|}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \varphi)}. \tag{61}$$

Beispiel 15

In einem niederfrequenten Stromkreis mit der Frequenz $f = 50$ Hz sei $L = 1{,}25$ H, $C = 15\ \mu$F, $R = 60\,\Omega$.
Man errechnet

$$\omega L = 1{,}25 \cdot 2\pi \cdot 50\,\Omega = 392{,}7\,\Omega, \quad \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{15 \cdot 10^{-6} \cdot 2\pi \cdot 50}\,\Omega = 212{,}2\,\Omega.$$

Daraus folgt der Blindwiderstand $\omega L - \frac{1}{\omega C} = (392{,}7 - 212{,}2)\,\Omega = 180{,}5\,\Omega$. Die Impedanz ist gleich $\mathfrak{R} = (60 + \mathrm{i}\, 180{,}5)\,\Omega$, für den Scheinwiderstand folgt $|\mathfrak{R}| = \sqrt{60^2 + 180{,}5^2}\,\Omega = 190{,}2\,\Omega$, als Phasenwinkel erhält man

$$\varphi = \arctan \frac{180{,}5}{60} = 71{,}6°.$$

Das periodische Verhalten des Stromes und der Spannung wird in der Gaussschen Ebene durch zwei rotierende Vektoren dargestellt (vgl. Bild 4.4). Schreibt man die zeitliche Abhängigkeit in der Form $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, so rotieren die beiden Vektoren entgegen dem Uhrzeigersinn. Bei positiver Phasenverschiebung φ eilt der Spannungsvektor U um diesen konstanten Winkel dem Strom I voraus.

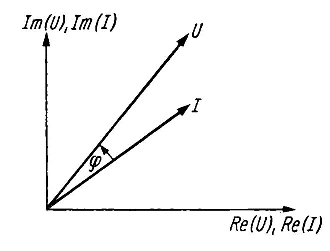


Bild 4.4. Rotierende Vektoren in der Gaussschen Ebene



Probleme

4.1.1. Wärmewirkung im Wechselstromkreis

Eine Spule der Induktivität $L = 500\,\mathrm{mH}$ wird mit einem Schichtkondensator der Kapazität $C = 10\,\mu\mathrm{F}$ in Reihe geschaltet. Der ohmsche Widerstand beträgt $R = 40\,\Omega$. Berechnen Sie die effektive Stromstärke und die Wärmeleistung, wenn der Stromkreis durch eine Spannungsquelle mit der effektiven Spannung $U_{\mathrm{eff}} = 220$ V gespeist wird und die Frequenz $f = 50$ Hz beträgt.

Lösung

Für die Berechnung der Wärmeleistung müssen wir die Spannung und den Strom miteinander multiplizieren. Aus diesem Grund beziehen wir uns auf die Realteile und schreiben für die Spannung

$$U = U_0 \cos \omega t \tag{1}$$

und nach (4.1./61) für den Strom

$$I = \frac{U_0}{|\mathfrak{R}|} \cos (\omega t - \varphi). \tag{2}$$

Durch Integration über eine Periode $\tau = 2\pi/\omega$ erhalten wir für die Leistung

$$P = \overline{UI} = \frac{1}{\tau} \int\limits_0^\tau \frac{U_0^2}{|\mathfrak{R}|} \cos \omega t \cos (\omega t - \varphi)\, \mathrm{d}t$$

$$= \frac{U_0^2}{\tau\, |\mathfrak{R}|} \left(\cos \varphi \int\limits_0^\tau \cos^2 \omega t\, \mathrm{d}t + \sin \varphi \int\limits_0^\tau \cos \omega t \sin \omega t\, \mathrm{d}t \right). \tag{3}$$

Das zweite Integral verschwindet. Das erste liefert

$$P = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{|\mathfrak{R}|} \cos \varphi. \tag{4}$$

Definieren wir

$$U_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{2} \sqrt{2}\, U_0 = 0{,}707\, U_0 \tag{5}$$

und setzen diesen Ausdruck in (4) ein, so ergibt sich bis auf den Faktor $\cos \varphi$ ein der Wärmewirkung bei Gleichstrom entsprechendes Gesetz:

$$P = \frac{U_{\mathrm{eff}}^2}{|\mathfrak{R}|} \cos \varphi. \tag{6}$$

Der Scheinwiderstand ist nach (4.1./59) gleich

$$|\Re| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$= \sqrt{40^2 + \left(2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}5 - \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 10 \cdot 10^{-6}}\right)^2}\,\Omega = 165{,}8\,\Omega. \tag{7}$$

Für die Phasenverschiebung erhalten wir nach (4.1./60)

$$\varphi = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

$$= \arctan \frac{-162}{40} = -76{,}1^\circ.$$

Aus (7) folgt als effektive Stromstärke

$$I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{|\Re|} = \frac{220}{165{,}8}\,\text{A} = 1{,}33\,\text{A}.$$

Hieraus ergibt sich als Stromleistung

$$P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\varphi = \frac{U_{\text{eff}}^2}{|\Re|} \cos\varphi = \frac{220^2}{165{,}8} \cos 76{,}1^\circ\,\text{W} = 70{,}1\,\text{W}.$$

4.1.2. Leistungsanpassung

Eine Spannungsquelle (vgl. Bild 4.5) hat den inneren Widerstand $\Re_i = (4{,}5 + i\,0{,}5)\,\Omega$. Die Generatorspannung bei Leerlauf ist durch $U = U_0 \sin \omega t$ gegeben, mit $U_0 = 310$ V. Welcher äußere Widerstand $\Re_a$ ist anzubringen, um dem Generator ein **Maximum an Wirkleistung** zu entnehmen? Wie groß ist die Leistung bei reellem innerem Widerstand?

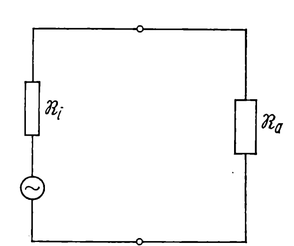


Bild 4.5. Spannungsquelle mit Innen- und Außenwiderstand

Lösung

Die am Verbraucher anliegende Spannung ist gleich

$$U = U_0 \sin \omega t \frac{\Re_a}{\Re_i + \Re_a}. \tag{1}$$

Der Strom hat die Stärke

$$I = \frac{U}{\mathfrak{R}_a} = \frac{U_0 \sin \omega t}{\mathfrak{R}_i + \mathfrak{R}_a}. \tag{2}$$

Wir können die Widerstände in der Form

$$\mathfrak{R}_a = R_a \, e^{i\varphi_a}, \qquad \mathfrak{R}_i = R_i \, e^{i\varphi_i} \tag{3}$$

schreiben.
Für die Wirkleistung erhalten wir aus (1) und (2)

$$P_W = U_{eff} I_{eff} \cos \varphi_a = \frac{U_0^2}{2} \frac{|\mathfrak{R}_a| \cos \varphi_a}{|\mathfrak{R}_i + \mathfrak{R}_a|^2}. \tag{4}$$

(4) ist eine Funktion der beiden unabhängigen Variablen $\mathfrak{R}_a$ und φ_a. Soll diese ein Maximum annehmen, so müssen die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial P_W}{\partial R_a} = 0, \qquad \frac{\partial P_W}{\partial \varphi_a} = 0 \tag{5}$$

erfüllt sein. Als Lösung der Gleichungen (5) ergibt sich

$$R_a = R_i, \qquad \varphi_a = -\varphi_i \qquad \text{bzw.} \qquad \boxed{\mathfrak{R}_a = \mathfrak{R}_i^*}, \tag{5a}$$

wobei $\mathfrak{R}^*$ den konjugiert komplexen Wert von $\mathfrak{R}$ bedeutet.
Mit diesen Werten folgt für die maximal zu entnehmende Wirkleistung

$$P_W = \frac{U_0^2}{4R_i} \frac{\cos \varphi_i}{1 + \cos 2\varphi_i} = \frac{U_0^2}{8R_i} \frac{1}{\cos \varphi_i}. \tag{6}$$

Im vorliegenden Fall muß der Außenwiderstand gleich $\mathfrak{R}_a = (4{,}5 - i\,0{,}5)\,\Omega$ sein. Ferner erhält man mit den vorgegebenen Zahlen aus (6)

$$P_W = \frac{310^2}{8 \cdot 4{,}5} \text{ W} = 2{,}67 \text{ kW}.$$

Besteht der Innenwiderstand nur aus dem ohmschen Widerstand, so folgt aus (6) wegen $\varphi_i = 0$, $\varphi_a = 0$

$$P_W = \frac{U_0^2}{8R_i} = \frac{U_{0\,eff}^2}{4R_i}. \tag{7}$$

$U_{0\,eff} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, U_0$ bezeichnet die effektive Spannung der Spannungsquelle bei Leerlauf.

4.1.3. Freie elektrische Schwingungen

Ein Schwingkreis besteht aus einem Kondensator mit der Kapazität $C = 10$ pF und einer Spule der Induktivität $L = 0{,}2$ mH. Der ohmsche Widerstand ist gleich $R = 450$ mΩ. Berechnen Sie die Resonanzfrequenz und die Resonanzwellenlänge des Schwingkreises. Wie groß ist die Abklingzeit (Zeit des Abklingens der Amplitude auf 1/e)?

Lösung

Nach (4.1./52) lautet die Differentialgleichung freier elektrischer Schwingungen

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C} I = 0. \tag{1}$$

Zur Lösung gehen wir vom Exponentialansatz

$$I = I_0 \, e^{i\omega_0 t} \tag{2}$$

aus. Mit diesem erhalten wir aus (1)

$$\left(-L\omega_0^2 + iR\omega_0 + \frac{1}{C}\right) I_0 \, e^{i\omega_0 t} = 0. \tag{3}$$

Diese Gleichung hat die Lösung

$$\omega_0 = \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} + \frac{iR}{2L}. \tag{4}$$

Für $\frac{1}{LC}$ erhält man einen Wert in der Größenordnung 10^{14}, für $\frac{R}{L}$ dagegen nur in der Größenordnung 10^4. Der Widerstand wirkt sich im vorliegenden Fall im Vergleich zu L und C praktisch nicht auf die Resonanzfrequenz aus. Es folgt nach der THOMSONschen Formel

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-11}}} \, s^{-1} = 4{,}47 \cdot 10^8 \, s^{-1}.$$

Als Resonanzfrequenz ergibt sich

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 7{,}11 \cdot 10^7 \, \text{Hz},$$

als Resonanzwellenlänge

$$\lambda_0 = \frac{c_0}{f_0} = \frac{3 \cdot 10^8}{7{,}11 \cdot 10^7} \, \text{m} = 4{,}2 \, \text{m} \quad \text{(UKW-Bereich)}.$$

Für die Abklingzeit erhalten wir aus (4) in Verbindung mit (2)

$$\frac{2L}{R} = \frac{2 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-3}}{0{,}450} \, s = 0{,}89 \, \text{ms}.$$

4.1.4. Einschaltvorgang im Stromkreis mit Selbstinduktion

Eine Spule hat die Selbstinduktivität $L_{11} = 85 \, \text{mH}$. Der ohmsche Widerstand beträgt $R = 12{,}5 \, \text{m}\Omega$. Untersuchen Sie den Einschaltprozeß. Bestimmen Sie, welche Zeit vergeht, bis der Strom 99% seines Endwertes erreicht hat.

Lösung

Die Spule der Induktivität $L = L_{11}$ erzeugt bei Stromänderungen die Gegenspannung

$$U_{\text{ind}} = -L\frac{dI}{dt}. \tag{1}$$

Diese ist zur Spannung U zu addieren, die von der Spannungsquelle geliefert wird. Es folgt damit für die Stromstärke I

$$I = \frac{U - L\dfrac{dI}{dt}}{R} \quad \text{bzw.} \quad L\frac{dI}{dt} + RI = U. \tag{2}$$

Zum Zeitpunkt der Einschaltung des Stromes, d. h. für $t = 0$, hat dieser die Stärke $I(0) = 0$. Als Lösung der Differentialgleichung (2), die diese Randbedingung erfüllt, ergibt sich

$$I = \frac{U}{R} - \frac{U}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \tag{3}$$

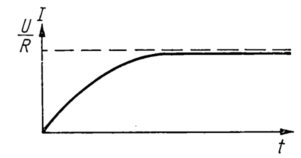


Bild 4.6. Der Anstieg der elektrischen Stromstärke beim Einschaltvorgang

Der erste Summand kennzeichnet eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Den zweiten Summanden erhält man durch e-Ansatz aus der homogenen Differentialgleichung. Er klingt mit zunehmender Zeit t exponentiell ab, der Strom steigt entsprechend an (vgl. Bild 4.6). Die Zeit $t_{0,99}$, die vergeht, bis der Strom 99% seines Endwertes erreicht hat, ergibt sich aus der Zeit bis zum Abklingen des zweiten Summanden in (3) auf den Wert 0,01. Man erhält

$$t_{0,99} = \frac{L}{R}\ln 100 = \frac{85}{12{,}5}\cdot 4{,}61\ \text{s} = 31{,}4\ \text{s}.$$

Dieser große Wert ist durch die hohe Induktivität und durch den relativ kleinen ohmschen Widerstand bedingt.

4.1.5. Dämpfung eines Galvanometers

In einem Galvanometer liefert die bei der Bewegung der Spule induzierte Gegenspannung den Hauptanteil an der Dämpfung. Gegenüber dieser elektromagnetischen Dämpfung kann die Dämpfung durch Wirbelströme und Reibung im allgemeinen vernachlässigt werden. Berechnen Sie unter dieser Voraussetzung die Dämpfung eines Galvanometers mit dem magnetischen Fluß $\Phi_F = nBA = 0{,}015$ Vs, dem Innenwiderstand $R_i = 260\,\Omega$ und dem Außenwiderstand $R_a = 420\,\Omega$ (vgl. 3.2.4. Spiegelgalvanometer).

Lösung

Nach (3.2.4./5) wird der Zeigerausschlag des Meßgerätes durch die Gleichung

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + b \frac{d\varphi}{dt} + D\varphi = \Phi_F I \tag{1}$$

bestimmt. φ gibt darin die Auslenkung aus der Ruhelage an. In der Ruhelage steht die Spulenachse senkrecht zur Feldrichtung ($\alpha = 90°$). Unsere Aufgabe besteht darin, den Koeffizienten b im zweiten Summanden der Gleichung (1) zu bestimmen. Dazu setzen wir voraus, daß das magnetische Feld innerhalb der Spule homogen ist.
Eine Verdrehung aus der Ruhelage um den Winkel $\Delta\varphi$ infolge eines Meßstromes führt dazu, daß die Spule von dem magnetischen Fluß

$$\Delta \iint \mathfrak{B} \cdot d\mathfrak{A} = nBA\,\Delta\varphi \tag{2}$$

durchsetzt wird. Für die Änderung des magnetischen Flusses mit der Zeit t ergibt sich daraus, wenn man mit kleinem Auslenkwinkel rechnet,

$$-U_{\text{ind}} = \frac{\partial}{\partial t} \iint \mathfrak{B} \cdot d\mathfrak{A} = nBA \frac{d\varphi}{dt} = \Phi_F \frac{d\varphi}{dt}. \tag{3}$$

Der induzierte Strom wird daher gleich

$$I_{\text{ind}} = \frac{U_{\text{ind}}}{R_i + R_a} = -\frac{\Phi_F}{R_i + R_a} \frac{d\varphi}{dt}. \tag{4}$$

Er ist nach der LENZschen Regel dem Meßstrom I entgegengerichtet. Infolgedessen verursacht er ein Drehmoment, das dem vom Meßstrom erzeugten entgegenwirkt.
Für das durch I hervorgerufene Drehmoment $\mathfrak{M}$ gilt

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{m} \times \mathfrak{H} \quad \text{bzw.} \quad |\mathfrak{M}| = \mu n I A H = \Phi_F I. \tag{5}$$

Ihm wirkt nach (4) das induzierte Drehmoment

$$\Phi_F I_{\text{ind}} = -\frac{\Phi_F{}^2}{R_i + R_a} \frac{d\varphi}{dt} \tag{6}$$

entgegen. Als Differentialgleichung des Auslenkwinkels folgt damit, wenn das Trägheitsmoment und die Winkelrichtgröße eingesetzt werden,

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + D\varphi = \Phi_F I - \frac{\Phi_F{}^2}{R_i + R_a} \frac{d\varphi}{dt}. \tag{7}$$

Hier kann wegen des Faktors φ der Koeffizient

$$b = \frac{\Phi_F{}^2}{R_i + R_a} = \frac{(n\mu HA)^2}{R_i + R_a} \tag{8}$$

als Dämpfungskonstante definiert werden.
Mit den vorgegebenen Zahlen ergibt sich

$$b = \frac{0{,}015^2}{260 + 420}\ \text{J s} = 3{,}31 \cdot 10^{-7}\ \text{J s}.$$



Aufgaben

A 4.1.1. In einem Stromkreis gilt $L = 40$ mH, $R = 15\,\Omega$. Die Frequenz beträgt $f = 50$ Hz. Berechnen Sie den Blind- und den Scheinwiderstand. Wie groß ist die effektive Stromstärke, wenn die effektive Spannung $U_{\text{eff}} = 220$ V vorliegt? Berechnen Sie die Phasenverschiebung φ zwischen Spannung und Strom.

A 4.1.2. Wie groß sind der Schein- und der Blindwiderstand in einem Stromkreis mit der Induktivität $L = 25$ mH, der Kapazität $C = 0{,}5\ \mu$F und dem ohmschen Widerstand $R = 100\,\Omega$? Die Frequenz beträgt $f = 500$ Hz. Wie ändert sich das Ergebnis für $f = 5000$ Hz?

A 4.1.3. Eine Spule mit der Induktivität $L = 2{,}5$ H und dem ohmschen Widerstand $R = 200$ kΩ wird mit einem Kondensator in Reihe geschaltet. Wie groß muß dessen Kapazität C sein, wenn der Blindwiderstand der Spule kompensiert werden soll? Die Frequenz betrage $f = 10000$ Hz. Welches Ergebnis erhält man bei Parallelschaltung?

A 4.1.4. Eine Spule der Induktivität $L = 5$ mH und ein Kondensator der Kapazität $C = 2$ pF sind in Reihe geschaltet. Der ohmsche Widerstand sei zu vernachlässigen. Bei welcher Frequenz wird der Blindwiderstand der Spule durch den Kondensator kompensiert? Wie verändert sich das Ergebnis bei Parallelschaltung?

A 4.1.5. Berechnen Sie zu A 4.1.1. die Wärmeleistung des Wechselstromkreises.

A 4.1.6. Ein Stromkreis mit der Induktivität $L = 1{,}5$ mH und dem ohmschen Widerstand $R = 5\,\Omega$ ist an eine Spannungsquelle mit der effektiven Spannung $U_{\text{eff}} = 10000$ V angeschlossen. Berechnen Sie die Wärmeleistung. Die Frequenz beträgt $f = 5 \cdot 10^7$ Hz.

A 4.1.7. Berechnen Sie die Resonanzfrequenz eines Schwingkreises mit der Induktivität $L = 25$ mH, der Kapazität $C = 0{,}8$ pF und dem ohmschen Widerstand $R = 3{,}5$ mΩ. Welche Abweichung ergibt sich gegen die Resonanzfrequenz nach der THOMSONschen Formel?

A 4.1.8. Berechnen Sie zur vorangegangenen Aufgabe die Abklingzeit.

A 4.1.9. Berechnen Sie für einen Gleichstromkreis mit der Induktivität $L = 125$ mH und dem ohmschen Widerstand $R = 2{,}5\,\Omega$ die Zeit, die beim Einschalten vergeht, bis der Strom 99,9 % des Endwertes erreicht hat.

A 4.1.10. Stellen Sie die Gleichung für das Ausschalten eines Gleichstromes in einem Stromkreis mit Selbstinduktion auf.

A 4.1.11. Nach welcher Zeit ist ein Gleichstrom in einem Stromkreis mit der Induktivität $L = 10$ H und dem Widerstand $R = 2$ kΩ beim Ausschaltprozeß auf 1% des Anfangswertes abgesunken?

A 4.1.12. Ein Kondensator der Kapazität $C = 100\ \mu$F befindet sich zur Zeit $t = 0$ unter der Spannung $U = 220$ V. Er wird über einen Widerstand $R = 10$ kΩ entladen. Geben Sie die Formel für den zeitlichen Stromverlauf an. Nach welcher Zeit ist der Strom auf den Wert 1/e abgesunken?

A 4.1.13. Untersuchen Sie das Verhalten eines Schwingkreises, der eine Spule mit Eisenkern enthält.

A 4.1.14. Berechnen Sie die Dämpfung eines Galvanometers mit dem magnetischen Fluß $\Phi_F = 0{,}050$ Vs, dem Innenwiderstand $R_i = 400\,\Omega$ und dem Außenwiderstand $R_a = 600\,\Omega$.

A 4.1.15. Wie groß ist maximal der Spannungsabfall am Nutzwiderstand, wenn eine Spannungsquelle mit reellem Innenwiderstand R_i vorliegt? Die Leerlaufspannung sei gleich $U = U_0 \sin \omega t$.

A 4.1.16. Wie lautet die Anpassungsbedingung bei einer Spannungsquelle, wenn die Scheinleistung $P_S = U_{eff} I_{eff}$ zu einem Maximum werden soll?

4.2. Grundlagen der Vierpoltheorie

E Einführung

Vierpole sind Netzwerke mit vier Anschlußklemmen, zwei für den Eingang, zwei für den Ausgang (vgl. Bild 4.7). Sie werden als **aktive Vierpole** bezeichnet, wenn sie Strom- oder Spannungsquellen enthalten, die auf die angeschlossenen Netze zur Wirkung kommen. Beispiele für aktive Vierpole sind Transistoren und Röhren. **Passive Vierpole** enthalten keine Strom- oder Spannungsquellen, bzw. ihre Wirkung ist nach außen hin kompensiert. Dämpfungsglieder, elektrische Filter, Schwingungssiebe und Transformatoren sind Beispiele für passive Vierpole.

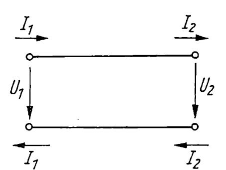


Bild 4.7. Ströme und Spannungen beim Vierpol

Bei passiven Vierpolen ergibt sich aus den KIRCHHOFFschen Stromverzweigungsgesetzen als Beziehung zwischen dem Strom I_1 und der Spannung U_1 auf der Eingangsseite und dem Strom I_2 und der Spannung U_2 auf der Ausgangsseite eine Matrizengleichung der Form

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} sind im allgemeinen komplex und frequenzabhängig. A_{12} hat die Dimension eines Widerstandes, A_{21} die eines Leitwertes. Bei A_{11} und A_{22} handelt es sich um dimensionslose Größen.

Führt die Vertauschung der Eingangs- und Ausgangsklemmen zu keiner Änderung der Ströme und Spannungen in den angeschlossenen Netzen, so wird der Vierpol als **längssymmetrisch** bezeichnet (vgl. Bild 4.8 und 4.9). Für längssymmetrische Vierpole folgt auf Grund der Vertauschungsmöglichkeit

$$A_{11} = A_{22}. \qquad (2)$$

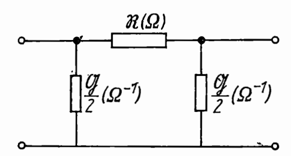


Bild 4.8. Längssymmetrisches Π-Glied

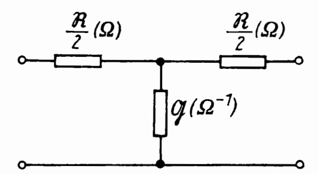


Bild 4.9. Längssymmetrisches T-Glied

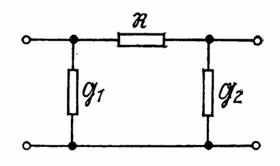


Bild 4.10. Unsymmetrisches Π-Glied

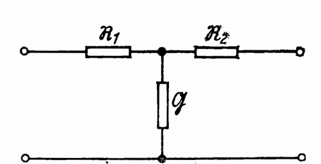


Bild 4.11. Unsymmetrisches T-Glied

Vierpole können als **Π-Glied** nach Bild 4.8 bzw. 4.10 oder als **T-Glied** nach Bild 4.9 bzw. 4.11 dargestellt werden.
Für das Π-Glied in nach Bild 4.8 erhält man nach den KIRCHHOFFschen Gesetzen

$$A_{11} = 1 + \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{G}}{2}, \qquad A_{12} = \mathfrak{R}, \qquad A_{21} = \mathfrak{G}\left(1 + \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{G}}{4}\right). \tag{1a}$$

Beim T-Glied des längssymmetrischen Vierpols nach Bild 4.9 ergibt sich

$$A_{11} = 1 + \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{G}}{2}, \qquad A_{12} = \mathfrak{R}\left(1 + \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{G}}{4}\right), \qquad A_{21} = \mathfrak{G}. \tag{1b}$$

Aus (1a) und (1b) folgt: Für das längssymmetrische Π-Glied und für das längssymmetrische T-Glied ist die Koeffizientendeterminante der Matrix in (1) eins:

$$A_{11}^2 - A_{12}A_{21} = 1. \tag{1c}$$

Unsymmetrische Glieder lassen sich aus symmetrischen zusammensetzen.

Anstelle der Koeffizienten A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} führt man das **Übertragungsmaß** g und den **Wellenwiderstand** $\mathfrak{Z}$ ein.
Das Übertragungsmaß g des längssymmetrischen Vierpols wird durch die Beziehung

$$\cosh g = A_{11} = 1 + \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{G}}{2} \tag{3}$$

definiert. Daraus ergibt sich wegen (2)

$$\sinh g = \sqrt{\cosh^2 g - 1} = \sqrt{A_{12} A_{21}} = \sqrt{\mathfrak{R}\mathfrak{G}\left(1 + \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{G}}{4}\right)}. \tag{3a}$$

Der Wellenwiderstand $\mathfrak{Z}$ des längssymmetrischen Vierpols ist durch

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}} \tag{4}$$

festgelegt. Für das Π-Glied erhält man daraus ebenso wie für das T-Glied

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{G}}} \sqrt{1 + \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{G}}{4}}. \tag{5}$$

Werden die Größen A_{11}, A_{12}, A_{21} mittels (1c), (3) und (5) durch $\mathfrak{Z}$ und g ausgedrückt, so folgt anstelle von (1) als allgemeine Beziehung zwischen den Strömen und Spannungen am Eingang und Ausgang eines Vierpols

$$\boxed{\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh g & \mathfrak{Z} \sinh g \\ \frac{1}{\mathfrak{Z}} \sinh g & \cosh g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}}. \tag{6}$$

Anstelle der hyperbolischen Funktionen können Exponentialfunktionen eingeführt werden. In diesen schreiben sich die Vierpolgleichungen

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} U_2 + \mathfrak{Z} I_2 & U_2 - \mathfrak{Z} I_2 \\ \frac{U_2 + \mathfrak{Z} I_2}{\mathfrak{Z}} & \frac{U_2 - \mathfrak{Z} I_2}{\mathfrak{Z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{g} \\ e^{-g} \end{pmatrix}. \tag{6a}$$

Aus (6) folgt der Eingangswiderstand

$$\boxed{\mathfrak{R}_E = \frac{U_1}{I_1} = \mathfrak{Z} \frac{\frac{\mathfrak{R}_A}{\mathfrak{Z}} + \tanh g}{1 + \frac{\mathfrak{R}_A}{\mathfrak{Z}} \tanh g}} \tag{7}$$

mit

$$\mathfrak{R}_A = \frac{U_2}{I_2}. \tag{7a}$$

Es findet somit durch einen Vierpol stets eine Transformation des Widerstandes $\mathfrak{R}_A$ am Ausgang in den am Eingang gemessenen Wert $\mathfrak{R}_E$ statt (vgl. Bild 4.12).

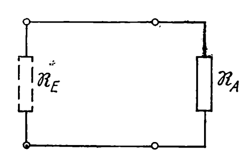


Bild 4.12. Abschlußwiderstand $\mathfrak{R}_A$ und Eingangswiderstand $\mathfrak{R}_E$ des Vierpols

Bei Kurzschluß $\mathfrak{R}_A = 0$ ist der Eingangswiderstand gleich

$$\mathfrak{R}_K = \mathfrak{Z} \tanh g, \tag{7b}$$

bei Leerlauf $\mathfrak{R}_A = \infty$ ergibt sich für den Eingangswiderstand

$$\mathfrak{R}_L = \mathfrak{Z} \coth g. \tag{7c}$$

Aus (7b) und (7c) erhält man den Wellenwiderstand $\mathfrak{Z}$ und das Übertragungsmaß g gemäß

$$\boxed{\mathfrak{Z} = \sqrt{\mathfrak{R}_K \mathfrak{R}_L}, \qquad \tanh g = \sqrt{\frac{\mathfrak{R}_K}{\mathfrak{R}_L}}}. \tag{8}$$

Für die **Spannungsübersetzung** des Vierpols folgt aus (6) und (7)

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\mathfrak{R}_A}{\mathfrak{R}_A \cosh g + \mathfrak{Z} \sinh g}, \tag{9}$$

für die **Stromübersetzung**

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{Z} \cosh g + \mathfrak{R}_A \sinh g}. \tag{10}$$

Ist der Abschlußwiderstand des Vierpols gleich dem Wellenwiderstand

$$\mathfrak{R}_A = \mathfrak{Z},$$

so erfolgt keine Widerstandstransformation, und es gilt

$$\mathfrak{R}_E = \mathfrak{R}_A = \mathfrak{Z}. \tag{11}$$

Dieser Fall wird als **Anpassung** (Widerstandsanpassung) bezeichnet. Zwischen den Spannungen und Strömen am Ausgang und am Eingang des Vierpols bestehen nach (9) und (10) bei Anpassung die Beziehungen

$$U_2 = U_1\, \mathrm{e}^{-g}, \tag{11a}$$

$$I_2 = I_1\, \mathrm{e}^{-g}. \tag{11b}$$

Das **Übertragungsmaß** g setzt sich aus Real- und Imaginärteil zusammen:

$$g = \mathrm{i}\,\alpha + \beta. \tag{12}$$

α bezeichnet das **Phasen-**, β das **Dämpfungsmaß.**
Die Dämpfung wird in **Neper (Np)** oder in **Dezibel (dB)** angegeben: Besteht zwischen zwei Amplituden bzw. zwei Effektivwerten (des Stromes oder der Spannung) das Verhältnis

$$\frac{A_1}{A_2} = \mathrm{e}^{\beta} \geqq 1,$$

so gibt

$$\beta = \ln \frac{A_1}{A_2}\,\mathrm{Np} = 2{,}302 \lg \frac{A_1}{A_2}\,\mathrm{Np} \tag{13}$$

das Dämpfungsmaß in Neper an.
Die **Leistung** ist proportional dem Quadrat der Amplitude. Man erhält

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{{A_1}^2}{{A_2}^2} = \mathrm{e}^{2\beta}.$$

Allgemein ist es zweckmäßiger, das Dämpfungsmaß auf Logarithmen zur Basis 10 zu beziehen. Man definiert als Dämpfungsmaß in **Dezibel** (dB):

$$\boxed{\begin{aligned} b &= 10 \lg \frac{P_1}{P_2}\ \mathrm{dB} = 20 \lg \frac{A_1}{A_2}\,\mathrm{dB} \\ &= 20 \lg \frac{U_{1\mathrm{eff}}}{U_{2\mathrm{eff}}}\,\mathrm{dB} = 20 \lg \frac{I_{1\mathrm{eff}}}{I_{2\mathrm{eff}}}\,\mathrm{dB} \end{aligned}}\,. \tag{14}$$

Zwischen der Angabe in Neper und der Angabe in Dezibel besteht die Beziehung

$$10^{\frac{b}{10}} = \mathrm{e}^{2\beta} \qquad \text{bzw.} \qquad b = \frac{20\beta}{\ln 10},$$

woraus die Umrechnungsformeln

$$\boxed{8{,}686\ \mathrm{dB} = 1\ \mathrm{Np}, \qquad 1\ \mathrm{dB} = 0{,}1151\ \mathrm{Np}} \tag{15}$$

folgen.

Beispiel 16

Durch ein Dämpfungsglied werden die Spannung und der Strom auf 1% ihres Ausgangswertes herabgesetzt. Für die Dämpfung in Neper folgt

$$\beta = \ln \frac{100}{1}\,\mathrm{Np} = 4{,}60\,\mathrm{Np}.$$

Das Dämpfungsmaß in Dezibel ist

$$b = 20 \lg \frac{100}{1}\,\mathrm{dB} = 10 \lg \left(\frac{100}{1}\right)^2 \mathrm{dB} = 40\,\mathrm{dB}.$$



Probleme

4.2.1. Dämpfungsglied

Ein Vierpol, der aus reinen Wirkwiderständen aufgebaut ist, soll den Wellenwiderstand $Z = 300\,\Omega$ und die Leistungsdämpfung $b = 10$ dB haben. Berechnen Sie die einzubauenden Widerstände für ein Π-Glied. Welche Spannungs- und welche Leistungsübersetzung erfolgt, wenn der Ausgang mit dem Wellenwiderstand abgeschlossen ist?

Lösung

Bei einem Π-Glied gilt nach (4.2./5) für den Wellenwiderstand

$$\mathfrak{Z} = Z = \sqrt{\frac{R}{G}}\,\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{RG}{4}}}, \tag{1}$$

und nach (4.2./3) für das Übertragungsmaß

$$\cosh g = 1 + \frac{RG}{2}. \tag{2}$$

In (2) können wir nach dem Additionstheorem der hyperbolischen Funktionen schreiben

$$\cosh g = \cosh(\mathrm{i}\,\alpha + \beta) = \cosh\beta\cos\alpha + \mathrm{i}\sinh\beta\sin\alpha. \tag{3}$$

Da nach (2) $\cosh g$ rein reell sein muß, folgt

$$\cosh\beta\cos\alpha = 1 + \frac{RG}{2}, \tag{2a}$$

$$\sinh\beta\sin\alpha = 0. \tag{2b}$$

Die Dämpfungskonstante soll von Null verschieden sein. Es muß daher nach (2b)

$$\alpha = 0 \tag{4}$$

gelten. Damit ergibt sich aus (2a)

$$RG = 2(\cosh\beta - 1).$$

Den vorgegebenen Wert $b = 10$ dB rechnen wir um:

$$\beta = 10 \cdot 0{,}1151 \text{ Np} = 1{,}151 \text{ Np}.$$

Damit erhalten wir

$$RG = 2(\cosh 1{,}15 - 1) = 2(1{,}74 - 1) = 1{,}48.$$

Für das Verhältnis der beiden unbekannten Größen folgt aus (1)

$$300\,\Omega = \sqrt{\frac{R}{G}}\,\frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1{,}48}{4}}} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{R}{G} = 1{,}233 \cdot 10^5\,\Omega^2.$$

Hieraus ergibt sich für den Längswiderstand $\mathfrak{R} = R$ und für die Querableitung $\mathfrak{G} = G$

$$R = 427\,\Omega, \qquad \frac{1}{G} = 289\,\Omega.$$

Ist der Vierpol mit dem Wellenwiderstand abgeschlossen, so können wir

$$U_2 = ZI_2$$

setzen. Damit erhalten wir aus (4.2./11) wegen $\alpha = 0$

$$U_1 = U_2\,\mathrm{e}^{\beta}, \qquad I_1 = I_2\,\mathrm{e}^{\beta}.$$

Für die Spannungsübersetzung folgt damit

$$\frac{U_2}{U_1} = \mathrm{e}^{-1,15} = 0{,}317.$$

Die Leistungsübersetzung wird, wie gefordert, gleich

$$\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2 = \mathrm{e}^{-2,30} = 0{,}10.$$

4.2.2. Schwingungssieb (Drosselkette)

Bild 4.13 zeigt eine Drosselkette, die sich aus reinen Blindwiderständen aufbaut. Die Daten der eingebauten Schaltelemente sind $L = 0{,}1$ H, $C = 100$ pF. Untersuchen Sie die Übertragungseigenschaften.

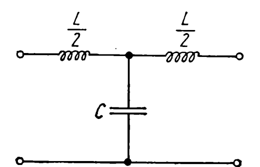


Bild 4.13. Drosselkette

Lösung

Es liegt ein T-Glied vor mit

$$\mathfrak{R} = \mathrm{i}\omega L, \qquad \mathfrak{G} = \mathrm{i}\omega C. \tag{1}$$

Für den Wellenwiderstand folgt nach (4.2./5)

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{G}}}\sqrt{1 + \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{G}}{4}} = \sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}}. \tag{2}$$

Nach (4.2./3) und (4.2./1 c) erhalten wir für das Übertragungsmaß

$$\cosh g = \cosh\beta\cos\alpha + \mathrm{i}\sinh\beta\sin\alpha = 1 + \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{G}}{2} = 1 - \frac{\omega^2 LC}{2}. \tag{3}$$

Durch Trennung des Realteiles vom Imaginärteil entsteht

$$\cosh\beta\cos\alpha = 1 - \frac{\omega^2 LC}{2}, \tag{4}$$

$$\sinh\beta\sin\alpha = 0. \tag{5}$$

Gleichung (5) gestattet zwei Lösungen. Im ersten Fall ergibt sich

$$\alpha = 0 \pmod{\pi}, \qquad \cos\alpha = \pm 1. \tag{6}$$

Wegen $\cosh\beta \geqq 1$ muß $\cos\alpha = -1$, also $\alpha = \pi$ sein. Dann ist (4) lösbar für

$$\omega \geqq \omega_g \qquad \text{mit} \qquad \omega_g = \frac{2}{\sqrt{LC}}. \tag{7}$$

Wie man aus (2) entnimmt, bedeutet diese Bedingung, daß der Wellenwiderstand des Vierpols imaginär ist:

$$\mathfrak{Z} = \mathrm{i}\sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{\frac{\omega^2 LC}{4} - 1} = \mathrm{i}\sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_g^2} - 1}. \tag{8}$$

Der Dämpfungskoeffizient ist gleich

$$\beta = \operatorname{arcosh}\left(\frac{\omega^2 LC}{2} - 1\right). \tag{9}$$

Er steigt mit zunehmender Frequenz rasch an.

Im zweiten Fall ist

$$\sinh \beta = 0, \qquad \text{d. h.} \qquad \beta = 0. \tag{10}$$

Aus (4) folgt damit

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\omega^2 LC}{2}. \tag{11}$$

Diese Gleichung ist lösbar für $\cos \alpha \geqq -1$, d. h. für

$$\omega \leqq \omega_g = \frac{2}{\sqrt{LC}}. \tag{12}$$

Man erhält eine ungedämpfte Übertragung, jedoch tritt eine Phasenverschiebung auf. Der Wellenwiderstand ist

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}} = \sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_g^2}}, \tag{13}$$

also rein reell.
Zusammengefaßt ergibt sich: Kreisfrequenzen bis zu

$$\omega_g = \frac{2}{\sqrt{LC}} = \frac{2}{\sqrt{0{,}1 \cdot 100 \cdot 10^{-12}}}\,\text{s}^{-1} = 6{,}32 \cdot 10^5\,\text{s}^{-1},$$

d. h., Frequenzen

$$f \leqq f_g = \frac{6{,}32 \cdot 10^5}{2\pi} = 1{,}01 \cdot 10^5\,\text{Hz}$$

werden ungedämpft übertragen. Frequenzen oberhalb dieser Grenzfrequenz werden gedämpft. Bei wesentlicher Überschreitung der Sperrfrequenz wirkt der Vierpol als Sperre. Der Bereich $f \leqq f_g$ wird daher als **Durchlaßbereich,** der Bereich $f > f_g$ als **Sperrbereich** bezeichnet.

4.2.3. Doppelsieb

Ein Kurzwellenempfänger enthält einen Vierpol nach Bild 4.14. Er soll derart abgestimmt werden, daß Frequenzen zwischen $\omega_I = 2\pi \cdot 10^7\,\text{s}^{-1}$ und $\omega_{II} = 2\pi \cdot 1{,}2 \cdot 10^7\,\text{s}^{-1}$ ungedämpft empfangen werden können, jedoch sollen Störungen aus den Frequenzbereichen darüber und darunter ausgeschlossen werden. Welcher Durchlaßbereich ergibt sich, wenn die Spulen die Induktivitäten $L_1/2 = 0{,}5$ mH, $L_2 = 0{,}01$ mH haben?

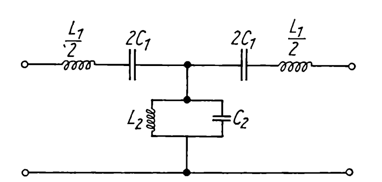


Bild 4.14. Doppelsieb

Lösung

Der Längswiderstand des T-Gliedes ist gleich

$$\mathfrak{R} = \mathrm{i}\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right). \tag{1}$$

Für die Querableitung erhalten wir

$$\mathfrak{G} = \mathrm{i}\left(\omega C_2 - \frac{1}{\omega L_2}\right). \tag{2}$$

Aus (4.2./3) folgt

$$\cosh g = 1 + \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{G}}{2}, \tag{3}$$

d. h.

$$\cos\alpha\cosh\beta + \mathrm{i}\sin\alpha\sinh\beta = 1 - \frac{\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)\left(\omega C_2 - \frac{1}{\omega L_2}\right)}{2}.$$

Der Bereich gedämpfter Wellen ist durch

$$\sin\alpha = 0, \qquad \sinh\beta \neq 0, \tag{4}$$

der Durchlaßbereich durch

$$\sin\alpha \neq 0, \qquad \sinh\beta = 0 \tag{5}$$

bestimmt. Sollen gedämpfte Wellen vorliegen, muß also $\cos\alpha$ die Werte $+1$ oder -1 annehmen. Für $\cos\alpha = +1$ ergibt sich der Bereich gedämpfter Wellen aus der Forderung $\cosh\beta > 1$. Nach (3) bedeutet das

$$\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)\left(\omega C_2 - \frac{1}{\omega L_2}\right) < 0. \tag{6}$$

Wir setzen

$$\omega_1^2 = \frac{1}{L_1C_1}, \qquad \omega_2^2 = \frac{1}{L_2C_2} \tag{7}$$

und erhalten damit anstelle von (6)

$$(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2) < 0 \tag{6a}$$

als Bedingung für die Existenz gedämpfter Wellen.
Für $\cos\alpha = -1$ muß nach (3) bei gedämpften Wellen

$$(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2) > \frac{4\omega^2}{L_1C_2} \tag{8}$$

erfüllt sein.

Die Grenzen zwischen Durchlaß- und Dämpfungsbereichen erhält man aus (6a) und (8):

$$\omega_1, \omega_2, \qquad \omega_{\mathrm{I,II}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{4}{L_1C_2}\right) \mp \sqrt{\frac{1}{4}\left(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{4}{L_1C_2}\right)^2 - \omega_1^2\omega_2^2}}. \tag{9}$$

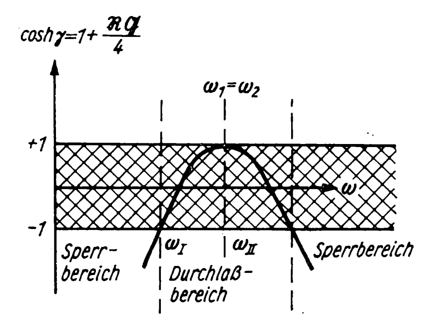


Bild 4.15. Durchlaßbereich und Sperrbereiche eines Doppelsiebes

Bild 4.15 zeigt den Verlauf von $\cosh g$ nach (3). Soll die Schwingung den Vierpol ungedämpft passieren können, so muß $\cosh g$ im Intervall

$$-1 \leqq \cosh g \leqq +1 \tag{10}$$

liegen. Der Durchlaßbereich wird hiernach zwischen ω_1 und ω_2 durch einen Dämpfungsbereich unterbrochen. Um diese Unterbrechung zu beseitigen, stimmen wir die Bauteile so ab, daß

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_0, \qquad \text{d. h.} \qquad L_1C_1 = L_2C_2 \tag{11}$$

gilt. Für die Grenzen erhalten wir damit nach (9)

$$\omega_{\mathrm{I,II}} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{2C_1}{C_2} \mp 2\sqrt{\frac{C_1}{C_2} + \frac{C_1^2}{C_2^2}}}. \tag{12}$$

Mit den vorgegebenen Zahlen folgt

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{L_2}{L_1} = 0{,}01.$$

Für die Wurzeln in (12) ergeben sich damit die Werte 0,905 und 1,105. Die Kapazitäten müssen daher gleich

$$C_1 = \frac{0{,}905^2}{4\pi^2 f_{\mathrm{I}} L_1} = \frac{0{,}905^2}{4\pi^2 \cdot 10^{14} \cdot 0{,}001}\ \mathrm{F} = 0{,}21\ \mathrm{pF},$$

$$C_2 = 100 C_1 = 21\ \mathrm{pF}$$

sein. Als Grenzen des ungedämpften Bereiches $f_{\mathrm{I}} \cdots f_{\mathrm{II}}$ erhalten wir damit

$$f_{\mathrm{I}} = 10^7\ \mathrm{Hz}, \qquad f_{\mathrm{II}} = \frac{1{,}105}{0{,}905} 10^7\ \mathrm{Hz} = 1{,}22 \cdot 10^7\ \mathrm{Hz}.$$

4.2.4. Wien—Maxwell-Brücke zur Messung der Induktivität

Zur Messung des Wechselstromwiderstandes einer Spule wird diese in eine Meßbrücke mit den festen bzw. stufenweise regulierbaren Widerständen R_1 und R_2 und dem variablen komplexen Widerstand $R + \frac{1}{\mathrm{i}\,\omega C}$ geschaltet (vgl. Bild 4.16). Stellen Sie die Bedingung dafür auf, daß zwischen den Punkten A und B keine Spannung vorhanden ist.
Wie groß sind die Induktivität L_x und der ohmsche Widerstand R_x, wenn für die festen Widerstände die Werte $R_1 = R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$ eingestellt sind und bei Stromabgleich für die stetig veränderlichen Größen $R = 250\,\mathrm{k\Omega}$, $C = 1{,}5 \cdot 10^{-8}$ F gemessen wird?

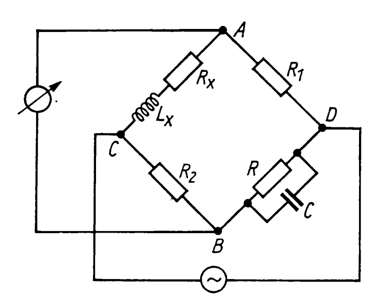


Bild 4.16. Wien—Maxwell-Brücke

Lösung

In Bild 4.16 addieren sich die parallel geschalteten Widerstände gemäß

$$\frac{1}{R} + \mathrm{i}\,\omega C = \frac{1}{\mathfrak{R}}. \tag{1}$$

Soll zwischen A und B keine Spannung bestehen, also durch das Meßgerät kein Strom fließen, so müssen die beiden Gleichungen

$$(R_x + \mathrm{i}\omega L_x)\, I_1 = R_2 I_2, \tag{2}$$

$$R_1 I_1 = \mathfrak{R} I_2 \tag{3}$$

erfüllt sein. Durch Division erhält man

$$\frac{R_x + \mathrm{i}\omega L_x}{R_1} = \frac{R_2}{\mathfrak{R}} = \frac{R_2}{R} + \mathrm{i}\omega C R_2. \tag{4}$$

Trennung von Real- und Imaginärteil ergibt

$$R_x = \frac{R_1 R_2}{R}, \tag{5}$$

$$L_x = C R_1 R_2. \tag{6}$$

Wir setzen die vorgegebenen Werte ein und erhalten

$$R_x = \frac{10^3 \cdot 10^3}{250 \cdot 10^3}\,\Omega = 4{,}0\,\Omega\,.$$

$$L_x = 1{,}5 \cdot 10^{-8} \cdot 10^3 \cdot 10^3\ \mathrm{A\,s\,V^{-1}\,(V\,A^{-1})^2} = 0{,}015\ \mathrm{H}\,.$$

In gleicher Weise können Kapazitäten gemessen werden.

4.2.5. Eisenloser Transformator

Ein Transformator besteht primärseitig aus einer kreiszylindrischen Spule mit $n_1 = 20$ Windungen. Sekundärseitig befindet sich eine Spule mit $n_2 = 2000$ Windungen. Die Längen und die Querschnittsradien beider Spulen sind gleich: $l_1 = l_2 = l = 25$ cm, $R_{10} = R_{20} = R_0 = 2$ cm. Der Drahtquerschnitt ist primärseitig gleich $A_1 = 1\ \mathrm{cm}^2$, sekundärseitig gleich $A_2 = 1\ \mathrm{mm}^2$. Beide Spulen bestehen aus Kupferdraht ($\gamma = 5{,}9 \cdot 10^7\,\Omega^{-1}\,\mathrm{m}^{-1}$). Sie seien vollständig miteinander verkettet, d. h., der magnetische Fluß einer Spule geht vollständig auch durch die andere Spule. Berechnen Sie die Leerlaufspannungs- und die Kurzschlußstromübersetzung des Transformators. Wie groß ist der Eingangswiderstand, wenn der Transformator sekundärseitig mit der Impedanz $\mathfrak{R}_A = 6{,}6\ \mathrm{k}\Omega$ abgeschlossen ist? Welche Leistung wird übertragen, wenn dabei primärseitig die effektive Spannung $U_{1\,\mathrm{eff}} = 220$ V anliegt? Wie groß sind sekundärseitig Strom und Spannung? Die Frequenz des Wechselstromes beträgt $f = 500$ Hz.
Wie in 4.3.1. und 4.3.2. abgeleitet wird, sind die beiden Induktionskoeffizienten der Selbstinduktion durch

$$L_j = L_{jj} = \frac{\pi \mu_0 n_j^2 R_{j0}^2}{l} \qquad (j = 1, 2) \tag{1}$$

bestimmt. Der Koeffizient der Gegeninduktion ist bei vollständiger Verkettung durch

$$L_{12} = \frac{\pi \mu_0 R_{20}^2 n_1 n_2}{l} \tag{2}$$

gegeben (vgl. 4.3.2.).

Lösung

Aus (1) und (2) ergeben sich die Werte

$$L_1 = L_{11} = 2{,}53\ \mu\mathrm{H}, \qquad L_2 = L_{22} = 25{,}3\ \mathrm{mH}, \qquad L_{12} = 253\ \mu\mathrm{H}. \tag{3}$$

Für die ohmschen Widerstände erhält man primärseitig einen Wert in der Größenordnung 1 mΩ, sekundärseitig $R_2 = 4{,}27\,\Omega$.
Der Strom I_1 auf der Primärseite erzeugt auf der Sekundärseite durch die Gegeninduktion den Spannungsabfall

$$-\Delta U_2 = \pm \mathrm{i}\omega L_{12} I_1\,. \tag{4}$$

Das obere Vorzeichen gilt für gleichsinnige Wicklung der beiden Spulen, das untere für gegensinnige.

Für die Spannungen U_1 und U_2 in den beiden Stromkreisen folgt nach Bild 4.17

$$-U_1 + R_1 I_1 + i\omega L_1 I_1 \pm i\omega L_{12} I_2 = 0, \tag{5}$$

$$U_2 \pm i\omega L_{12} I_1 + R_2 I_2 + i\omega L_2 I_2 = 0. \tag{6}$$

Die oberen Vorzeichen gelten für **gleichsinnige**, die unteren für **gegensinnige** Wicklungen.

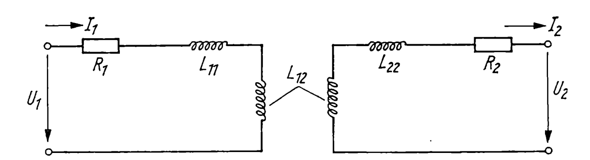


Bild 4.17. Eisenloser Transformator als Vierpol

Das System der beiden miteinander gekoppelten Gleichungen (5) und (6) kann in Form der Matrizengleichung

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\Re} \boldsymbol{I} \tag{7}$$

zusammengefaßt werden, mit der Spannungsmatrix

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

der Strommatrix

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

und der Impedanzmatrix

$$\boldsymbol{\Re} = \begin{pmatrix} \Re_1 & \pm i\omega L_{12} \\ \mp i\omega L_{12} & -\Re_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + i\omega L_1 & \pm i\omega L_{12} \\ \mp i\omega L_{12} & -R_2 - i\omega L_2 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Sind im Stromkreis kapazitive Widerstände eingeschaltet, so können $\Re_1$ und $\Re_2$ gemäß

$$\Re_j = R_j + i\omega L_j + \frac{1}{i\omega C_j} \quad (j = 1, 2) \tag{11}$$

erweitert werden.

Im vorliegenden Fall sind die ohmschen Widerstände gegen die Induktanzen zu vernachlässigen; Kondensatoren fehlen. Es folgt damit aus (5) und (6)

$$U_1 = i\omega(L_1 I_1 \pm L_{12} I_2), \tag{12}$$

$$U_2 = i\omega(\mp L_{12} I_1 - L_2 I_2). \tag{13}$$

Bei Leerlauf ist der sekundärseitige Strom I_2 gleich Null. Für die **Leerlaufspannungsübersetzung** ergibt sich damit

$$\left|\frac{U_2}{U_1}\right| = \frac{L_{12}}{L_1}. \tag{14}$$

Kurzschluß ist durch $U_2 = 0$ gekennzeichnet. Als **Kurzschlußstromübersetzung** erhält man

$$\left|\frac{I_2}{I_1}\right| = \frac{L_{12}}{L_2}. \tag{15}$$

Bei vollständiger Verkettung folgt nach (1) und (2)

$$\left|\frac{U_2}{U_1}\right| = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{ü}, \tag{16}$$

$$\left|\frac{I_2}{I_1}\right| = \frac{n_1}{n_2} = ü. \tag{17}$$

Mit dem Transformator erfolgt bei Leerlauf die Spannungsübersetzung 100 : 1, bei Kurzschluß die Stromübersetzung 1 : 100. $ü$ ist gleich 0,01.
Ist der Transformator sekundärseitig mit dem Widerstand $\mathfrak{R}_A$ abgeschlossen, so verwendet man zur Berechnung des Stromes und der Spannung die beiden Gleichungen (5) und (6). Darin lassen sich zwei der vier Größen U_1, I_1, U_2, I_2 auf die beiden anderen zurückführen. Der Abschlußwiderstand

$$\mathfrak{R}_A = \frac{U_2}{I_2} \tag{18}$$

vermittelt eine dritte Beziehung. Eine vierte ergibt sich durch die Eingangsbedingungen.
Wir beschränken uns auf gleichsinnige Wicklungen und benutzen die Definitionsgleichungen (11). Aus (6) erhalten wir damit auf Grund der Anfangsbedingungen (18)

$$I_2 = -\frac{\mathrm{i}\omega L_{12}}{\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_A} I_1. \tag{19}$$

Dieser Zusammenhang kann in (5) eingeführt werden, woraus folgt

$$\mathfrak{R}_E = \frac{U_1}{I_1} = \mathfrak{R}_1 + \frac{\omega^2 L_{12}^2}{\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_A}. \tag{20}$$

Hieraus ergibt sich in Verbindung mit (19) der Sekundärstrom

$$I_2 = \frac{-\mathrm{i}\omega L_{12}}{\mathfrak{R}_1(\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_A) + \omega^2 L_{12}^2} U_1, \tag{21}$$

während wir für die Sekundärspannung wegen (18)

$$U_2 = \frac{-\mathrm{i}\omega L_{12}\mathfrak{R}_A}{\mathfrak{R}_1(\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_A) + \omega^2 L_{12}^2} U_1 \tag{22}$$

erhalten.

Mit den vorgegebenen Zahlen folgt aus (20), wenn die ohmschen Widerstände vernachlässigt werden,

$$\Re_E = i\left[2\pi \cdot 500 \cdot 2{,}53 \cdot 10^{-6} + \frac{(2\pi \cdot 500 \cdot 253 \cdot 10^{-6})^2}{2\pi \cdot 500 \cdot 25{,}3 \cdot 10^{-3} + 6{,}6 \cdot 10^3}\right]\Omega = i\,7{,}9 \cdot 10^{-3}\Omega.$$

Für die sekundäre Spannung erhalten wir nach (22) $U_{2\,\mathrm{eff}} = 21\,980$ V, für den sekundärseitigen Strom nach (21) $I_{2\,\mathrm{eff}} = 3{,}33$ A. Wegen des reellen Abschlußwiderstandes besteht keine Phasenverschiebung, so daß sich für die am Abschluß entnommene Nutzleistung

$$P = U_{2\,\mathrm{eff}} I_{2\,\mathrm{eff}} = 21\,980\ \mathrm{V} \cdot 2{,}33\ \mathrm{A} = 73{,}2\ \mathrm{W}$$

ergibt.



Aufgaben

A 4.2.1. Bestimmen Sie den Eingangswiderstand eines kurzgeschlossenen Vierpols.

A 4.2.2. Ein leerlaufender Vierpol hat den Wellenwiderstand 300 Ω, das Phasenmaß $\alpha = \pi$, das Dämpfungsmaß Null. Wie groß ist sein Eingangswiderstand?

A 4.2.3. Geben Sie das Leistungsverhältnis $P_1 : P_2 = 500$ in Dezibel und in Neper an.

A 4.2.4. Als Signal-Rausch-Verhältnis eines Meßgerätes (vgl. 5.2.) werden 35 dB angegeben. Wie groß ist das Verhältnis zwischen Signal- und Rauschleistung, zwischen Signal- und Rauschspannung?

A 4.2.5. Ein T-Glied hat die Widerstände $\Re = 400\,\Omega$, $1/\mathfrak{G} = 20\,\Omega$. Wie groß sind der Wellenwiderstand und das Übertragungsmaß g?

A 4.2.6. Es soll ein Dämpfungsglied mit dem Wellenwiderstand $Z = 180\,\Omega$ und dem Dämpfungsmaß $\beta = 1{,}5$ Np gebaut werden. Berechnen Sie die Widerstände für ein T-Glied.

A 4.2.7. Zwei Vierpole gleichen Wellenwiderstandes und gleichen Übertragungsmaßes sind hintereinandergeschaltet. Geben Sie die Übertragungsformel an. Welcher Wellenwiderstand und welches Übertragungsmaß ergeben sich für den resultierenden Vierpol?

A 4.2.8. Zur Unterdrückung von Oberwellen wird ein Vierpol nach Bild 4.18 mit $C = 0{,}1$ pF, $L = 1$ mH verwendet. Bestimmen Sie die Grenzfrequenz des Vierpols.

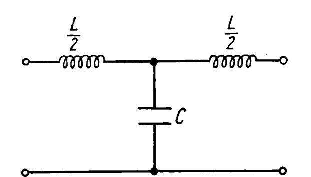


Bild 4.18. T-Glied

A 4.2.9. Bestimmen Sie den Durchlaßbereich und den Sperrbereich für eine Kondensatorkette nach Bild 4.19. Welche Formel ergibt sich für den Wellenwiderstand?

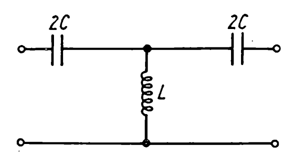


Bild 4.19. Kondensatorkette

A 4.2.10. Welcher Durchlaßbereich und welcher Sperrbereich ergibt sich für die Drosselkette nach Bild 4.20? Wie groß ist der Wellenwiderstand?

A 4.2.11. Berechnen Sie den Durchlaßbereich für ein Doppelsieb nach Bild 4.14 ($C_1 = 2{,}5$ pF, $L_1 = 500$ mH, $L_2 = 2$ mH).

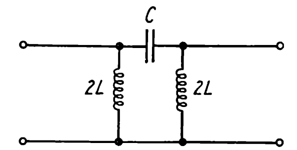


Bild 4.20. Π-Glied

A 4.2.12. In einer WIEN—MAXWELL-Brücke nach Bild 4.16 betragen die festen Widerstände $R_1 = 5\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 10\,\text{k}\Omega$. Spannungsabgleich wird für $R = 550\,\text{k}\Omega$, $C = 4{,}5 \cdot 10^{-9}$ F gemessen. Die Frequenz ist gleich $f = 50$ Hz. Berechnen Sie L_x und R_x.

A 4.2.13. Zur Messung von Kondensatoren verwendet man die Kapazitätsmeßbrücke nach Bild 4.21. Stellen Sie für diese die Abgleichbedingung auf und bestimmen Sie daraus die Gleichungen für die unbekannte Kapazität C_x und den unbekannten Widerstand R_x.

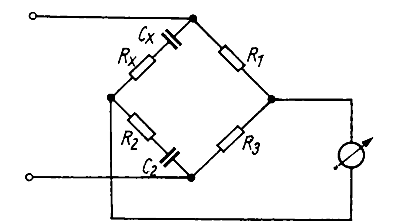


Bild 4.21. Kapazitätsmeßbrücke

A 4.2.14. Berechnen Sie die Leerlaufspannungs- und die Kurzschlußstromübersetzung für einen Transformator mit den Windungszahlen $n_1 = 10000$, $n_2 = 10$. Wie groß ist der Eingangswiderstand für $f = 50$ Hz, $L_{12} = 1{,}5$ mH, $\mathfrak{R}_A = 15\,\text{k}\Omega$? Die Spulenquerschnitte sind gleich.

A 4.2.15. Berechnen Sie zur vorangegangenen Aufgabe die übertragene Leistung, wenn die effektive Spannung primärseitig 220 V beträgt.

A 4.2.16. Stellen Sie die Formel für den Eingangswiderstand eines Transformators auf, wenn der Abschlußwiderstand $\mathfrak{R}_A$ gegen die Induktanz ωL_2 vernachlässigbar klein ist.

4.3. Berechnung der Induktionskoeffizienten und des Wellenwiderstandes

E

Einführung

Die Berechnung der Induktionskoeffizienten kann allgemein nach den Gleichungen (4.1./19) bis (4.1./21) erfolgen. Ihre Anwendung ergibt mehrfache Integrale, deren Auswertung in der Regel zu komplizierten Rechnungen führt. Man ist daher bestrebt, einfachere Verfahren anzuwenden.
Vielfach führt entweder die **Energiegleichung**

$$\boxed{W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} LI^2} \tag{1}$$

zum Ziel, oder man nutzt den Zusammenhang (4.1./42) zwischen dem **magnetischen Fluß und dem Induktionskoeffizienten**

$$\boxed{\Phi_{\mathrm{F}} = \iint_A \mathfrak{B} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} = LI} \tag{2}$$

aus.

Beispiel 17

Es soll der **Selbstinduktionskoeffizient einer kreiszylindrischen Spule** bestimmt werden, deren Länge l groß ist gegen den Querschnittradius R.
Die gespeicherte magnetische Energie ist gleich

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{B} V. \tag{3}$$

Das Magnetfeld hat die Stärke

$$H = \frac{nI}{l}. \tag{4}$$

Setzt man (4) zusammen mit $\mathfrak{B} = \mu_0 \mathfrak{H}$ in (3) ein und berechnet das Volumen V der Spule aus Grundfläche πR^2 und Länge l, so folgt

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{\pi \mu_0 n^2 R^2 I^2}{2l}. \tag{5}$$

Für den aus einer Spule mit der Induktivität $L = L_{11}$ bestehenden Stromkreis ist nach (4.1./24)

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} L_{11} I^2. \tag{6}$$

Damit ergibt sich aus dem Vergleich von (5) und (6)

$$L_{11} = \frac{\pi \mu_0 n^2 R^2}{l}. \tag{7}$$

Beispiel 18

Es soll die **Induktivität zweier koaxialer Zylinder** bzw. die **Induktivität einer Koaxialleitung** der Länge l bestimmt werden. Der Zylinderradius des kompakten Innenleiters sei R_i, der Innenradius des Außenleiters R_a. Die Störungen an den Enden des Zylinders seien zu vernachlässigen.
Das Magnetfeld im Innern ist gleich

$$\mathfrak{H}_\varphi = \frac{I}{2\pi r}. \tag{8}$$

Hieraus folgt als magnetischer Fluß (vgl. Bild 4.22)

$$\Phi_\mathrm{F} = \iint_A \mathfrak{B} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} = \mu_0 l \int_{R_\mathrm{i}}^{R_\mathrm{a}} \frac{I}{2\pi r}\,\mathrm{d}r. \tag{9}$$

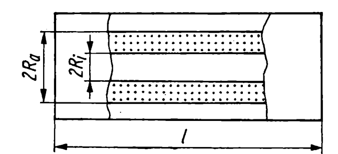


Bild 4.22. Längsschnitt durch eine Koaxialleitung mit ihren magnetischen Feldlinien

Durch Auswertung des Integrals ergibt sich

$$\Phi_\mathrm{F} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{R_\mathrm{a}}{R_\mathrm{i}} I = LI. \tag{10}$$

Für die Induktivität der Leitung erhält man daraus

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{R_\mathrm{a}}{R_\mathrm{i}}. \tag{11}$$

Sie ist der Leiterlänge proportional.

Bei **homogenen Leitern** ändern sich über die gesamte Länge der Leitung weder die geometrischen Abmessungen noch die Materialeigenschaften. Kapazität und Induktivität sind proportional der Leiterlänge. Daher wird bei homogenen Leitungen die Angabe der Induktivität und der Kapazität auf Leiterstücke der Länge 1 m bezogen. Diese Größen werden als **Induktivitätsbelag** L' und als **Kapazitätsbelag** C' definiert. L' hat die Maßeinheit H m^{-1}, C' die Maßeinheit F m^{-1}. Nach Beispiel 18 ist der Induktivitätsbelag einer Koaxialleitung

$$L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_\mathrm{a}}{R_\mathrm{i}}. \tag{12}$$

Für den Kapazitätsbelag erhält man nach (2.1.2./7)

$$C' = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln \dfrac{R_a}{R_i}}. \tag{13}$$

Bei hohen Frequenzen können die Verluste durch Wärmewirkung vernachlässigt werden, wenn hochwertiges Isolationsmaterial verwendet wird (vgl. 4.4.). Es besteht dann zwischen dem Induktivitätsbelag L' und dem Kapazitätsbelag C' bei homogenen Leitern allgemein die Beziehung

$$\boxed{\sqrt{L'C'} = \frac{n}{c_0} = \sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{14}$$

(vgl. 4.4./27). c_0 gibt darin die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, n die Brechzahl des Zwischenmediums an.
Das Verhältnis

$$\boxed{\sqrt{\frac{L'}{C'}} = Z} \tag{15}$$

hat die Maßeinheit Ω. Es gibt bei verlustfreien, homogenen Leitern den **Wellenwiderstand** an (vgl. 4.4./9).



Probleme

4.3.1. Selbstinduktivität einer Spule

Eine Spule aus $n = 15000$ Windungen mit kreisförmigem Querschnitt hat den Radius $R = 0{,}5$ cm und die Länge $l = 12$ cm. Berechnen Sie den Koeffizienten L_{11} der Selbstinduktion. Wie groß ist die induzierte Gegenspannung, wenn im Verlauf von $\Delta t = 2$ s der Strom I von 0,4 A gleichmäßig auf Null reduziert wird?

Lösung

Der magnetische Fluß durch den Spulenquerschnitt ist gleich

$$\iint \mathfrak{B} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} = \mu_0 HA = \mu_0 \frac{nI}{l} \pi R^2. \tag{1}$$

Nach (4.3./2) besteht die Beziehung

$$\iint \mathfrak{B} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} = \Phi_F = LI. \tag{2}$$

Aus dem Vergleich von (1) und (2) erhalten wir damit für L

$$\boxed{L = L_{11} = \frac{\pi \mu_0 n^2 R^2}{l}}. \tag{3}$$

Im Gegensatz zu den homogenen Leitern ist die Induktivität der Spule nicht proportional der Leitungslänge. Daher ist es nicht möglich, für sie einen Induktivitätsbelag zu definieren.
Die induzierte Gegenspannung ergibt sich gemäß

$$U_{\text{ind}} = -L_{11} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}. \tag{4}$$

Mit den vorgegebenen Zahlen folgt für den Koeffizienten der Selbstinduktion

$$L_{11} = \frac{\pi \cdot 1{,}257 \cdot 10^{-6} \cdot 15\,000^2 \cdot (5 \cdot 10^{-3})^2}{0{,}12}\,\text{H} \doteq 0{,}185\,\text{H}.$$

Die induzierte Gegenspannung wird gleich

$$U_{\text{ind}} = -0{,}185 \cdot \frac{0{,}4}{2}\,\text{V} = -0{,}037\,\text{V}.$$

4.3.2. Gegeninduktivität zweier gekoppelter Spulen

Im Innern einer Spule aus $n_1 = 5000$ Windungen befindet sich eine zweite Spule, die $n_2 = 3000$ Windungen enthält. Die Länge beider Spulen ist $l = 15$ cm. Der Durchmesser des Spulenquerschnitts beträgt für die erste Spule $2R_1 = 2$ cm, für die zweite Spule $2R_2 = 1{,}5$ cm. Das Zwischenmedium ist Luft. Berechnen Sie die Gegeninduktivität der beiden Spulen. Welche Spannung wird in der zweiten Spule hervorgerufen, wenn durch die erste Wechselstrom mit der Periodenzahl $f = 50$ Hz und der effektiven Stromstärke $I_{1\,\text{eff}} = 0{,}1$ A fließt? Welcher Anteil der in der ersten Spule erzeugten Feldlinien geht durch die zweite Spule?

Lösung

Fließt durch die äußere Spule der Strom I_1, so wird damit in der inneren Spule der magnetische Fluß

$$\Phi_{\text{F}} = \iint \mathfrak{B} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} = \mu_0 \frac{n_1 I_1}{l} \pi R_2^2 \tag{1}$$

erzeugt. Die Änderung des Stromes in der äußeren Spule induziert in der inneren Spule die Spannung

$$U_2 = -\frac{n_2\,\mathrm{d}\Phi_{\text{F}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\pi \mu_0 n_1 n_2 R_2^2}{l} \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}. \tag{2}$$

Nach (4.1./43) ist die Gegeninduktivität L_{12} durch

$$U_2 = -L_{12} \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \tag{3}$$

definiert. Somit erhält man für die Gegeninduktivität des verketteten Systems

$$L_{12} = \frac{\pi \mu_0 n_1 n_2 R_2^2}{l}. \tag{4}$$

Mit den vorgegebenen Zahlen folgt

$$L_{12} = \frac{\pi \cdot 1{,}256 \cdot 10^{-6} \cdot 5000 \cdot 3000 \cdot (0{,}75 \cdot 10^{-2})^2}{0{,}15}\,\mathrm{H} = 0{,}022\,\mathrm{H}.$$

Für die induzierte Spannung ergibt sich, wenn man die zeitliche Abhängigkeit in der Form $e^{i\omega t}$ voraussetzt,

$$U_2 = -iL_{12}\omega I_1 = -iL_{12}\omega I_{1\mathrm{eff}}\sqrt{2}\,e^{i\omega t} = L_{12}\omega I_{1\,\mathrm{eff}}\sqrt{2}\;e^{i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}. \tag{5}$$

Mit den vorgegebenen Werten erhalten wir

$$U_2 = 0{,}022 \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}1 \cdot 1{,}41 \cdot e^{i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}\,\mathrm{V} = 0{,}98\,e^{i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}\,\mathrm{V}.$$

Die induzierte Spannung eilt bei vernachlässigbarem ohmschem Widerstand dem Strom um eine Viertelperiode nach.
Die Gegeninduktivität zweier Spulen wird im allgemeinen in der Form

$$\boxed{L_{12} = k\sqrt{L_{11}\,L_{22}}} \tag{6}$$

dargestellt. k bezeichnet den **Kopplungsfaktor.** Er liegt im Wertebereich

$$0 \leqq k \leqq 1. \tag{7}$$

Im betrachteten Fall ist

$$k = \frac{R_2}{R_1} = \frac{1{,}5}{2{,}0} = 0{,}75, \qquad k^2 = \frac{R_2^2}{R_1^2} = 0{,}5625.$$

Das bedeutet: 56,25% der in der ersten Spule erzeugten magnetischen Feldlinien gehen durch die zweite Spule.

4.3.3. Wellenwiderstand und Induktivitätsbelag der Koaxialleitung

In einer Koaxialleitung beträgt der Durchmesser des Innenleiters $2R_i = 6{,}25$ mm, der Innendurchmesser des Außenleiters $2R_a = 20$ mm. Berechnen Sie den Wellenwiderstand und den Induktionsbelag der Leitung. Zur Halterung des Innenleiters wird dieser mit kreisförmigen Stützen aus Kunstharz versehen. Welchen Durchmesser muß der Innenleiter an dieser Stelle haben, wenn der Wellenwiderstand unverändert bleiben soll? Die Dielektrizitätszahl des Kunstharzes sei $\varepsilon_r = 4{,}5$.

Lösung

Der Induktivitätsbelag kann nach Beispiel 18 berechnet werden. Eine andere Methode besteht darin, anstelle des Induktivitätsbelages zunächst den Kapazitätsbelag zu berechnen. Nach

(2.1.2./7) ist dieser gleich

$$C' = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \frac{R_a}{R_i}}. \tag{1}$$

Zwischen C' und L' besteht nach (4.3./14) die Beziehung

$$L'C' = \frac{n^2}{c_0{}^2} = \varepsilon\mu. \tag{2}$$

Hieraus erhält man den Induktivitätsbelag

$$L' = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_a}{R_i} \tag{3}$$

in Übereinstimmung mit (4.3./12). Der Wellenwiderstand der Leitung wird gleich

$$Z = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R_a}{R_i}. \tag{4}$$

Hierin können wir $\mu = \mu_0$ setzen und erhalten damit

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_r}} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R_a}{R_i}. \tag{5}$$

Mit den vorgegebenen Zahlen folgt nach (5) für Luft mit $\varepsilon_r = 1$

$$Z = 120\pi \frac{1}{2\pi} \ln \frac{20}{6{,}25} \,\Omega = 69{,}8\,\Omega \approx 70\,\Omega. \tag{5a}$$

Als Induktivitätsbelag ergibt sich aus (3)

$$L' = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \ln \frac{20}{6{,}25} \,\text{H m}^{-1} = 2{,}33 \cdot 10^{-7} \,\text{H m}^{-1}.$$

Wird das Zwischenmedium durch die angebrachten Stützen verändert, so verändert sich längs dieses Leitungsstückes auch der Wellenwiderstand. Bei vorgegebenen Abmessungen für das Außenleiterrohr läßt sich das nur durch eine Verkleinerung des Innenleiterdurchmessers kompensieren. Für $\varepsilon_r = 4{,}5$ ergibt sich aus (5) mit dem Wellenwiderstand nach (5a) der Innenleiterdurchmesser $2R_i = 1{,}7$ mm.

4.3.4. Wellenwiderstand einer Bandleitung

Eine Leitung besteht aus zwei parallelen Bändern (vgl. Bild 4.23). Ihre Breite beträgt $b = 5$ cm, ihr Abstand voneinander $a = 1$ mm. Das Zwischenmedium hat die relative Dielektrizitätskonstante $\varepsilon_r = 2{,}5$. Berechnen Sie den Induktivitätsbelag und den Wellenwiderstand der Leitung.

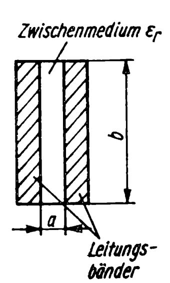


Bild 4.23. Schnitt durch eine Bandleitung

Lösung

Die Stromdichte ist gleich I/b. Wegen rot $\mathfrak{H} = \mathfrak{J}$ folgt damit als magnetische Feldstärke

$$H = \frac{I}{b}. \tag{1}$$

Für die magnetische Energie in einem Leiterstück der Länge l ergibt sich daraus

$$W_m = \frac{1}{2} \mu H^2 V = \frac{1}{2} \mu_r \mu_0 \frac{I^2}{b^2} abl. \tag{2}$$

Sie ist andererseits gleich

$$W_m = \frac{1}{2} L' I^2 l, \tag{3}$$

Aus dem Vergleich von (2) und (3) ergibt sich

$$L' = \mu_r \mu_0 \frac{a}{b}. \tag{4}$$

Zwischen Induktivitäts- und Kapazitätsbelag besteht nach (4.3./14) der Zusammenhang

$$\sqrt{L'C'} = \sqrt{\varepsilon\mu}. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt für den Wellenwiderstand der Bandleitung

$$Z = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{a}{b}. \tag{6}$$

Setzt man hierin $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = n^2 \varepsilon_0$, so ergibt sich

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{n} \frac{a}{b}. \tag{7}$$

Mit den vorliegenden Zahlen erhalten wir

$$L' = 1{,}256 \cdot 10^{-6} \frac{10^{-3}}{5 \cdot 10^{-2}} \text{ H m}^{-1} = 2{,}51 \cdot 10^{-8} \text{ H m}^{-1},$$

$$Z = 120\pi \frac{1}{\sqrt{2{,}5}} \frac{10^{-3}}{5 \cdot 10^{-2}} \Omega = 4{,}77\,\Omega.$$

4.3.5. Induktivität zweier Zylinderschalen

Ein zylindrisches Rohr mit kreisförmigem Querschnitt hat die Wandstärke $b = 2$ mm. Der Innendurchmesser beträgt $2R = 20$ mm. Durch zwei symmetrisch zueinander angeordnete Schlitze mit dem Öffnungswinkel $2\varphi_0 = 2°$ (vgl. 2.2.5. und Bild 2.15) wird der Zylinder in zwei Schalen geteilt. Berechnen Sie den Induktivitätsbelag der Schalen. Wie groß ist der Wellenwiderstand der entstandenen Leitung?

Lösung

Nach (2.2.5./27) ergibt sich bei verschwindender Wandstärke für die Kapazität, bezogen auf 1 m Leitungslänge,

$$C' = \varepsilon_0 \frac{K\left(\sqrt{\dfrac{a_3}{a_3+1}}\right)}{K\left(\sqrt{\dfrac{1}{a_3+1}}\right)} \tag{1}$$

mit

$$a_3 = \left(\frac{2}{\varphi_0}\right)^4 \tag{2}$$

gemäß (2.2.5./15). Kann die Wandstärke nicht vernachlässigt werden, so läßt sich die von ihr verursachte Kapazität genähert nach (2.2.1./12) mit $l = 1$ m berechnen:

$$2C_1' = 2 \frac{\varepsilon_0 \ln\left(1 + b\dfrac{2\varphi}{d}\right)}{2\varphi_0}. \tag{3}$$

Entsprechend den zwei Schlitzen ist die Teilkapazität der Bewandung doppelt zu zählen.
Im vorliegenden Fall ist

$$d = R \sin 2\varphi_0 = 2R\varphi_0,$$

so daß wir anstelle von (3)

$$C_1' = \frac{\varepsilon_0 \ln\left(1 + \dfrac{b}{R}\right)}{2\varphi_0} \tag{4}$$

schreiben können. Mit den vorgegebenen Zahlen folgt

$$C_1' = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \ln(1 + 0{,}2) \cdot 180}{2\pi} \text{ F m}^{-1} = 46{,}3 \text{ pF m}^{-1}.$$

Nach (2.2.5.) ist der Kapazitätsbelag bei vernachlässigbarer Wandstärke $C' = 61{,}2\,\mathrm{pF\,m^{-1}}$. Für den gesamten Kapazitätsbelag erhält man damit

$$C_g' = C' + 2C_1' = (61{,}2 + 2 \cdot 46{,}3)\,\mathrm{pF\,m^{-1}} = 153{,}8\,\mathrm{pF\,m^{-1}}.$$

Der Induktivitätsbelag folgt auf Grund der Beziehung (4.3./14):

$$L_g' = \frac{\varepsilon\mu_g}{C_g'\,g}. \tag{5}$$

Mit dem errechneten Wert erhalten wir

$$L_g' = \frac{1}{(3 \cdot 10^8)^2 \cdot 153{,}8 \cdot 10^{-12}}\,\mathrm{H\,m^{-1}} = 7{,}23 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{H\,m^{-1}}.$$

Für den Wellenwiderstand ergibt sich

$$Z' = \sqrt{\frac{L_g'}{C_g'}} = \sqrt{\frac{7{,}23 \cdot 10^{-8}}{153{,}8 \cdot 10^{-12}}}\,\Omega = 22\,\Omega.$$

4.3.6. Selbst- und Gegeninduktion einer Zweidrahtleitung

Eine Leitung besteht aus zwei parallelen Drähten. Die Länge l der gesamten Leitung ist groß gegen den Abstand a der beiden parallelen Drähte. Dieser ist groß gegen den Querschnittsradius r_0 des einzelnen Drahtes.
Berechnen Sie den Induktionskoeffizienten der Leitung für $l = 3{,}8\,\mathrm{km}$, $a = 40\,\mathrm{cm}$, $r_0 = 1{,}5\,\mathrm{mm}$. Wie groß ist der Induktivitätsbelag der Leitung?

Lösung

Nach (4.1./18) ist die gesamte magnetische Energie durch

$$W_m = \frac{1}{2}\,(L_{11}I_1^2 + 2L_{12}I_1I_2 + L_{22}I_2^2) \tag{1}$$

gegeben. Hierin setzen wir

$$I_1 = I, \qquad I_2 = -I \tag{2}$$

ein. Außerdem gilt $L_{11} = L_{22}$. Wir definieren

$$L_S = 2(L_{11} - L_{12}). \tag{3}$$

Damit folgt aus (1)

$$W_m = \frac{1}{2}\,L_S I^2, \tag{4}$$

d. h., L_S bezeichnet den Induktionskoeffizienten des gesamten Leitungssystems aus Hin- und Rückleitung.
Um den Koeffizienten L_{12} der Gegeninduktion zu berechnen, wenden wir (4.1./21) an:

$$L_{12} = \frac{\mu}{4\pi} \int\!\!\int \mathfrak{i}_1 \cdot \mathfrak{i}_2\,\frac{\mathrm{d}V_1\,\mathrm{d}V_2}{r_{12}}. \tag{5}$$

Darin kann

$$\mathrm{d}V_1 = \mathfrak{A}_1 \cdot \mathrm{d}\mathfrak{s}_1 = A_1\,\mathrm{d}s_1, \qquad \mathrm{d}V_2 = \mathfrak{A}_2 \cdot \mathrm{d}\mathfrak{s}_2 = A_2\,\mathrm{d}s_2 \tag{6}$$

gesetzt werden, wobei A den Leiterquerschnitt, $\mathrm{d}\mathfrak{s}$ das Element eines Leiterstücks bedeutet. Die Stromliniendichtevektoren hängen mit der Stromdichte gemäß

$$\mathfrak{i} = \frac{\mathfrak{J}}{I} \tag{7}$$

zusammen, wobei die Stromstärke I durch

$$\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{A} = I \tag{8}$$

gegeben ist. Im Falle der parallelen Zweidrahtleitung ist

$$\mathfrak{i}_1 = \frac{\mathfrak{J}_1}{\mathfrak{J}_1 \cdot \mathfrak{A}_1} = \frac{\mathfrak{J}_1}{|\mathfrak{J}_1|\,A_1}, \qquad \mathfrak{i}_2 = -\frac{\mathfrak{J}_2}{\mathfrak{J}_2 \cdot \mathfrak{A}_2} = -\frac{\mathfrak{J}_2}{|\mathfrak{J}_2|\,A_2}. \tag{9}$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{i}_1 \cdot \mathfrak{i}_2\,\frac{\mathrm{d}V_1\,\mathrm{d}V_2}{r_{12}} = -\frac{\mathfrak{J}_1 \cdot \mathfrak{J}_2 A_1\,\mathrm{d}s_1 A_2\,\mathrm{d}s_2}{|\mathfrak{J}_1|\,|\mathfrak{J}_2|\,A_1 A_2 r_{12}} = -\frac{\cos(\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2)\,\mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2}{r_{12}}, \tag{10}$$

wobei $(\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2)$ den Winkel zwischen beiden Stromrichtungen angibt. Bei der parallelen Zweidrahtleitung ist $\cos(\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2) = -1$. Damit folgt aus (5) und (10)

$$L_{12} = \frac{\mu}{4\pi}\int\int \frac{\mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2}{r_{12}}. \tag{11}$$

Wir wählen die Richtung der Stromdichtevektoren $\mathfrak{i}$ als z-Achse und erhalten damit (vgl. Bild 4.24)

$$L_{12} = \frac{\mu}{4\pi}\int_0^l\int_0^l \frac{\mathrm{d}z_2}{\sqrt{a^2 + (z_2 - z_1)^2}}\,\mathrm{d}z_1. \tag{12}$$

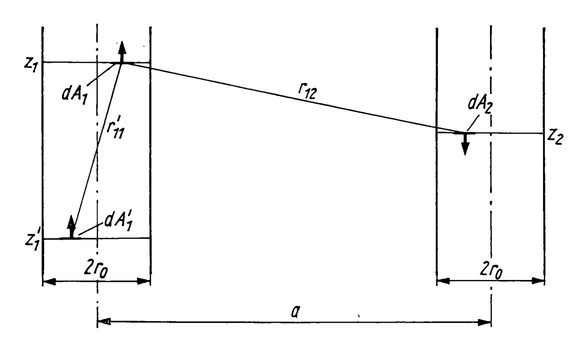


Bild 4.24. Zweidrahtleitung

Es folgt

$$L_{12} = \frac{\mu}{4\pi}\left(2l \ln \frac{l + \sqrt{a^2 + l^2}}{a} - 2\sqrt{a^2 + l^2} + 2a\right). \tag{13}$$

Unter der Voraussetzung $l \gg a$ ergibt sich

$$L_{12} = \frac{\mu}{2\pi}\, l \left(\ln \frac{2l}{a} - 1\right). \tag{14}$$

Der Gegeninduktionskoeffizient ist der Leiterlänge nicht proportional. Man kann keinen auf die Längeneinheit bezogenen Koeffizienten der Gegeninduktion definieren.
Der Selbstinduktionskoeffizient für eine Leitung ist nach (4.1./19)

$$L_{11} = \frac{\mu}{4\pi} \int\int \frac{\mathfrak{i}_1 \cdot \mathfrak{i}_1' \, \mathrm{d}V_1 \, \mathrm{d}V_1'}{r_{11}}. \tag{15}$$

Bei konstantem Querschnitt A und konstanter Stromdichte $\mathfrak{J}$ folgt

$$L_{11} = \frac{\mu}{4\pi A^2} \iint\limits_{A_1'} \iint\limits_{A_1} \int\limits_0^l \int\limits_0^l \frac{\mathrm{d}z_1 \, \mathrm{d}z_1' \, \mathrm{d}A_1 \, \mathrm{d}A_1'}{\sqrt{r^2 + (z_1' - z_1)^2}}. \tag{16}$$

Dabei ist zu berücksichtigen, daß auch Stromelemente, die sich auf der gleichen Querschnittebene befinden, miteinander wechselwirken. Es ergibt sich durch Auswerten der inneren Integrale über $\mathrm{d}z_1$ und dz_1'

$$L_{11} = \frac{\mu l}{2\pi A^2} \iint\limits_{A_1'} \iint\limits_{A_1} \left(\ln \frac{2l}{r} - 1\right) \mathrm{d}A_1 \, \mathrm{d}A_1'. \tag{17}$$

Für kreisförmigen Leiterquerschnitt können wir

$$\mathrm{d}A_1 = 2\pi r_1 \, \mathrm{d}r_1, \qquad \mathrm{d}A_1' = 2\pi r_1' \, \mathrm{d}r_1' \tag{18}$$

schreiben. Ferner gilt in (16)

$$r = \sqrt{(r_1 \cos \varphi_1 - r_1' \cos \varphi_1')^2 + (r_1 \sin \varphi_1 - r_1' \sin \varphi_1')^2}. \tag{18a}$$

Damit erhalten wir schließlich

$$L_{11} = \frac{\mu l}{2\pi}\left(\ln \frac{2l}{r_0} - \frac{3}{4}\right). \tag{19}$$

Wir können nunmehr die Induktivität des Stromkreises berechnen. Dazu setzen wir (14) und (19) in (3) ein und erhalten

$$L_S = \frac{\mu l}{\pi}\left(\ln \frac{a}{r_0} + \frac{1}{4}\right). \tag{20}$$

Diese Größe kann im Gegensatz zur Gegen- und zur Selbstinduktion auf die Längeneinheit bezogen werden:

$$L_S' = \frac{L_S}{l} = \frac{dL_S}{dl} = \frac{\mu}{\pi}\left(\ln\frac{a}{r_0} + \frac{1}{4}\right). \tag{21}$$

Mit den vorgegebenen Zahlen folgt

$$L_S' = \frac{1{,}256 \cdot 10^{-6}}{\pi}\left(\ln\frac{40}{0{,}5} + \frac{1}{4}\right) \text{H m}^{-1} = 1{,}85 \cdot 10^{-6}\,\text{Vs A}^{-1}\,\text{m}^{-1}.$$

Für die Länge $l = 3800$ m erhalten wir

$$L_S = L_S' \cdot 3{,}8 \cdot 10^3\,\text{m} = 7{,}03 \cdot 10^{-3}\,\text{H}.$$



Aufgaben

A 4.3.1. Berechnen Sie den induktiven Widerstand einer Spule mit kreisförmigem Querschnitt. Der Querschnittradius ist gleich $R_0 = 0{,}5$ cm, die Spulenlänge $l = 20$ cm. Auf der Spule befinden sich $n = 10000$ Windungen. Das Zwischenmedium ist Luft. Die Frequenz des Wechselstromes beträgt $f = 50$ Hz.

A 4.3.2. Wie groß muß die Windungszahl einer Kreiszylinderspule mit dem Querschnitt 1 cm² und der Länge 10 cm sein, wenn diese die Induktivität a) 1 mH, b) 1 μH haben soll?

A 4.3.3. Eine Spule aus $n = 15000$ Windungen mit dem Querschnittradius $R_0 = 1$ cm wird mit einem Schichtkondensator der Kapazität $C = 10$ μF in Reihe geschaltet. Die Wicklungen der Spule bestehen aus Aluminiumdraht ($\gamma = 4{,}2 \cdot 10^7\,\Omega^{-1}\,\text{m}^{-1}$) mit dem Querschnitt $r_0^2\pi = 0{,}5$ mm². Für die Spulenlänge ist $l = 20$ cm zu setzen. Berechnen Sie die Induktivität der Spule. Wie groß ist der Blindwiderstand, wenn die Frequenz $f = 50$ Hz beträgt? Welchen Scheinwiderstand und welche Impedanz erhält man? Bestimmen Sie den Winkel der Phasenverschiebung.

A 4.3.4. Ein Schwingkreis besteht aus einem Kondensator der Kapazität 10 pF und einer Spule mit $n = 300$ Windungen. Der Radius des Spulenquerschnittes beträgt $R_0 = 5$ mm, die Spulenlänge $l = 10$ cm. Die Wicklungen enthalten Kupferdraht mit dem Querschnitt $\Delta A = 0{,}5$ mm². Berechnen Sie die Induktivität und den ohmschen Widerstand. Wie groß sind die Resonanzfrequenz und die Abklingzeit? ($\gamma = 5{,}9 \cdot 10^7\,\Omega^{-1}\,\text{m}^{-1}$)

A 4.3.5. Eine Spule aus 8000 Windungen ist um eine zweite Spule gewickelt, die 1500 Windungen enthält. Der Durchmesser des Spulenquerschnitts beträgt für beide Spulen $2R_0 = 1$ cm, die Länge $l = 15$ cm. Wie groß ist die Gegeninduktivität? Das Zwischenmedium ist Luft.

A 4.3.6. In einem Koaxialkabel beträgt der Innendurchmesser des Außenleiters $2R_a = 40$ mm, der Durchmesser des Innenleiters $2R_i = 8$ mm. Das Zwischenmedium ist Luft. Berechnen Sie den Wellenwiderstand.

A 4.3.7. Eine Koaxialleitung besitzt einen Außenleiter mit dem Innendurchmesser $2R_a = 4$ cm. Das Zwischenmedium hat die Dielektrizitätszahl $\varepsilon_r = 2{,}5$. Wie groß muß der Durchmesser des Innenleiters sein, wenn der Wellenwiderstand den standardisierten Wert von 70 Ω annehmen soll?

A 4.3.8. Wie groß sind L', C', Z für eine Bandleitung mit den Abmessungen $b = 10$ cm, $a = 2$ mm? Ferner ist $\varepsilon_r = 2{,}7$, $\mu_r = 1$.

A 4.3.9. In einer Bandleitung mit der Breite $b = 5$ cm soll sich der Wellenwiderstand exponentiell über die Länge $l = 50$ cm von $Z = 10\,\Omega$ auf $Z = 40\,\Omega$ verändern. Das Zwischenmedium ist Luft. Wie ist der Abstand der Bänder zu verändern? Die Krümmung der Feldlinien und die Randstörungen sind zu vernachlässigen.

A 4.3.10. Ein zylindrisches Rohr mit der Wandstärke $b = 4$ mm und dem Innendurchmesser $2R = 20$ mm wird durch zwei symmetrische Schlitze mit dem Öffnungswinkel $2\varphi_0 = 2°$ in zwei Halbschalen zerlegt. Berechnen Sie den Induktivitätsbelag und den Wellenwiderstand dieser Leitung.

A 4.3.11. In einer Zweidrahtleitung beträgt der Drahtabstand $a = 50$ cm. Der Durchmesser jedes Drahtes ist gleich $2r_0 = 2$ mm. Berechnen Sie den Induktivitätsbelag.

A 4.3.12. Wie groß ist in der vorangegangenen Aufgabe die Selbstinduktivität, wenn die Leitungslänge 1 km beträgt? Welcher Wert ergibt sich für $l = 2$ km?

A 4.3.13. Leiten Sie aus der Formel für die Induktivität der Zweidrahtleitung die Induktivität und die Kapazität einer Horizontalantenne ab. Wie groß ist L für eine Horizontalantenne der Länge $l = 2{,}50$ m, die sich in der Höhe $h = 20$ m über der leitenden Erde befindet und den Drahtdurchmesser $2r_0 = 1$ mm aufweist?

A 4.3.14. Über dem Erdboden in der Höhe $h = 5$ m ist eine Leitung mit dem Drahtdurchmesser $2r_0 = 5$ mm ausgespannt. Die Rückleitung erfolgt durch die Erde. Wie groß ist der Wellenwiderstand?

4.4. Elektrische Leitungen

E

Einführung

Ein Widerstand, der an eine Leitung angeschlossen ist, wird durch diese transformiert (vgl. Bild 4.25a). Hierdurch lassen sich für die Mikrowellentechnik Blindwiderstände herstellen, die mit Spulen und Kondensatoren nicht zu realisieren sind.
Elektrische Leitungen haben im allgemeinen eine große Länge. Sie kann gegen die Wellenlänge nicht vernachlässigt werden. Es ist daher erforderlich, die unterschiedlichen Schwingungszustände auf den einzelnen Punkten der Leitung zu berücksichtigen.
Die Fernleitung elektromagnetischer Wellen läßt sich nach der Theorie quasistationärer Vorgänge behandeln, wenn der Abstand zwischen Hin- und Rückleitung klein gegen die Leiterlänge ist. In diesem Falle kann man die homogene, d. h. räumlich unveränderliche Leitung in differentielle Abschnitte unterteilen und das elektromagnetische Feld unabhängig von Randstörungen untersuchen.
Bild 4.25 zeigt das **Ersatzschaltbild eines Leitungsdifferentials.** Auf ihm sind die Kapazität $C'\,\mathrm{d}z$ zwischen den beiden Leiterteilen und die Selbstinduktion $L'\,\mathrm{d}z$ gleichmäßig verteilt. Sind R_1' und R_2' die ohmschen Widerstände der beiden einzelnen Leiter je Meter Leitungslänge, so beträgt der ohmsche Widerstand des Leitungsdifferentials $R'\,\mathrm{d}z = (R_1' + R_2')\,\mathrm{d}z$.

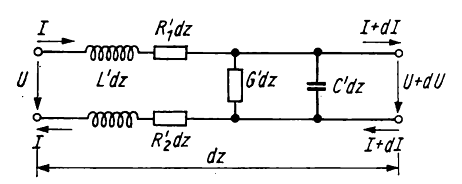


Bild 4.25. Leitungsdifferential

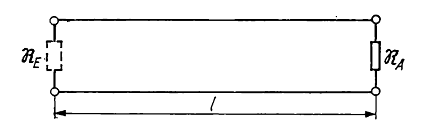


Bild 4.25 a.) Transformation des Abschlußwiderstandes $\mathfrak{R}_A$ durch eine Leitung der Länge l

Außer dem Spannungsabfall infolge des Widerstandes tritt im Stromkreis eine Stromverzweigung auf. Sie entsteht dadurch, daß das Füllmaterial zwischen den beiden Leitern stets etwas leitend ist. Es erfolgt daher ein geringer Stromübergang von einem Leiter zum anderen. Der elektrische Leitwert quer zur eigentlichen Leitung, bezogen auf die Längeneinheit, wird als Ableitung G' definiert. G' hat die Einheit Ω^{-1} m^{-1}. Bezeichnet U die Spannung zwischen den beiden Leitern, so ist der über das Differential dz abgeleitete Strom gleich UG' dz.
Bei der Berechnung des Wechselstromwiderstandes hat man den **Skineffekt** zu berücksichtigen. Seine theoretische Ableitung erfolgt unter 5.3.1. im folgenden Hauptabschnitt. Der Strom fließt mit nachweisbarer Intensität bei Wechselfeldern nur in einer dünnen Schicht am äußeren Umfang des Leiters; das Leiterinnere ist nahezu stromfrei. Die Dicke der von einem merklichen Strom durchflossenen Schicht ist um so kleiner, je größere Werte die Frequenz annimmt. Bei nicht zu stark gekrümmten Leiteroberflächen kann man den Wechselstromwiderstand so berechnen, als wäre der gesamte Strom gleichmäßig auf die Außenschicht der Dicke

$$\boxed{d = \sqrt{\frac{2}{\mu \gamma \omega}}} \tag{1}$$

verteilt. d wird als **Eindringtiefe** bezeichnet.

Beispiel 19

Aluminium hat den spezifischen Widerstand

$$\frac{1}{\gamma} = 2{,}7 \cdot 10^{-8}\,\Omega\,\text{m}.$$

Für die Permeabilität kann man $\mu = \mu_0$ setzen. Daraus erhält man bei der Frequenz $f = 10^9$ Hz als Eindringtiefe

$$d = \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}7 \cdot 10^{-8}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2\pi \cdot 10^9}}\ \mathrm{m} = 0{,}0026\ \mathrm{mm}.$$

Beispiel 20

Eine Bandleitung bestehe aus zwei Leitungsbändern der Breite $b = 1$ cm. Der Abstand beider Bänder betrage $a = 0{,}1$ mm. Das leitende Material sei Aluminium mit dem spezifischen Widerstand $1/\gamma = 2{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega\mathrm{m}$. Als Zwischenmedium wird Polystyrol ($\varepsilon_r = 2{,}55$, $\gamma < 10^{-13}\Omega^{-1}\,\mathrm{m}^{-1}$) verwendet. Zu berechnen sind R', G', L', C'.
Die Dicke des Bandes ist groß gegen die Eindringtiefe. Daher folgt

$$R_1' = R_2' = \frac{1}{\gamma\,\Delta A} = \frac{1}{\gamma\,bd} = \frac{1 \cdot 2{,}7 \cdot 10^{-8}}{10^{-2} \cdot 2{,}6 \cdot 10^{-6}}\,\Omega\,\mathrm{m}^{-1} = 1{,}05\,\Omega\,\mathrm{m}^{-1}$$

und für den Widerstandsbelag der Leitung

$$R' = R_1' + R_2' = 2{,}1\,\Omega\,\mathrm{m}^{-1}.$$

Die Berechnung des Ableitungsbelages erfordert, den Kehrwert des Widerstandes einer Leitung der Länge $a = 0{,}1$ mm mit dem Querschnitt 1 m mal 1 cm und dem spezifischen Leitwert $\gamma < 10^{-13}\Omega^{-1}\,\mathrm{m}^{-1}$ zu berechnen. Man erhält

$$G' < \frac{10^{-13} \cdot 10^{-2}}{10^{-4}}\,\Omega^{-1}\,\mathrm{m}^{-1} = 10^{-11}\Omega^{-1}\,\mathrm{m}^{-1}.$$

Für den Kapazitätsbelag ergibt sich

$$C' = \varepsilon\,\frac{\Delta A}{a} = \frac{2{,}55 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 10^{-2}}{10^{-4}}\,\mathrm{F\,m^{-1}} = 2{,}3 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{F\,m^{-1}}.$$

Der Induktivitätsbelag wird gleich

$$L' = \frac{\mu a}{\Delta A} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-4}}{10^{-2}}\,\mathrm{H\,m^{-1}} = 1{,}3 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{H\,m^{-1}}.$$

Wie aus den errechneten Werten zu entnehmen ist, bestehen die Ungleichungen

$$G' \ll \omega C', \qquad R' \ll \omega C'.$$

Die Größen $L'\,\mathrm{d}z$ und $R'\,\mathrm{d}z$ bewirken längs des Leiterstückes dz eine **Spannungsänderung** von $U(z)$ auf $U(z) + \mathrm{d}U(z)$. Nach dem ersten Kirchhoffschen Stromverzweigungsgesetz (3.3./5) ergibt sich, wenn man in Bild 4.25 im Uhrzeigersinn umläuft,

$$-U + L'\,\mathrm{d}z\,\mathrm{i}\omega I + R_1'\,\mathrm{d}z\,I + U + \mathrm{d}U + R_2'\,\mathrm{d}z\,I = 0.$$

Hieraus folgt die Differentialgleichung

$$\boxed{-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z} = (\mathrm{i}\omega L' + R')\,I}. \tag{2a}$$

Für die **Stromänderung** erhält man nach dem zweiten KIRCHHOFFschen Stromverzweigungsgesetz (3.3./9) (vgl. Bild 4.25)

$$-I + G'\,\mathrm{d}z\,U + C'\,\mathrm{d}z\,\mathrm{i}\omega U + I + \mathrm{d}I = 0.$$

Daraus ergibt sich

$$\boxed{-\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z} = (\mathrm{i}\omega C' + G')\,U}\,. \tag{2b}$$

Zur Lösung des aus (2a) und (2b) bestehenden Gleichungssystems wird die zweite Gleichung differenziert. Aus dem Vergleich der beiden für $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z}$ sich ergebenden Ausdrücke folgt die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}z^2} - (\mathrm{i}\omega L' + R')(\mathrm{i}\omega C' + G')\,I = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}z^2} - \gamma^2 I = 0. \tag{3}$$

Die Größe

$$\boxed{\gamma = \mathrm{i}\,\alpha + \beta = \sqrt{(\mathrm{i}\omega L' + R')\,(\mathrm{i}\omega C' + G')}} \tag{4}$$

wird als **Fortpflanzungskonstante** bezeichnet.
Für die Spannung U erhält man aus (2a) und (2b) dieselbe Differentialgleichung wie für I:

$$\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}z^2} - \gamma^2 U = 0. \tag{5}$$

(3) und (5) lassen sich unabhängig voneinander durch Exponentialansatz lösen. Wird die Zeitabhängigkeit in der Form $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ geschrieben, so lauten die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen

$$U(z,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,U(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}(U_1\,\mathrm{e}^{\gamma z} + U_2\,\mathrm{e}^{-\gamma z}), \tag{6}$$

$$I(z,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,I(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,(I_1\,\mathrm{e}^{\gamma z} + I_2\,\mathrm{e}^{-\gamma z}). \tag{7}$$

Strom und Spannung setzen sich aus der Überlagerung zweier Wellen zusammen.

Die konstanten Koeffizienten U_1, U_2, I_1, I_2 in (6) und (7) sind nicht unabhängig voneinander. Nach (2a) und (2b) bestehen zwischen ihnen die beiden Beziehungen

$$U_1 = -\mathfrak{Z} I_1, \qquad U_2 = \mathfrak{Z} I_2. \tag{8}$$

Darin wird

$$\boxed{\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{\mathrm{i}\omega L' + R'}{\mathrm{i}\omega C' + G'}}} \tag{9}$$

als **Wellenwiderstand** der Leitung bezeichnet.
Mit (8) sind zwei Gleichungen zur Bestimmung der vier Konstanten in (6) und (7) vorhanden. Zwei weitere Gleichungen ergeben sich durch die Bedingungen am Anfang und am Ende der Leitung. Am Leitungseingang, für $z = 0$, ist die Spannung nach (6) durch

$$U(0, t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}(U_1 + U_2) = U_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{10a}$$

vorgegeben. Es besteht also zwischen U_1 und U_2 der Zusammenhang

$$U_1 + U_2 = U_0. \tag{10}$$

Die Verhältnisse am Ende $z = l$ der Leitung sind durch den Abschlußwiderstand

$$\mathfrak{R}_\mathrm{A} = \frac{U(l)}{I(l)} \tag{11a}$$

bestimmt. Hieraus erhält man unter Verwendung der Gleichungen (6) bis (8)

$$\frac{\mathfrak{R}_\mathrm{A}}{\mathfrak{Z}} = \frac{U_1\,\mathrm{e}^{\gamma l} + U_2\,\mathrm{e}^{-\gamma l}}{-U_1\,\mathrm{e}^{\gamma l} + U_2\,\mathrm{e}^{-\gamma l}}. \tag{11}$$

Der Zeitfaktor $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ hebt sich aus den Randbedingungen heraus. Er ist auf die unbekannten Koeffizienten ohne Einfluß. Als Lösung des Gleichungssystems (10) und (11) erhält man

$$U_1 = \frac{U_0(\mathfrak{R}_\mathrm{A} - \mathfrak{Z})\,\mathrm{e}^{-\gamma l}}{2(\mathfrak{Z}\sinh\gamma l + \mathfrak{R}_\mathrm{A}\cosh\gamma l}, \quad U_2 = \frac{U_0(\mathfrak{R}_\mathrm{A} + \mathfrak{Z})\,\mathrm{e}^{\gamma l}}{2(\mathfrak{Z}\sinh\gamma l + \mathfrak{R}_\mathrm{A}\cosh\gamma l)}. \tag{12}$$

Die **Eingangsimpedanz bzw. der Eingangswiderstand** ist durch das konstante Verhältnis

$$\mathfrak{R}_\mathrm{E} = \frac{U(0)}{I(0)} \tag{13}$$

zwischen Spannung und Strom am Eingang $z = 0$ der Leitung definiert. Man bezieht den Eingangswiderstand auf den Wellenwiderstand $\mathfrak{Z}$ und bezeichnet $\mathfrak{R}_\mathrm{E}/\mathfrak{Z}$ als **normierten Eingangswiderstand.** Hierfür erhält man aus (10) in Verbindung mit (12) sowie auf Grund von (8)

$$\boxed{\frac{\mathfrak{R}_\mathrm{E}}{\mathfrak{Z}} = \frac{\dfrac{\mathfrak{R}_\mathrm{A}}{\mathfrak{Z}} + \tanh\gamma l}{1 + \dfrac{\mathfrak{R}_\mathrm{A}}{\mathfrak{Z}}\tanh\gamma l}}. \tag{14}$$

Durch die homogene Leitung der Länge l mit dem Wellenwiderstand $\mathfrak{Z}$ und der Fortpflanzungskonstanten γ wird der Widerstand $\mathfrak{R}_A$ gemäß (14) in den Widerstand $\mathfrak{R}_E$ transformiert. Nur wenn der Abschlußwiderstand $\mathfrak{R}_A$ genau gleich dem Wellenwiderstand $\mathfrak{Z}$ ist, findet keine Widerstandstransformation statt, und der Eingangswiderstand ist für alle Längen l des Leiters gleich

$$\mathfrak{R}_E = \mathfrak{R}_A = \mathfrak{Z}.$$

Dieser Fall wird als **Anpassung (Widerstandsanpassung)** bezeichnet (vgl. 4.2.).
Zur Diskussion der Transformationsformel (14) schreibt man

$$\mathfrak{R}_A = \mathfrak{Z} \tanh c. \tag{15}$$

Darin ist c eine komplexe Größe:

$$c = b + \mathrm{i}a. \tag{16}$$

Setzt man (15) in (14) ein, so folgt nach dem Additionstheorem der hyperbolischen Tangensfunktion

$$\frac{\mathfrak{R}_E}{\mathfrak{Z}} = \frac{\tanh c + \tanh \gamma l}{1 + \tanh c \tanh \gamma l} = \tanh (c + \gamma l). \tag{17}$$

Die Funktion $\tanh z = \tanh (x + \mathrm{i}\, y)$ wird durch das Tangensrelief dargestellt. Hierauf beruhen Verfahren zur graphischen Berechnung der Transformationseigenschaften verlustbehafteter Leitungen.
Im allgemeinen sind die Verluste durch den ohmschen Widerstand und durch die Ableitung klein. In den folgenden Ausführungen werden daher nur noch **verlustfreie Leiter** behandelt.
Können die Verlustgrößen R' und G' gegen $\omega L'$ und $\omega C'$ vernachlässigt werden, so wird nach (9) der Wellenwiderstand reell:

$$\boxed{Z = \sqrt{\frac{L'}{C'}}}, \tag{18}$$

dagegen nach (4) die Fortpflanzungskonstante rein imaginär:

$$\boxed{\gamma = \mathrm{i}\alpha = \mathrm{i}\omega \sqrt{L'C'}}. \tag{19}$$

In Tabelle 6 sind die Formeln für die Wellenwiderstände Z der wichtigsten Leitungen zusammengestellt (vgl. 4.3.).
Beachtet man die Beziehung

$$\tanh \mathrm{i}\, \alpha l = \mathrm{i} \tan \alpha l, \tag{20}$$

so erhält man aus (14) für den normierten **Eingangswiderstand**

$$\boxed{\frac{\Re_E}{Z} = \frac{\dfrac{\Re_A}{Z} + \mathrm{i}\tan\alpha l}{1 + \mathrm{i}\dfrac{\Re_A}{Z}\tan\alpha l}}\,. \tag{21}$$

Diese Funktion läßt sich graphisch durch ein Kreisdiagramm darstellen (vgl. 4.4.1.).
Für die Spannung und für den Strom folgt aus (6) und (7) im Falle $\beta = 0$

$$\left.\begin{aligned} U(z,t) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\, U(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,(U_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z} + U_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha z}),\\ I(z,t) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\, I(z) \;= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,(I_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z} + I_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha z}). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Ausdrücke der Form

$$u = u_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(z,t)} = u_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)} \tag{23}$$

stellen **fortschreitende ebene Wellen** dar. Darin bezeichnet u_0 die Amplitude,

$$\varphi = \varphi(z,t) = \omega t - kz \tag{23a}$$

die Phase, k die Wellenzahl. k wird häufig für α gesetzt.
Die Amplitude kann gemäß

$$u_0 = |u_0|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0} \tag{23b}$$

charakterisiert werden. Wie daraus zu erkennen ist, kennzeichnet eine komplexe Amplitude eine Phasenverschiebung φ_0. Eine reelle negative Amplitude bedeutet

$$\varphi_0 = -\pi.$$

Die Geschwindigkeit, mit der die Phase einer Welle im Raum fortschreitet, heißt **Phasengeschwindigkeit.** Um diese Größe zu berechnen, betrachtet man das Fortschreiten eines konstanten Phasenwertes. Nach (23a) ergibt sich für $\varphi = \mathrm{const}$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)_{\varphi=\mathrm{const}} = \omega - k\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)_{\varphi=\mathrm{const}} = 0.$$

Daraus folgt für die Komponente der Phasengeschwindigkeit in Richtung der z-Achse

$$\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)_{\varphi=\mathrm{const}} = \frac{\omega}{k}. \tag{23c}$$

Elektromagnetische Wellen der Form $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)}$ breiten sich hiernach mit der Phasengeschwindigkeit

$$c = \frac{\omega}{k} \tag{23d}$$

in Richtung der z-Achse aus, während Wellen der Form $e^{i(\omega t+kz)}$ in Richtung der negativen z-Achse fortschreiten. Strom und Spannung einer Leitung setzen sich somit nach (22) aus zwei gegenläufigen Wellen zusammen. Die Überlagerung der beiden in entgegengesetzten Richtungen fortschreitenden Wellen nach (22) ergibt eine stehende Welle (vgl. 4.4.1. bis 4.4.3., insbesondere 4.4.3./5).
Das Schwingungsbild einer fortschreitenden Welle muß sich auf einer verlustfreien Leitung mit der Periode einer Wellenlänge λ wiederholen. Das ist nach (22) nur der Fall für

$$\boxed{\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}}. \tag{24}$$

Die Wellenlänge ist dabei auf das Ausbreitungsmedium der elektromagnetischen Welle zu beziehen. Aus (23d) und (24) ergibt sich

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{f}, \tag{25}$$

wobei $f = \omega/2\pi$ die Frequenz bezeichnet. Die Phasengeschwindigkeit bei der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem unbegrenzten Medium mit der Brechzahl n ist gleich

$$c = \frac{c_0}{n} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{26}$$

Darin bedeutet c_0 die Lichtgeschwindigkeit in Vakuum. Anstelle von (25) kann man daher

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{25a}$$

schreiben. Wird (25a) in (24) eingesetzt, so folgt aus dem Vergleich mit (19)

$$\boxed{\sqrt{L'C'} = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{1}{c} = \sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{27}$$

(s. 4.3./14).

Tabelle 6. Wellenwiderstände bei verlustfreien Leitern

Leitertyp	Wellenwiderstand Z	Erläuterungen	
Vakuum	$\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\,\Omega = 377\,\Omega$		(28)

Fortsetzung Tabelle 6

Leitertyp	Wellenwiderstand Z	Erläuterungen	
Koaxialleitung	$\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_r}}\, 60 \ln \frac{R_a}{R_i}\,\Omega$	R_a Innenradius des Außen-, R_i Außenradius des Innenleiters	(29)
Bandleitung	$\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_r}}\, 377 \frac{a}{b}\,\Omega$	b Breite, a Abstand der Bänder	(30)
Zweidrahtleitung	$\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_r}}\, 120 \ln \frac{a}{r_0}\,\Omega$	a Abstand der Drahtachsen, r_0 Drahtradius	(31
Draht über leitender Ebene	$\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_r}}\, 60 \ln \frac{2h}{r_0}\,\Omega$	h Höhe über der leitenden Ebene	(32)

P **Probleme**

4.4.1. Anpassungs- und Phasenkreis

Eine Flachbandleitung mit dem Wellenwiderstand $Z = 240\ \Omega$ ist mit dem Widerstand $\mathfrak{R}_A = (192-\mathrm{i}\,144)\ \Omega$ abgeschlossen. Untersuchen Sie die Transformation dieses Widerstandes durch die Leitung. Wie wird der Abschlußwiderstand durch eine Leitung der Länge $l = 15$ cm transformiert ($\lambda = 1{,}50$ m)?

Lösung

Wir betrachten zunächst die Transformation eines rein reellen Widerstandes $X \leqq Z$ durch die Leitung. Hierzu setzen wir

$$\frac{X}{Z} = m \leqq 1. \tag{1}$$

Nach (4.4./21) ist der Eingangswiderstand durch

$$\frac{\mathfrak{R}_E}{Z} = \frac{m + \mathrm{i} \tan \alpha l}{1 + \mathrm{i} m \tan \alpha l} \tag{2}$$

gegeben. Den Zähler rechts können wir schreiben

$$m + \mathrm{i} \tan \alpha l = \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{m}\right)(1 + \mathrm{i} m \tan \alpha l) + \frac{1}{2}\left(m - \frac{1}{m}\right)(1 - \mathrm{i} m \tan \alpha l),$$

womit aus (2)

$$\frac{\mathfrak{R}_E}{Z} - \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{2}\left(m - \frac{1}{m}\right)\frac{1 - \mathrm{i} m \tan \alpha l}{1 + \mathrm{i} m \tan \alpha l} \tag{3}$$

folgt. Da m ein rein reeller Wert ist, hat der letzte Faktor rechts den Absolutbetrag eins. Der gesamte Ausdruck (3) ergibt daher für variable Werte l einen Kreis mit dem Radius

$$\left|\frac{\mathfrak{R}_E}{Z} - \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{m}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|m - \frac{1}{m}\right|. \tag{4}$$

Der normierte Eingangswiderstand $\mathfrak{R}_E/Z$ durchläuft demzufolge bei variablen Werten l einen Kreis. Sein Mittelpunkt hat in der komplexen Widerstandsebene die Koordinaten

$$\frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{m}\right), 0; \tag{5}$$

er liegt also auf der reellen Achse. Dieser Kreis wird als **Anpassungskreis** bezeichnet. Die Größe $m \leqq 1$ gibt den Grad der Anpassung an.
In gleicher Weise erhält man aus (2)

$$\frac{\mathfrak{R}_E}{Z} - \frac{i}{2}(\tan \alpha l - \cot \alpha l) = \frac{i}{2}(\tan \alpha l + \cot \alpha l)\frac{1 - im \tan \alpha l}{1 + im \tan \alpha l}. \tag{6}$$

Der normierte Eingangswiderstand durchläuft hiernach für konstante Phasen αl und variable Anpassungswerte m einen Kreis mit dem Radius

$$\left|\frac{\mathfrak{R}_E}{Z} - \frac{i}{2}(\tan \alpha l - \cot \alpha l)\right| = \frac{1}{2}\left|\tan \alpha l + \cot \alpha l\right|. \tag{7}$$

Der Mittelpunkt dieses Kreises hat die Koordinaten

$$0, \frac{1}{2}(\tan \alpha l - \cot \alpha l). \tag{8}$$

Er wird als **Phasenkreis** bezeichnet.
Man erhält hiernach unter der Voraussetzung (1) den gesuchten Eingangswiderstand als Schnittpunkt des durch (4) und (5) festgelegten Anpassungskreises m mit dem durch (7) und (8) bestimmten Phasenkreis αl.
Die Bestimmung des Eingangswiderstandes kann nach Bild 4.26 graphisch erfolgen. In dieser Darstellung sind die Anpassungskreise durch m, die Phasenkreise durch l/λ gekennzeichnet.
Wir betrachten nun den Fall, daß die Leitung mit einem beliebigen komplexen Widerstand abgeschlossen ist oder daß der Abschlußwiderstand reell ist, jedoch $\mathfrak{R}_A = R_A > Z$ gilt.
Nach dem graphischen Verfahren gemäß Bild 4.26 kann man den Abschlußwiderstand als Eingangswiderstand einer Leitung der Länge l' auffassen, die mit einem rein reellen Widerstand $X < Z$ abgeschlossen ist. Im vorliegenden Fall ist

$$\frac{\mathfrak{R}_A}{Z} = \frac{192 - i\,144}{240} = 0{,}8 - i\,0{,}6.$$

Aus Bild 4.26 entnimmt man, daß der Anpassungskreis durch $m = 0{,}5$, der Phasenkreis durch $l'/\lambda = 0{,}375$ festgelegt ist. Der Abschlußwiderstand $\mathfrak{R}_A = (192 - i\,144)\,\Omega$ wird hiernach durch den reellen Widerstand $X = 0{,}5Z = 120\,\Omega$ repräsentiert, der durch die Leitung der Länge

$$l' = 0{,}375\lambda = 0{,}375 \cdot 1{,}50\text{ m} = 56{,}25\text{ cm}$$

in den gegebenen Widerstand $\mathfrak{R}_A$ transformiert wird.

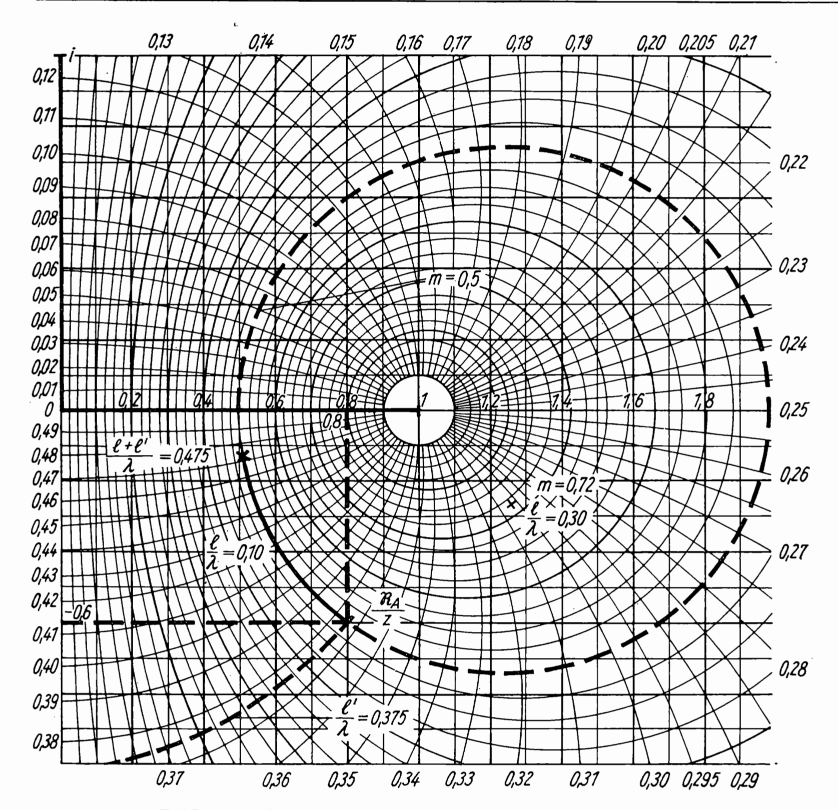


Bild 4.26. Anpassungs- und Phasenkreise in der Widerstandsebene

Für die Phase erhält man

$$\alpha l = \frac{2\pi l}{\lambda} = 2\pi \, \frac{0{,}15}{1{,}50} = 2\pi \cdot 0{,}10 .$$

Zusammen mit $\alpha l' = 2\pi \cdot 0{,}375$ ergibt das

$$\frac{2\pi}{\lambda}\,(l' + l) = 2\pi(0{,}375 + 0{,}100) = 2\pi \cdot 0{,}475 .$$

Als Schnittpunkt des Anpassungskreises $m = 0{,}5$ mit dem Phasenkreis $(l' + l)/\lambda = 0{,}475$ erhalten wir nach Bild 4.26

$$\frac{\Re_E}{Z} = 0{,}51 - \mathrm{i}\,0{,}12 ,$$

d. h.

$$\Re_E = (0{,}51 - \mathrm{i}\,0{,}12)\,240\,\Omega = (122 - \mathrm{i}\,29)\,\Omega .$$

4.4.2. Größter und kleinster Wert des Wirkwiderstandes

Der Widerstand $\mathfrak{R}_A = (150 - i\,30)\ \Omega$ soll durch eine verlustfreie Leitung mit dem Wellenwiderstand $Z = 120\,\Omega$ in einen rein reellen Widerstand transformiert werden. Für den Eingangswiderstand soll sich dabei ein Minimum ergeben. Welche Leitungslänge ist hierfür zu wählen, wenn die Wellenlänge $\lambda = 50$ cm beträgt. Wie ist die Abmessung zu wählen, wenn der Eingangswiderstand ein Maximum werden soll?

Lösung

Nach 4.4.1. kann jeder komplexe Widerstand durch eine Leitung der Länge l' dargestellt werden, die mit dem rein reellen Widerstand $X = mZ$ ($m \leqq 1$) abgeschlossen ist. Für den normierten Eingangswiderstand schreiben wir daher nach (4.4.1./3)

$$\frac{\mathfrak{R}_E}{Z} = \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{2}\left(m - \frac{1}{m}\right)\frac{1 - im \tan\alpha(l + l')}{1 + im \tan\alpha(l + l')}. \tag{1}$$

Rein reelle Werte des Eingangswiderstandes ergeben sich, wenn $\tan\alpha(l + l')$ entweder gleich Null wird oder über alle Grenzen wächst. Es muß also entweder

$$l + l' = n\frac{\lambda}{2} \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{2}$$

oder

$$l + l' = n\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{3}$$

erfüllt sein. Im ersten Fall erhält man

$$\frac{\mathfrak{R}_E}{Z} = \left|\frac{\mathfrak{R}_E}{Z}\right|_{\min} = m, \tag{4}$$

im zweiten Fall

$$\frac{\mathfrak{R}_E}{Z} = \left|\frac{\mathfrak{R}_E}{Z}\right|_{\max} = \frac{1}{m}. \tag{5}$$

Diese Beziehungen gehen anschaulich aus der graphischen Darstellung nach Bild 4.26 hervor. Zwischen dem größten und dem kleinsten Wert des Wirkwiderstandes besteht nach (4) und (5) der Zusammenhang

$$\left|\frac{\mathfrak{R}_E}{Z}\right|_{\min}\left|\frac{\mathfrak{R}_E}{Z}\right|_{\max} = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad |\mathfrak{R}_E|_{\min}\,|\mathfrak{R}_E|_{\max} = Z^2. \tag{6}$$

Im vorliegenden Fall beträgt der normierte Wert des Abschlußwiderstandes

$$\frac{\mathfrak{R}_A}{Z} = \frac{150 - i\,30}{120} = 1{,}25 - i\,0{,}25.$$

Aus Bild 4.26 entnehmen wir

$$m = 0{,}72, \qquad \frac{l'}{\lambda} = 0{,}30.$$

Für den kleinsten reellen Wert des normierten Eingangswiderstandes folgt damit

$$\left|\frac{\Re_E}{Z}\right|_{\min} = m = 0{,}72,$$

für den größten

$$\left|\frac{\Re_E}{Z}\right|_{\max} = \frac{1}{m} = \frac{1}{0{,}72} = 1{,}39.$$

Auf dem Anpassungskreis $m = 0{,}72$ von $l'/\lambda = 0{,}30$ fortschreitend, erhalten wir für $(l + l')/\lambda = 0{,}50$, d. h. für

$$l = 0{,}20\lambda = 0{,}20 \cdot 50 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$$

den kleinsten Wert des Wirkwiderstandes

$$\Re_E = (R_E)_{\min} = 0{,}72 \cdot 120\Omega = 86\Omega.$$

Der größte Wert des Wirkwiderstandes

$$\Re_E = (R_E)_{\max} = 1{,}39 \cdot 120\Omega = 167\Omega$$

wird nach Durchlaufen einer weiteren Viertelwellenlänge, d. h. für

$$l = (0{,}20 + 0{,}25)\,\lambda = 0{,}45\lambda = 22{,}5 \text{ cm}$$

angenommen.
Die Angaben über die Länge der Leitungen erfolgen mit dem Modul $\lambda/2 = 25$ cm.

4.4.3. Messung des Abschlußwiderstandes einer Leitung

Es soll der Abschlußwiderstand einer Koaxialleitung mit dem Wellenwiderstand $Z = 70\Omega$ gemessen werden. Hierzu wird zwischen dem Sender S und der Leitung L eine Meßleitung ML mit dem gleichen Wellenwiderstand geschaltet (vgl. Bild 4.27).
Bei der Messung ersetzt man zunächst den unbekannten Abschlußwiderstand $\Re_A$ durch einen Kurzschluß und bestimmt auf der Meßleitung durch Abtasten die Spannungsknoten. Für diese werden auf der Skale die Werte (in mm) 20, 170, 320, 470 gemessen. Nach Einschalten des Abschlußwiderstandes $\Re_A$ werden die Punkte maximaler und die Punkte minimaler Spannung bestimmt. Für das Verhältnis zwischen den Spannungswerten ergebe sich

$$\frac{U_{\min}}{U_{\max}} = 0{,}75.$$

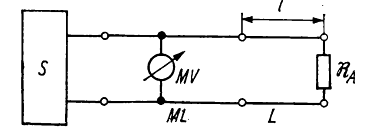


Bild 4.27. Anordnung zur Messung des Abschlußwiderstandes. S Sender, ML Meßleitung mit Skale und verschiebbarem Meßverstärker MV, L Leitung

Die Punkte minimaler Spannung seien auf der Meßleitung bei 80, 230, 380 gelegen, die Punkte maximaler Spannung bei 5, 155, 305, 455. Bestimmen Sie aus diesen Angaben den Abschlußwiderstand der Leitung.

Lösung

Der gegebene Abschlußwiderstand $\mathfrak{R}_A$ kann durch eine Leitung der Länge l' ersetzt werden, die mit dem reellen Abschlußwiderstand $X = mZ$ abgeschlossen ist. Die Leitung der Ersatzlänge l' bewirkt eine Verschiebung der Spannungsminima. Im vorliegenden Fall beträgt diese

$$\Delta l = l' = (80 - 20)\ \text{mm} = (230 - 170)\ \text{mm} = 6\ \text{cm}.$$

Der Abstand zweier Spannungsminima ist gleich $\lambda/2$. Aus den gemessenen Werten auf der Meßleitung kann man daher die Wellenlänge überprüfen:

$$\lambda = 2(170 - 20)\ \text{mm} = 30\ \text{cm}.$$

Für den Parameter des Phasenkreises folgt

$$\frac{l'}{\lambda} = \frac{6{,}0}{30{,}0} = 0{,}20.$$

Der Anpassungskreis ergibt sich aus dem Verhältnis der minimalen zur maximalen Spannung. Wir schreiben nach (4.4./22) die Spannung als Überlagerung zweier Wellen

$$U(z, t) = e^{i\omega t}(U_1\, e^{i\alpha z} + U_2\, e^{-i\alpha z}). \tag{1}$$

Die Amplituden sind durch die Formeln (4.4./12) darstellbar. Im Falle verlustfreier Leitungen folgt wegen $\gamma = i\,\alpha$:

$$U_1 = U_0 \frac{(\mathfrak{R}_A - Z)\, e^{-i\alpha l}}{2(\mathfrak{R}_A \cos \alpha l + i\, Z \sin \alpha l)}, \quad U_2 = U_0 \frac{(\mathfrak{R}_A + Z)\, e^{i\alpha l}}{2(\mathfrak{R}_A \cos \alpha l + i\, Z \sin \alpha l)}. \tag{2}$$

Für das Verhältnis der Spannungsamplituden ergibt sich hieraus

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{\mathfrak{R}_A - Z}{\mathfrak{R}_A + Z}\, e^{-2i\alpha l}. \tag{3}$$

In (3) kann die Darstellung von $\mathfrak{R}_A$ durch eine Leitung der Länge l' mit dem Abschlußwiderstand $X = mZ$ berücksichtigt werden. Hierzu hat man l durch $l + l'$ und $\mathfrak{R}_A$ durch X zu ersetzen. Es ergibt sich

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{X - Z}{X + Z}\, e^{-2i\alpha(l+l')}. \tag{4}$$

Wir drücken in (1) die Spannungsamplitude U_1 auf Grund des Zusammenhanges (4) durch U_2 aus; für die zeit- und ortsabhängige Spannung schreiben wir also nach (1)

$$U(z,t) = U_2\, e^{i\omega t} \left[-\frac{1 - m}{1 + m}\, e^{-2i\alpha(l+l')}\, e^{i\alpha z} + e^{-i\alpha z} \right]. \tag{5}$$

Der Wert des Spannungsmaximums ergibt sich aus (5), wenn die Beträge der Summanden addiert werden. Das Minimum folgt aus der Differenz der Beträge. Es folgt somit aus (5)

$$\frac{U_{\text{min}}}{U_{\text{max}}} = \frac{-\dfrac{1-m}{1+m}+1}{\dfrac{1-m}{1+m}+1} = m. \tag{6}$$

Das Verhältnis des Spannungsminimums zum Spannungsmaximum auf der Leitung ist gleich der Anpassung m.
Im vorliegenden Fall erhalten wir $m = 0{,}75$. Der gesuchte Widerstand liegt auf dem Anpassungskreis 0,75 und auf dem Phasenkreis $l'/\lambda = 0{,}20$. Nach Bild 4.26 entspricht diesen Werten der normierte Widerstand

$$\frac{\mathfrak{R}_{\text{A}}}{Z} = 1{,}23 + \text{i}\,0{,}22.$$

Für den gesuchten Abschlußwiderstand ergibt sich

$$\mathfrak{R}_{\text{A}} = (86 + \text{i}\,0{,}15)\,\Omega.$$

4.4.4. Anpassung durch Veränderung des Wellenwiderstandes

Eine Koaxialleitung mit den Abmessungen $2R_{\text{i}} = 5\,\text{mm}$, $2R_{\text{a}} = 16\,\text{mm}$ ist mit dem Widerstand $\mathfrak{R}_{\text{A}} = (77 + \text{i}\,32{,}5)\,\Omega$ abgeschlossen. Wie ist die Leitung zu verändern, um Anpassung zu erzielen? Welche Dimensionierungen ergeben sich für $\lambda = 20\,\text{cm}$?

Lösung

Nach 4.3.3. hat die Koaxialleitung den Wellenwiderstand $Z = 70\,\Omega$. Der normierte Abschlußwiderstand ist somit gleich

$$\frac{\mathfrak{R}_{\text{A}}}{Z} = \frac{77 + \text{i}\,32{,}5}{70} = 1{,}10 + \text{i}\,0{,}46.$$

Im Kreisdiagramm entspricht das den Kreisen $m = 0{,}63$, $\dfrac{l'}{\lambda} = 0{,}16$ (vgl. Bild 4.28). Wir schließen an $\mathfrak{R}_{\text{A}}$ zunächst eine Leitung 0 mit dem Wellenwiderstand $Z_0 = Z = 70\,\Omega$ an, der wir die Länge $l_0 = 0{,}09\lambda$ geben (vgl. Bild 4.28). Dabei wird der komplexe in einen rein reellen Widerstand transformiert.
Seine Größe beträgt nach dem Diagramm

$$\mathfrak{R}_{\text{E}0} = \frac{Z_0}{m}, \tag{1}$$

in Zahlen

$$\mathfrak{R}_{\text{E}0} = \frac{70\,\Omega}{0{,}63} = 111\,\Omega.$$

Gegenüber einer sich daran anschließenden Leitung mit dem Wellenwiderstand Z_1 repräsentiert der ermittelte Eingangswiderstand $\mathfrak{R}_{\text{E}0}$ einen Abschlußwiderstand $\mathfrak{R}_{\text{A}1}$. Der normierte Abschluß-

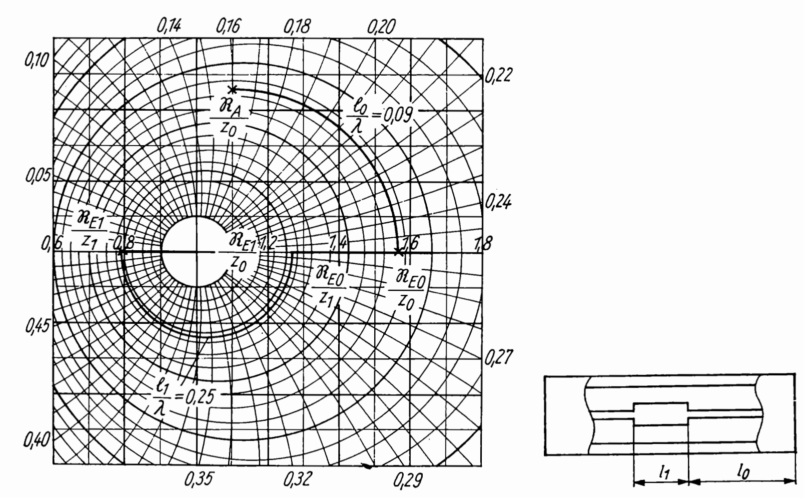


Bild 4.28. Anpassung durch Veränderung des Wellenwiderstandes

widerstand beträgt für diese Leitung

$$\frac{\Re_{A1}}{Z_1} = \frac{\Re_{E0}}{Z_1} = \frac{\Re_{E0}}{Z_0} \frac{Z_0}{Z_1} = \frac{1}{m} \frac{Z_0}{Z_1}. \tag{2}$$

Er läßt sich graphisch darstellen, indem man im Kreisdiagramm den normierten Widerstand $\Re_{E0}/Z_0$ im Maßstab Z_0/Z_1 verändert, d. h. auf der reellen Achse von $\Re_{E0}/Z_0$ nach $\Re_{E0}/Z_1$ fortschreitet. Wir wählen

$$\frac{Z_0}{Z_1} = \sqrt{m}. \tag{3}$$

Mit den vorliegenden Zahlen erhalten wir

$$Z_1 = \frac{Z_0}{\sqrt{m}} = \frac{70\,\Omega}{\sqrt{0,63}} = 88,2\,\Omega.$$

Daraus ergibt sich nach (2) und (3)

$$\frac{\Re_{E0}}{Z_1} = \frac{\Re_{E0}}{Z_0} \frac{Z_0}{Z_1} = \frac{1}{\sqrt{m}}. \tag{4}$$

Gibt man der Leitung 1 die Länge $\lambda/4$, so gelangt man zum normierten Eingangswiderstand

$$\frac{\Re_{E1}}{Z_1} = \sqrt{m}. \tag{5}$$

Mit den vorgegebenen Werten erhalten wir

$$\frac{\Re_{E1}}{Z_1} = \sqrt{0,63} = 0,79.$$

An die Leitung 1 schließen wir als Leitung 2 die Leitung mit den ursprünglichen Abmessungen an. Ihr Wellenwiderstand ist $Z_2 = Z_0$. Für den normierten Abschlußwiderstand folgt nach (5) und (3)

$$\frac{\Re_{A2}}{Z_2} = \frac{\Re_{E1}}{Z_2} = \frac{\Re_{E1}}{Z_1}\frac{Z_1}{Z_0} = \sqrt{m}\,\frac{1}{\sqrt{m}} = 1 . \tag{6}$$

Die Leitungstransformation hat zur Anpassung geführt. Mit den gegebenen Zahlenwerten erhalten wir

$$l_0 = 0{,}09\lambda = 0{,}09 \cdot 20\ \text{cm} = 1{,}80\ \text{cm}, \qquad l_1 = 0{,}25\lambda = 5{,}00\ \text{cm}.$$

Der Wellenwiderstand $Z_1 = 88{,}2\,\Omega$ wird bei festem Außenleiterdurchmesser $2R_a = 16$ mm durch $2R_i = 3{,}68$ mm realisiert.

4.4.5.* Eingangswiderstand der Koaxialleitung mit geschlitztem Außenleiter

Zur symmetrischen Anpassung des Abschlußwiderstandes an eine Koaxialleitung wird der Außenleiterzylinder durch zwei symmetrische Schlitze (vgl. Bild 2.15) in zwei Halbschalen zerlegt, von denen eine am Ausgang mit dem Innenleiter kurzgeschlossen ist. Der Abschlußwiderstand (Dipol) befindet sich am Ausgang der beiden Halbschalen. Stellen Sie die Formel für den Eingangswiderstand eines derartigen Leitungssystems auf.
Der Außenleiter habe die Wandstärke $b = 2$ mm. Sein Innendurchmesser betrage $2R_a = 20$ mm. Die Schlitzwinkel seien gleich $2\varphi_0 = 2°$. Der Innenleiter habe den Durchmesser $2R_i = 6{,}25$ mm. Der Abschlußwiderstand zwischen den beiden Zylinderhalbschalen sei gleich $\Re_A = (350 - \mathrm{i}\,70)\,\Omega$. Die Wellenlänge betrage $\lambda = 20$ cm. Wie ist die Schlitzlänge zu wählen, um die beste Anpassung zu erzielen?

Lösung

Wir kennzeichnen den Innenleiter durch den Index 0, die beiden Halbschalen durch 1 und 2. Für das Differential des Leitungssystems ergibt sich das Ersatzschaltbild nach Bild 4.29.

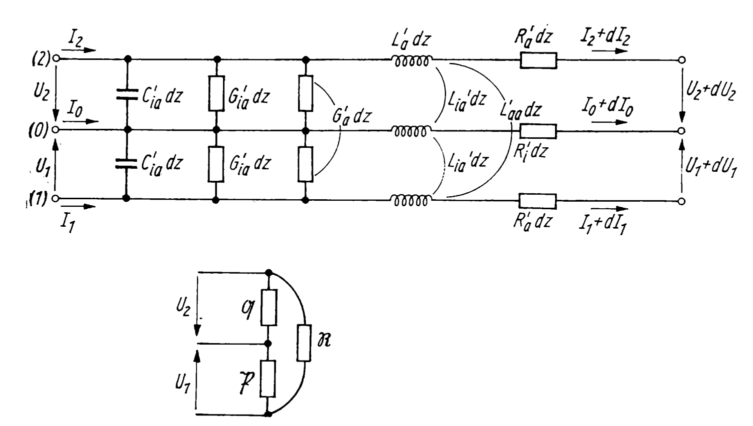


Bild 4.29. Leitungsdifferential und Abschluß der Koaxialleitung mit geschlitztem Außenleiter

Der **Strom** I_0 im Innenleiter ist mit den beiden Außenströmen durch

$$I_0 = -(I_1 + I_2) \tag{1}$$

verknüpft. Nach dem zweiten KIRCHHOFFschen Gesetz erhalten wir

$$-\frac{dI_1}{dz} = aU_1 + bU_2, \tag{2}$$

$$-\frac{dI_2}{dz} = bU_1 + aU_2 \tag{3}$$

mit

$$a = i\omega(C'_{ia} + C'_{aa}), \qquad b = -i\omega C'_{aa} \tag{4}$$

(vgl. Bild 4.29).
Für die **Spannungen** ergibt sich nach dem ersten KIRCHHOFFschen Gesetz aus den Leitern 1 und 0

$$-\frac{dU_1}{dz} = a^*I_1 + b^*I_2. \tag{5}$$

Darin haben a^* und b^* die Bedeutung

$$a^* = i\omega(L_a' + L_i' - 2L'_{ia}), \qquad b^* = i\omega(L_i' + L'_{aa} - 2L'_{ia}) \tag{6}$$

(vgl. Bild 4.29).
Eine ähnliche Gleichung erhalten wir aus 0 und 2:

$$-\frac{dU_2}{dz} = b^*I_1 + a^*I_2. \tag{7}$$

Die beiden Außenleiterhalbschalen liegen spiegelbildlich zueinander. Ein Unterschied in ihrem elektrischen Zustand kann nur durch die **Abschlußwiderstände** hervorgerufen werden. Wir bezeichnen die Abschlußwiderstände mit $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$.
Für $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}$ muß

$$U_1(z) = U_2(z) = U(z), \qquad I_1(z) = I_2(z) = \frac{I(z)}{2} \tag{8}$$

gelten. Es liegt dann nur noch ein System aus zwei Leitern vor: dem Außen- und dem Innenleiter. Wegen der Symmetrie auch am Leitungsausgang kann sich zwischen den beiden Halbschalen keine Potentialdifferenz ausbilden. Bezeichnet man den Induktivitäts- und den Kapazitätsbelag der entstandenen Leitung mit L_I' und C_I', so müssen die Gleichungen

$$-\frac{dU}{dz} = i\omega L_I' I, \tag{9}$$

$$-\frac{dI}{dz} = i\omega C_I' U \tag{10}$$

bestehen. Dagegen folgt aus (5)

$$-\frac{dU}{dz} = \frac{1}{2}(a^* + b^*) I. \tag{11}$$

Aus (2) und (3) erhält man im Spezialfall (8)

$$-\frac{dI}{dz} = 2(a + b) U. \tag{12}$$

Durch Vergleich der Koeffizienten gelangt man zu den beiden Gleichungen

$$i\omega L_I' = \frac{1}{2}(a^* + b^*), \qquad i\omega C_I' = 2(a + b). \tag{13}$$

Ein zweiter Spezialfall ergibt sich, wenn sich die beiden Außenschalen auf entgegengesetzten Potentialen befinden, während der Innenleiter das Potential Null hat.
Es gilt dann

$$U_1 = -U_2 = \frac{U}{2}, \qquad I_1 = -I_2 = I, \qquad I_0 = 0. \tag{14}$$

Induktivitäts- und Kapazitätsbelag dieser Leitung seien mit L_{II}' und C_{II}' bezeichnet. Wir verfahren wie im ersten Spezialfall und erhalten das Gleichungssystem

$$i\omega L_{II}' = 2(a^* - b^*), \qquad i\omega C_{II}' = \frac{1}{2}(a - b). \tag{15}$$

Die insgesamt vier Gleichungen aus (13) und (15) bilden ein algebraisches System zur Rückführung der vier Koeffizienten a, b, a^*, b^* auf die Größen L_I', C_I', L_{II}', C_{II}'. Es folgt

$$\begin{aligned} a &= i\omega\left(\frac{C_I'}{4} + C_{II}'\right), & b &= i\omega\left(\frac{C_I'}{4} - C_{II}'\right), \\ a^* &= i\omega\left(L_I' + \frac{L_{II}'}{4}\right), & b^* &= i\omega\left(L_I' - \frac{L_{II}'}{4}\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Wir setzen (16) in (2) und (3) ein. Durch Addition dieser beiden Gleichungen entsteht

$$-\frac{d(I_1 + I_2)}{dz} = \frac{1}{2} i\omega C_I'(U_1 + U_2). \tag{17a}$$

Ebenso erhalten wir aus (5) und (7)

$$-\frac{d(U_1 + U_2)}{dz} = 2i\omega L_I'(I_1 + I_2). \tag{17b}$$

Subtrahieren wir dagegen die Gleichungen, so folgt

$$-\frac{d(I_1 - I_2)}{dz} = 2i\omega C_{II}'(U_1 - U_2), \tag{18a}$$

$$-\frac{d(U_1 - U_2)}{dz} = \frac{1}{2} i\omega L_{II}'(I_1 - I_2). \tag{18b}$$

In (17) treten nur noch Größen des ersten, in (18) nur noch Größen des zweiten Spezialfalles auf. Die allgemeinen Lösungen der Gleichungssysteme (17) und (18) schreiben wir in der Form

$$\left.\begin{aligned} I_1 + I_2 &= A_{11} \cos \alpha z + A_{12} \sin \alpha z, \\ U_1 + U_2 &= B_{11} \sin \alpha z + B_{12} \cos \alpha z; \end{aligned}\right\} \tag{19a}$$

$$\left.\begin{aligned} I_1 - I_2 &= A_{21} \cos \alpha z + A_{22} \sin \alpha z, \\ U_1 - U_2 &= B_{21} \sin \alpha z + B_{22} \cos \alpha z. \end{aligned}\right\} \tag{19b}$$

Darin gilt

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega \sqrt{L_I' C_I'} = \omega \sqrt{L_{II}' C_{II}'}.$$

Führt man die Wellenwiderstände

$$Z_I = \sqrt{\frac{L_I'}{C_I'}}, \qquad Z_{II} = \sqrt{\frac{L_{II}'}{C_{II}'}} \tag{20}$$

ein, so ergibt sich aus (17) und (18) durch Koeffizientenvergleich mit den Lösungsansätzen (19a) und (19b)

$$\left.\begin{aligned} A_{11} &= \frac{i}{2Z_I} B_{11}, & A_{12} &= -\frac{i}{2Z_I} B_{12}, \\ A_{21} &= \frac{2i}{Z_{II}} B_{21}, & A_{22} &= -\frac{2i}{Z_{II}} B_{22}. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Am Eingang in das Mehrleitersystem, für $z = 0$, müssen die **Anfangsbedingungen**

$$U_1(0) = U_0, \qquad U_2(0) = U_0 \tag{22}$$

erfüllt sein, wobei $U_0 e^{i\omega t}$ die zwischen Innen- und Außenleiter angelegte Spannung bedeutet. (22) liefert

$$B_{12} = 2U_0, \qquad B_{22} = 0. \tag{23}$$

Am Ausgang des Leitungssystems rechnen wir mit

$$\mathfrak{P} = 0, \qquad \mathfrak{Q} = \infty, \qquad \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_A. \tag{24}$$

(vgl. Bild 4.29). $\mathfrak{R}_A$ charakterisiert einen komplexen Widerstand, der durch den am Ende der Leitung angebrachten Dipol verursacht wird. Aus den KIRCHHOFFschen Stromverzweigungsgesetzen ergeben sich damit die Randbedingungen

$$U_1(l) = 0, \qquad U_2(l) = \mathfrak{R}_A I_2(l), \tag{25}$$

die wir auch in der Form

$$U_1(l) + U_2(l) = \mathfrak{R}_A \left[\frac{I_1(l) + I_2(l)}{2} - \frac{I_1(l) - I_2(l)}{2}\right], \tag{25a}$$

$$U_1(l) - U_2(l) = \mathfrak{R}_A \left[-\frac{I_1(l) + I_2(l)}{2} + \frac{I_1(l) - I_2(l)}{2}\right] \tag{25b}$$

schreiben können. Hieraus erhalten wir

$$B_{11} = 2U_0 \frac{-\cos \alpha l \sin \alpha l + \mathrm{i}\mathfrak{R}_A \left(\frac{\cos^2 \alpha l}{4Z_I} - \frac{\sin^2 \alpha l}{Z_{II}}\right)}{\sin^2 \alpha l - \mathrm{i}\mathfrak{R}_A \cos \alpha l \sin \alpha l \left(\frac{1}{4Z_I} + \frac{1}{Z_{II}}\right)}, \tag{26a}$$

$$B_{21} = -2U_0 \cot \alpha l - B_{11}. \tag{26b}$$

Damit sind Strom- und Spannungsverteilung auf der Leitung bestimmt. Der **Eingangswiderstand** des Leitungssystems ist definiert als

$$\mathfrak{R}_E = \frac{U(0)}{I(0)} = \frac{U_1(0) + U_2(0)}{I_1(0) + I_2(0)}. \tag{27}$$

Daraus erhalten wir

$$\frac{\mathfrak{R}_E}{Z_I} = \frac{\mathfrak{R}_A \left(\frac{1}{4Z_I} + \frac{1}{Z_{II}}\right) + \mathrm{i} \tan \alpha l}{1 + \mathrm{i}\mathfrak{R}_A \left(\frac{\tan \alpha l}{4Z_I} - \frac{\cot \alpha l}{Z_{II}}\right)}. \tag{28}$$

Der normierte Eingangsleitwert läßt sich in der Form

$$\mathfrak{G}_E Z_I = \frac{\mathfrak{G}_a \mathfrak{Z}_a + \mathrm{i} \tan \alpha l}{1 + \mathrm{i}\mathfrak{G}_a \mathfrak{Z}_a \tan \alpha l} \tag{29}$$

mit

$$\mathfrak{G}_a \mathfrak{Z}_a = 4\mathfrak{G}_A Z_I - 4\mathrm{i} \frac{Z_I}{Z_{II}} \cot \alpha l \tag{30}$$

schreiben. Das betrachtete Dreileitersystem verhält sich hiernach wie ein Zweileitersystem, das mit dem Leitwert $4\mathfrak{G}_A$ und einer zu dieser parallelgeschalteten leerlaufenden Leitung abgeschlossen ist. Die Länge dieser Leitung und die Länge des Zweileitersystems sind identisch mit der Schlitzlänge l, jedoch weichen ihre Wellenwiderstände Z_I und Z_{II} voneinander ab.
Bei der Berechnung von Z_{II} kann im vorliegenden Fall der Innenleiter unberücksichtigt bleiben. Mit den vorgegebenen Zahlen folgt nach 4.3.2. und 4.3.4.

$$Z_I = 70\,\Omega, \qquad Z_{II} = 22\,\Omega.$$

Aus (30) ergibt sich mit den vorgegebenen Werten

$$\mathfrak{G}_a \mathfrak{Z}_a = \frac{4 \cdot 70}{350 - \mathrm{i}\,70} - 4\mathrm{i} \frac{70}{22} \cot \frac{2\pi l}{0{,}20\ \mathrm{m}}.$$

Soll der vorgegebene Abschlußwiderstand an die Koaxialleitung **optimal** angepaßt werden, so müssen sich die imaginären Anteile herausheben. Das erfordert, daß die Gleichung

$$\cot \frac{2\pi l}{0{,}20\ \mathrm{m}} = \frac{22 \cdot 70}{350^2 + 70^2} = 0{,}012$$

besteht. Sie wird für

$$\alpha = \frac{2\pi l}{\lambda} = 1{,}559,$$

d. h. für die Schlitzlänge

$$l = \frac{1{,}559}{2\pi} 20 \text{ cm} = 4{,}96 \text{ cm}$$

erfüllt.



Aufgaben

A 4.4.1. Berechnen Sie die Eindringtiefe bei Kupfer für die Frequenzen $f = 16^2/_3$ Hz und $f = 10^{10}$ Hz ($\gamma = 5{,}9 \cdot 10^7 \,\Omega^{-1}\,\text{m}^{-1}$).

A 4.4.2. Wie groß ist der Widerstandsbelag einer Koaxialleitung aus Kupfer, wenn der Innendurchmesser des Außenleiters $2R_a = 16$ mm, der Außendurchmesser des Innenleiters $2R_i = 5$ mm beträgt ($f = 10^{10}$ Hz)?

A 4.4.3. Der induktive Widerstand $\mathfrak{R} = \text{i}\,35\,\Omega$ soll durch eine kurzgeschlossene Leitung mit dem Wellenwiderstand $Z = 70\,\Omega$ dargestellt werden. Welche Länge muß die Leitung haben?

A 4.4.4. Durch eine Leitung mit dem Wellenwiderstand $Z = 70\,\Omega$ soll der induktive Widerstand $\mathfrak{R}_A = \text{i}\,35\,\Omega$ in den kapazitiven Widerstand $\mathfrak{R}_E = -\text{i}\,175\,\Omega$ transformiert werden. Wie lang muß die Leitung sein?

A 4.4.5. Eine Leitung läuft an ihrem Ende leer. Für welche Leitungslängen wird der unendlich große Abschlußwiderstand $\mathfrak{R}_A = \infty$ in einen Kurzschluß $\mathfrak{R}_E = 0$ transformiert?

A 4.4.6. An eine leerlaufende Leitung wird am Eingang eine Spannung angelegt. Mit einer Kontrollampe werden die Spannungsmaxima und -minima festgestellt. Für welche Leiterlängen wird ein Maximum der Spannung beobachtet? Für welche Stellen auf der Leitung bleibt die Lampe dunkel? (Lecher-Leitung)

A 4.4.7. Berechnen Sie die Eingangsimpedanz einer Bandleitung mit den Abmessungen $a = 2$ mm, $b = 2$ cm. Das Zwischenmedium hat die Dielektrizitätszahl $\varepsilon_r = 3{,}55$. Die Leitungslänge beträgt $l = 7{,}00$ m, die Frequenz $f = 2{,}275 \cdot 10^6$ Hz. Der Abschlußwiderstand ist gleich $\mathfrak{R}_A = -\text{i}\,4{,}0\,\Omega$.

A 4.4.8. Wie ist der Widerstand $\mathfrak{R}_A = (45 + \text{i}\,15)\,\Omega$ an eine Leitung mit dem Wellenwiderstand $Z = 60\,\Omega$ angepaßt?

A 4.4.9. Ein Widerstand $\mathfrak{R}_A = (90 - \text{i}\,30)\,\Omega$ soll durch einen reellen Widerstand $R_A < Z$ und eine Leitung mit dem Wellenwiderstand $Z = 60\,\Omega$ dargestellt werden. Bestimmen Sie $R_A/Z = m$ und l'/λ.

A 4.4.10. Eine Zweidrahtleitung der Länge $l = 4{,}5$ km mit den Abmessungen $r_0 = 1$ mm, $a = 2$ cm wird mit Wechselstrom der Frequenz $f = 5000$ Hz gespeist. Sie ist mit dem Widerstand $\mathfrak{R}_A = 540\,\Omega$ abgeschlossen. Wie wird dieser durch die Leitung transformiert?

A 4.4.11. Eine Leitung mit der Länge $l = 2{,}4$ cm und dem Wellenwiderstand $Z = 60\,\Omega$ ist mit dem Widerstand $\mathfrak{R}_A = 150\,\Omega$ abgeschlossen. Die Wellenlänge beträgt $\lambda = 20$ cm. Wie groß ist der Eingangswiderstand?

A 4.4.12. Bei der Messung des Abschlußwiderstandes wird eine Verschiebung $\Delta l = 15{,}6$ cm der Spannungsminima gegen die Kurzschlußpunkte festgestellt. Die Wellenlänge beträgt $\lambda = 39$ cm. Für das Verhältnis des Spannungsminimums zum -maximum ergibt sich $U_{min}/U_{max} = 0{,}65$. Der Wellenwiderstand beträgt $Z = 60\,\Omega$. Wie groß ist $\mathfrak{R}_A$?

A 4.4.13. Eine Leitung mit dem Wellenwiderstand $Z = 60\,\Omega$ ist mit dem Widerstand $\mathfrak{R}_A = (42 + \mathrm{i}\,30)\,\Omega$ abgeschlossen. Bestimmen Sie den kleinsten und den größten Wert des Wirkwiderstandes, wenn die Leitung verlängert wird. Für welche Leitungslängen werden diese Werte angenommen? Die Wellenlänge beträgt $\lambda = 20$ cm.

A 4.4.14. Der Abschlußwiderstand einer Leitung mit dem Wellenwiderstand $Z = 70\,\Omega$ beträgt $\mathfrak{R}_A = 175\,\Omega$. Bestimmen Sie den kleinsten Wert des Wirkwiderstandes bei der Widerstandstransformation durch die Leitung. Welche Länge muß die Leitung haben?

A 4.4.15. Stellen Sie die Formel für den normierten Eingangsleitwert $\mathfrak{G}_E Z = Z/\mathfrak{R}_E$ einer verlustfreien Leitung auf, wenn diese mit dem normierten Leitwert $\mathfrak{G}_A Z = Z/\mathfrak{R}_A$ abgeschlossen ist.

A 4.4.16. Stellen Sie die Formeln für den normierten Eingangsleitwert und für den normierten Eingangswiderstand einer leerlaufenden Leitung ($\mathfrak{G}_A = 0$ bzw. $\mathfrak{R}_A = \infty$) auf. Die Leitung sei verlustfrei.

A 4.4.17. Welche Operation ist im Kreisdiagramm durchzuführen, um normierte Widerstände in normierte Leitwerte umzurechnen? Bestimmen Sie danach zu $\mathfrak{R}/Z = 0{,}73 + \mathrm{i}\,0{,}20$ den normierten Leitwert.

A 4.4.18. Der Abschlußwiderstand $\mathfrak{R}_A = (48 - \mathrm{i}\,36)\,\Omega$ soll durch Veränderung der Leitung an den Wellenwiderstand $Z = 60\,\Omega$ angepaßt werden. Wie ist die Leitung zu verändern?

A 4.4.19. Berechnen Sie den Eingangswiderstand einer Koaxialleitung mit geschlitztem Außenleiter für die Schlitzlängen $l = \lambda/4$ und $l = \lambda/2$.

A 4.4.20. Definieren Sie den Reflexionsfaktor bei der Wellenausbreitung in einer Leitung mit dem Wellenwiderstand Z, die mit dem Widerstand $\mathfrak{R}_A$ abgeschlossen ist.

A 4.4.21. Bestimmen Sie in erster Näherung den Wellenwiderstand $\mathfrak{Z}$ und die Fortpflanzungskonstante γ einer Leitung unter Berücksichtigung der Verluste durch den ohmschen Widerstand und durch Ableitung.

4.5. Der Transistor als aktiver Vierpol

E

Einführung

Das Grundmaterial der Transistoren ist Silizium oder Germanium. Beide Stoffe sind vierwertig; ihre Atome enthalten vier Valenzelektronen. Hierauf beruht der Aufbau des Kristallgitters dieser Stoffe, der in Form der **Diamantstruktur** erfolgt (vgl. Bild 4.30): Jedes Silizium- bzw. Germaniumatom ist von vier anderen umgeben.

Bei den reinen Kristallen des Germaniums und des Siliziums sind die Valenzelektronen durch das symmetrische Gitternetz sehr fest gebunden. Es besteht nur eine äußerst geringe Wahrscheinlichkeit für die Bildung freier, d. h. nur an den Kristall gebundener Elektronen infolge statistischer Prozesse. Reine Kristalle sind daher besonders bei tiefen Temperaturen praktisch Nichtleiter. Mit zunehmender Temperatur steigt die Leitfähigkeit jedoch etwas an, im Gegensatz zum Verhalten der Metalle. Der reine Kristall stellt daher bei nicht zu tiefen Temperaturen einen **Eigenhalbleiter** dar.

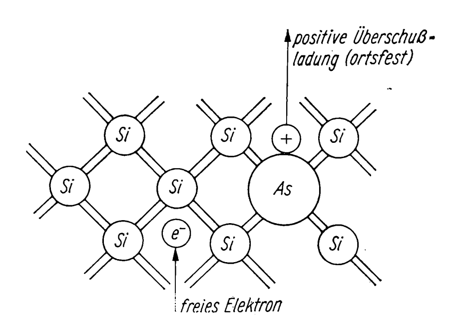


Bild 4.30. Siliziumkristall mit Fremdatom

Baut man im geringen Maße drei- oder fünfwertige Fremdatome in das Gitter des Germaniums oder des Siliziums ein, so wächst die Leitfähigkeit stark an. Sie liegt um mehrere Größenordnungen über der des reinen Kristalls. Man bezeichnet derartige Kristalle, deren Leitfähigkeit durch eingebaute Fremdatome stark vergrößert wird, als **Fremdhalbleiter.** Ihre Leitfähigkeit verringert sich ebenfalls mit abnehmender Temperatur.

Bei den Fremdhalbleitern unterscheidet man zwischen Überschuß- und Mangelhalbleitern.

Überschußhalbleiter (n-Halbleiter) entstehen, wenn in den vierwertigen Kristall fünfwertige Fremdstoffe, z. B. Antimon, Phosphor oder Arsen, eingebaut werden. Von den fünf Valenzelektronen dieser Stoffe können nur vier mit den Valenzelektronen der benachbarten Silizium- oder Germaniumatome zu einer abgeschlossenen Schale aus acht Elektronen gebunden werden. Das übrigbleibende Elektron ist nur schwach an das Atom gebunden und läßt sich mit geringem Energieaufwand ablösen. Hierdurch wird es innerhalb des Kristalls zum freien Elektron, das einem äußeren Feld folgen und sich durch den gesamten Kristall bewegen kann.

Bei den **Mangelhalbleitern (p-Halbleiter)** sind in den Kristall Fremdatome mit drei Valenzelektronen eingebaut, z. B. Bor, Aluminium oder Indium. Dabei bleibt eine Valenz der Germanium- oder Siliziumatome ungebunden, d. h., in den normalerweise abgeschlossenen Schalen tritt eine Elektronenlücke auf. Sie kann von Atom zu Atom durch den Kristall wandern und verhält sich dabei wie ein Teilchen mit positiver Elementarladung und der Masse eines Elektrons. Die Elektronenlücke wird daher als **Defektelektron** bezeichnet und wie ein selbständiges Teilchen behandelt, das sich unter dem Einfluß eines äußeren Feldes durch den Kristall bewegt.

In einem Festkörper können die p- und die n-leitenden Bezirke nebeneinander auftreten. Ein Gebiet, in dem ein p- und ein n-leitender Bezirk zusammenstoßen, wird als **pn-Übergang** bezeichnet. Er ist der grundlegende Bestandteil aller Halbleiterbauelemente. Ein kleiner Kristall mit einem pn-Übergang heißt **pn-Diode.**
Im n-Bereich besteht ein Überschuß an freien Elektronen, im p-Bereich an Defektelektronen. Liegt keine äußere Spannung an, so diffundieren beim Kontakt zwischen beiden Halbleiterschichten Elektronen vorwiegend vom n- in den p-Bereich, Defektelektronen vom p- in den n-Bereich. Der n-Bereich wird dadurch positiv, der p-Bereich negativ aufgeladen. In einer schmalen Übergangszone (beiderseits des pn-Überganges) bildet sich eine Dipolschicht aus **(Schottkysche Sperrschicht)**, deren elektrisches Feld die weitere Aufladung verhindert: Am pn-Übergang entsteht eine Potentialschwelle. Im Gleichgewicht tritt nur noch ein schwacher Elektronenstrom von der n- zur p-Schicht auf, der durch einen entgegengerichteten Strom von der p- zur n-Schicht diffundierender Elektronen ausgeglichen wird. Analog liegen die Verhältnisse bei den Defektelektronen.

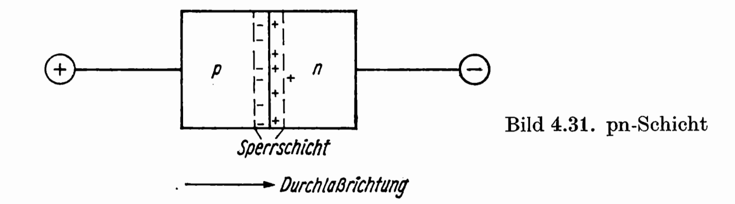


Bild 4.31. pn-Schicht

Bei anliegender Spannung wirkt die pn-Schicht als **Gleichrichter** (vgl. Bild 4.31): Liegt die n-Schicht an der negativen, die p-Schicht an der positiven Elektrode, so wird im n-Bereich das Elektronenpotential angehoben, die Potentialschwelle abgebaut. Infolgedessen können Elektronen in größerer Zahl die Sperrschicht überwinden und in die p-Schicht diffundieren. Analog verhalten sich die bevorzugt vom p- in den n-Bereich wandernden Defektelektronen.
Bei entgegengesetzter Polung (n-Schicht am positiven, p-Schicht am negativen Pol) erhöht sich die Potentialschwelle am pn-Übergang, und der schwache Elektronenstrom in den p-Bereich wird verringert. Elektronen, die vom p- in den n-Bereich diffundieren, sind nur in ganz geringer Zahl vorhanden. Es fließt daher als resultierender Strom nur ein sehr schwacher elektrischer Strom vom n- in den p-Bereich. Er wird als **Sperrstrom** bezeichnet. Erst von einer bestimmten, als **Durchbruchspannung** U_D bezeichneten Grenze an wächst der Strom in Sperrichtung mit zunehmender Sperrspannung steil an (vgl. Kennlinie Bild 4.32).

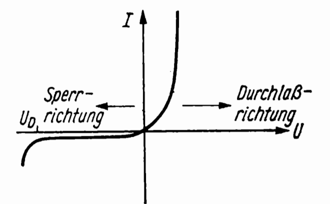


Bild 4.32. Strom-Spannungs-Kennlinie einer pn-Diode

Für den vom Plus- zum Minuspol fließenden elektrischen Strom ist somit die **Richtung von der p- zur n-Schicht Durchlaßrichtung** (Durchlaßpolung). Ein in entgegengesetzter Richtung fließender Strom weist bei nicht zu hohen Spannungen einen um Größenordnungen höheren Widerstand auf (Sperrpolung).
Der **Flächen- oder Sperrschichttransistor** ist aus drei sich abwechselnden p- und n-Schichten aufgebaut. Er enthält also zwei pn-Übergänge, von denen bei Anliegen äußerer Spannung einer in Durchlaßrichtung, einer in Sperrichtung gepolt ist. Man unterscheidet zwischen npn- und pnp-Transistoren (vgl. Bild 4.33a und Bild 4.33b). Die mittlere Schicht eines Transistors wird als **Basis** bezeichnet. Sie muß äußerst dünn sein, wenn der Transistor seine Funktion erfüllen soll. Auf der in Durchlaßrichtung gepolten Seite wird die äußere Schicht als **Emitter** definiert, auf der in Sperrichtung gepolten Seite als **Kollektor** (vgl. Bild 4.33a und Bild 4.33b).

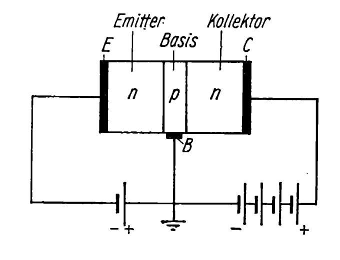


Bild 4.33a. npn-Flächentransistor in Basisschaltung

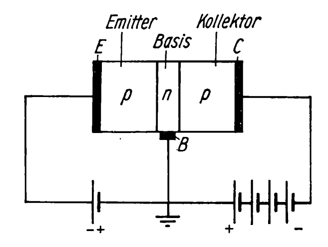


Bild 4.33b. pnp-Flächentransistor in Basisschaltung

Man bezeichnet die in den Bildern 4.33a und 4.33b dargestellten Schaltungen eines Transistors als **Basisschaltung.** In der Basisschaltung des **npn-Transistors** nach Bild 4.33a liegt die Kollektorelektrode C am positiven Pol einer Spannungsquelle, während die Basiselektrode B an den negativen Pol dieser Spannungsquelle angeschlossen ist. Die Emitterelektrode E ist mit dem Minuspol einer zweiten Spannungsquelle verbunden, deren positiver Pol ebenfalls an der Basiselektrode liegt.
Es bestehen also zwei Stromkreise, der **Emitterkreis** über Emitter und Basis und der **Kollektorkreis** über Kollektor und Basis. Der Basiselektrode, als dem gemeinsamen Anschlußpol beider Stromkreise, kann das Potential Null zugeordnet werden. Sie ist im allgemeinen an Masse gelegt.
Bild 4.34 zeigt das Schaltbild des npn-Transistors in Basisschaltung zusammen mit dem Nutz- oder Lastwiderstand $\mathfrak{R}_L$ am Ausgang und den Eingangsklemmen.
In der Transistortechnik werden elektrische Ströme, die zum Kristall hinfließen, positiv gezählt. Vom Kristall wegfließende Ströme sind negativ. Beim npn-Transistor

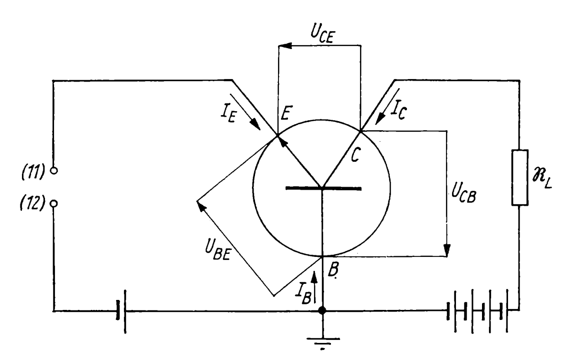


Bild 4.34. Technisches Schaltbild für einen npn-Transistor in Basisschaltung

nach Bild 4.34 ist der vom Emitter zum negativen Pol der Spannungsquelle fließende Emitterstrom I_E negativ, dagegen der vom positiven Pol zum Kollektor fließende Kollektorstrom I_C positiv.

Die Spannung zwischen zwei Punkten A und B wird gemäß (1.2./18) gleich der Potentialdifferenz

$$U_{AB} = \Phi_A - \Phi_B \tag{1}$$

gesetzt. Zwischen der Kollektor- und der Emitterelektrode besteht beim npn-Transistor eine positive Spannung U_{CE}. Auch die Spannung U_{BE} zwischen der Basis- und der Emitterelektrode ist positiv, jedoch kleiner als U_{CE}.

Im linken Stromkreis des npn-Transistors nach Bild 4.33a fließen Elektronen vom Emitter zur Basis, Defektelektronen von der Basis zum Emitter. Bei der Fertigung der Transistoren erfolgt in der Basisschicht die Dotierung mit Fremdatomen derart, daß hier nur ein geringer Anteil von Defektelektronen auftritt, verglichen mit dem Anteil der freien Elektronen in der Emitterschicht. Außerdem ist die Basis sehr dünn (wenige µm). Es läßt sich damit erreichen, daß nur sehr wenige Defektelektronen aus der Basisschicht mit Elektronen aus der Emitterschicht rekombinieren. Der weitaus größte Teil der aus dem Emitter in die Basis diffundierten Elektronen gelangt in die Sperrschicht zwischen Basis und Kollektor. Hier werden sie durch ein starkes elektrisches Feld zur Kollektorelektrode C hin beschleunigt und fließen über diese ab.

Je nach der Qualität des Transistors läßt sich erreichen, daß der Emitterstrom zu 95% bis über 99% in den Kollektorkreis übergeht, an der Basis also nur ein kleiner Bruchteil des Emitterstromes als Basisstrom erscheint. Emitterstrom I_E und Kollektorstrom I_C sind daher dem Betrage nach nahezu gleich.

Der Widerstand des Kollektorkreises mit seinem in Sperrichtung gepolten pn-Übergang ist wesentlich größer als der Widerstand des Emitterkreises. Wegen der nahezu gleichen Ströme liegt daher die Spannung des Kollektorkreises weit über der Spannung des Emitterkreises. Die Basisschaltung führt somit zu einer hohen Spannungsübersetzung bei nahezu gleichbleibenden Strömen. Große Spannungen und damit verbunden große Leistungen des Kollektorkreises lassen sich durch kleine Spannungen und kleine Leistungen des Emitterkreises steuern.

Wichtigste Grundschaltung für die praktische Anwendung ist die **Emitterschaltung** nach Bild 4.35a und Bild 4.35b. Die Basis liegt auf der Eingangsseite, der Kollektor auf der Ausgangsseite. Gemeinsame Anschlußelektrode ist der Emitter, der das

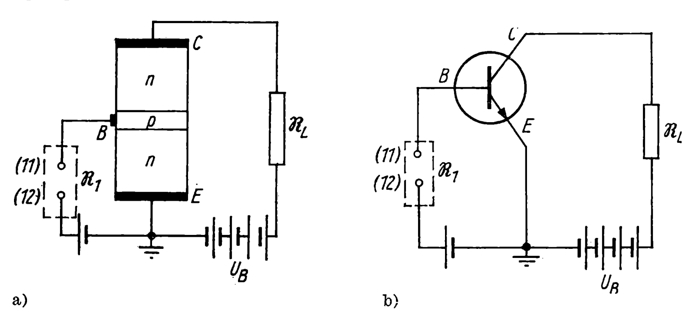


Bild 4.35. npn-Transistor in Emitterschaltung
$\mathfrak{R}_1$ Eingangswiderstand, $\mathfrak{R}_L$ Abschluß- bzw. Lastwiderstand (auch Nutzwiderstand)

Potential Null erhält. Vom ausgelösten Emitterstrom geht wie bei der Basisschaltung nur ein geringer Bruchteil an die Basiselektrode, während der weitaus größte Teil dem Kollektor zufließt. Der schwache Eingangsstrom I_B ist daher mit einem um ein Vielfaches größeren Ausgangsstrom $-I_C$ verknüpft. Andererseits ist wegen des in Sperrichtung gepolten pn-Überganges der Widerstand im Kollektorkreis bedeutend größer als im Basiskreis. Durch die angelegte Batteriespannung werden die Ladungsträger wie bei der Basisschaltung nach Passieren der in Sperrichtung gepolten Übergangsschicht stark beschleunigt. Auf der Ausgangsseite ist daher auch die Spannung um ein Vielfaches größer als auf der Eingangsseite. Die Emitterschaltung wirkt damit sowohl strom- als auch spannungsverstärkend.

Bei der **Kollektorschaltung** nach Bild 4.36a und Bild 4.36b bildet der Basiskreis den Eingangs- oder Steuerkreis, der Emitterkreis den Ausgangskreis. Gemeinsamer Anschlußpol für beide Stromkreise ist die Kollektorelektrode, der man das Potential Null gibt.

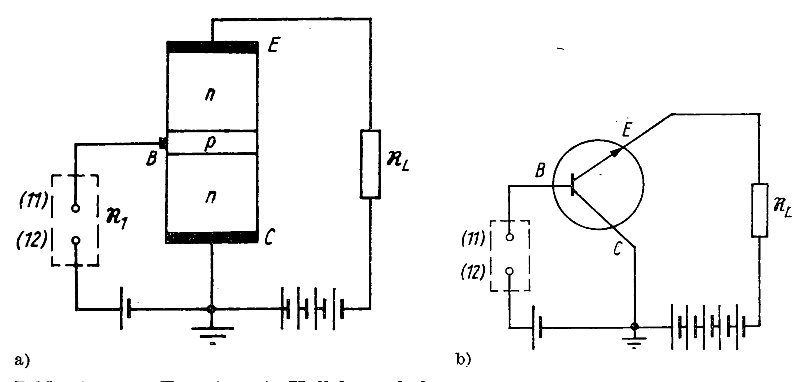


Bild 4.36. npn-Transistor in Kollektorschaltung

Der **pnp-Transistor** hat die gleichen Verstärkereigenschaften wie der npn-Transistor. Das unterschiedliche Verhalten ergibt sich daraus, daß p- und n-Schichten miteinander vertauscht sind. Man kann daher die Eigenschaften des pnp-Transistors aus denen des npn-Transistors ableiten, indem Elektronen und Defektelektronen sowie positive und negative Pole der Spannungsquellen vertauscht werden. Damit erhält man z. B. die Emitterschaltung nach Bild 4.37.
Die zwischen den Transistorelektroden auftretenden Spannungen bestimmen unabhängig von der Schaltung den **Arbeitspunkt.** Von den Spannungen hängen die im Transistor fließenden Ströme ab. Vielfach erfolgt die Kennzeichnung des Arbeitspunktes durch Angabe der Ströme und Spannungen.

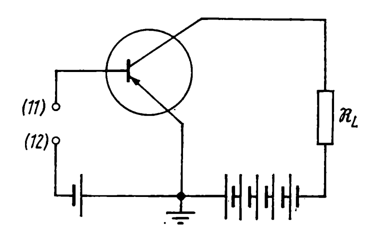


Bild 4.37. pnp-Transistor in Emitterschaltung

Beispiel 21

Der Arbeitspunkt eines pnp-Transistors in Emitterschaltung nach Bild 4.37 sei durch $U_{EB} = 0{,}1$ V und $U_{EC} = 5{,}0$ V bestimmt. Soll der Transistor in Basisschaltung auf dem gleichen Arbeitspunkt liegen, so müssen durch äußere Spannungen die folgenden Potentialdifferenzen erzeugt werden: $U_{EB} = 0{,}1$ V, $U_{CB} = U_{CE} + U_{EB} = (-5{,}0 + 0{,}1)$ V $= -4{,}9$ V. In der Kollektorschaltung ist $U_{EC} = 5{,}0$ V, $U_{BC} = 4{,}9$ V zu wählen.

Liegt zwischen den Transistorelektroden kein äußerer Widerstand, so sind die Potentialdifferenzen U_{CE}, U_{BE}, U_{BC} identisch mit den anzulegenden Batteriespannungen. Ist dagegen ein Widerstand R eingeschaltet, so hat man den an ihm auftretenden Spannungsabfall RI zu berücksichtigen. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird in diesem Fall mit U_B bezeichnet.

Beispiel 22

Der Transistor SC 207 soll in Bild 4.35 auf den Arbeitspunkt $U_{CE} = 6$ V, $I_C = 2$ mA eingestellt werden. Beträgt der ausgangsseitige Lastwiderstand $\Re_L = 5\,\text{k}\Omega$, so erfolgt für $I_C = 2$ mA an diesem Widerstand der Spannungsabfall $\Re_L I_C = 5 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3}$ V $= 10$ V. Die erforderliche Batteriespannung U_B muß dann gleich

$$U_B = U_{CE} + \Re_L I_C \tag{2}$$

sein, d. h., es ist $U_B = 16$ V zu wählen.

Der Transistor stellt einen aktiven Vierpol dar. In der Emitterschaltung nach Bild 4.35a) ist der Basisstrom I_B identisch mit dem Eingangsstrom I_1, der Kollektorstrom I_C bis auf das Vorzeichen identisch mit dem Ausgangsstrom I_2. Es gilt also

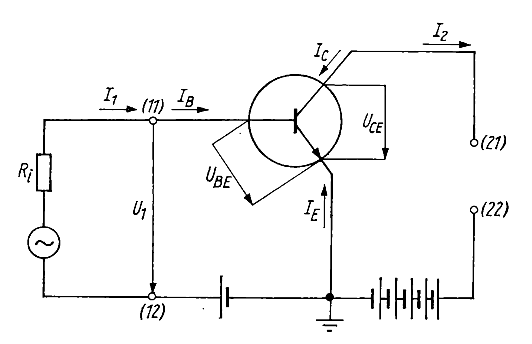


Bild 4.38. Ströme und Spannungen bei einem Transistor-Vierpol

(vgl. Bild 4.38)

$$I_1 = I_1^{\mathrm{E}} = I_{\mathrm{B}}, \qquad I_2 = I_2^{\mathrm{E}} = -I_{\mathrm{C}}. \tag{3}$$

Die **Stromübersetzung** $|I_2/I_1|$ wird am größten, wenn der Ausgangskreis kurzgeschlossen ist, d. h. der Nutzwiderstand $\mathfrak{R}_{\mathrm{L}}$ gleich Null ist.
Zur Verstärkung von **Wechselströmen** überlagert man diese den für den Betrieb des Transistors notwendigen Gleichströmen. Der Eingangs- und der Ausgangsstrom haben somit die Form

$$i_1 = i_{\mathrm{B}} = I_{\mathrm{B}} + I_{0\mathrm{B}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \qquad i_2 = -i_{\mathrm{C}} = -(I_{\mathrm{C}} + I_{0\mathrm{C}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}). \tag{4}$$

I_{B} und I_{C} bedeuten die Gleichstromanteile. Die periodisch veränderlichen Anteile sind in den zweiten Summanden dargestellt.
Als **Kurzschlußstromverstärkung** der Emitterschaltung definiert man das Verhältnis der Wechselstromamplituden bei ausgangsseitigem Kurzschluß (Lastwiderstand $\mathfrak{R}_{\mathrm{L}} = 0$):

$$\beta = \left|\frac{I_{0\mathrm{C}}}{I_{0\mathrm{B}}}\right|_{\mathfrak{R}_{\mathrm{L}}=0}. \tag{5}$$

Die Kurzschlußstromverstärkung ist vom Arbeitspunkt abhängig. Sie kann aus der Veränderung der im Transistor fließenden Gleichströme I_{B} und I_{C} berechnet werden. Kennzeichnet A den Arbeitspunkt, A_1 einen benachbarten Punkt gleicher ausgangsseitiger Spannung U_{CE}, so erhält man die Kurzschlußstromverstärkung β aus

$$\beta = \left|\frac{\Delta I_{\mathrm{C}}}{\Delta I_{\mathrm{B}}}\right|_{U_{\mathrm{CE}}} = \left|\frac{I_{\mathrm{C}}(A) - I_{\mathrm{C}}(A_1)}{I_{\mathrm{B}}(A) - I_{\mathrm{B}}(A_1)}\right|_{U_{\mathrm{CE}}}. \tag{6}$$

Bei den **Eingangs- und Ausgangswiderständen** unterscheidet man zwischen den Werten für Gleichstrom und denen für Wechselstrom. Sie sind ebenfalls vom Arbeitspunkt abhängig.

Für den Gleichstrom-Eingangswiderstand gilt bei der Emitterschaltung

$$\mathfrak{R}_{1=} = \mathfrak{R}_{1=}^{\mathrm{E}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_{\mathrm{BE}}}{I_{\mathrm{B}}}. \tag{7}$$

Der Wechselstrom-Eingangswiderstand gibt das Verhältnis der Amplituden von Eingangsspannung und Eingangsstrom an. Er läßt sich aus den Gleichstromwerten berechnen, wenn die Ausgangsspannung U_{CE} oder der Ausgangsstrom $-I_{\mathrm{C}}$ festbleiben:

$$\mathfrak{R}_{1\sim} = \mathfrak{R}_{1\sim}^{\mathrm{E}} = \frac{U_{1\sim}}{I_{1\sim}} = \left(\frac{\Delta U_{\mathrm{BE}}}{\Delta I_{\mathrm{B}}}\right)_{U_{\mathrm{CE}}\ \mathrm{bzw.}\ I_{\mathrm{C}}} = \left[\frac{U_{\mathrm{BE}}(A) - U_{\mathrm{BE}}(A_1)}{I_{\mathrm{B}}(A) - I_{\mathrm{B}}(A_1)}\right]_{U_{\mathrm{CE}}\ \mathrm{bzw.}\ I_{\mathrm{C}}}. \tag{8}$$

Für die Ausgangswiderstände in der Emitterschaltung folgt

$$\mathfrak{R}_{2=} = \mathfrak{R}_{2=}^{\mathrm{E}} = -\frac{U_{\mathrm{CE}}}{I_{\mathrm{C}}}, \qquad \mathfrak{R}_{2\sim} = \mathfrak{R}_{2\sim}^{\mathrm{E}} = -\left(\frac{\Delta U_{\mathrm{CE}}}{\Delta I_{\mathrm{C}}}\right)_{U_{\mathrm{BE}}\ \mathrm{bzw.}\ I_{\mathrm{B}}}. \tag{9}$$

Als **Leerlaufspannungsübersetzung** definiert man das Verhältnis der Spannungsamplituden bei eingangsseitigem Leerlauf (Leitwert zwischen den Eingangsklemmen gleich Null bzw. Stromamplitude I_{10} gleich Null):

$$\left|\frac{U_{20}}{U_{10}}\right|_{I_{10}=0} = \left|\frac{\Delta U_2}{\Delta U_1}\right|_{I_1} = \left|\frac{\Delta U_{\mathrm{CE}}}{\Delta U_{\mathrm{BE}}}\right|_{I_{\mathrm{B}}\ \mathrm{bzw.}\ I_{\mathrm{C}}}. \tag{10}$$

Die **Kennlinien** eines Transistors stellen den Zusammenhang zwischen den im Transistor fließenden Strömen und den Potentialdifferenzen graphisch dar. Von Interesse ist besonders die Emitterschaltung, für die folgende Kennlinienfelder angegeben werden:

a) das Ausgangskennlinienfeld $I_{\mathrm{C}}(U_{\mathrm{CE}})$,
b) das Eingangskennlinienfeld $I_{\mathrm{B}}(U_{\mathrm{BE}})$,
c) das Übertragungskennlinienfeld $I_{\mathrm{C}}(I_{\mathrm{B}})$ bzw. $I_{\mathrm{C}}(U_{\mathrm{BE}})$.

Bei den Kennlinien bezieht man sich auf zwei Grenzfälle:

1. Spannungssteuerung,
2. Stromsteuerung.

Ihre Unterscheidung ist besonders für die Ausgangskennlinien wichtig. Hat die äußere Spannungsquelle (vgl. Bild 4.38) einen niedrigen Innenwiderstand, der dem Betrage nach weit unter dem Eingangswiderstand des Transistors liegt, so spricht man von **Spannungssteuerung.** Wie aus 4.1.2. folgt, ist in diesem Falle die dem Eingang zugeführte Steuerspannung vom Transistor nahezu unabhängig und wird daher nicht verzerrt. Dagegen kann durch den Außenwiderstand der Eingangsstrom verzerrt werden. In den Kennlinien wird deshalb die Eingangsspannung als Parameter gewählt.
Im Falle der **Stromsteuerung** hat die Spannungsquelle einen hohen Innenwiderstand, der weit über dem Eingangswiderstand des Transistors liegt. Der Eingangsstrom ist

vom Eingangswiderstand nahezu unabhängig und wird nicht verzerrt, während im allgemeinen eine Verzerrung der Eingangsspannung auftritt. Die Kennlinien werden daher mit dem Eingangsstrom als Parameter dargestellt.
In Bild 4.39 sind die Ausgangskennlinien $I_C(U_{CE})$ des Transistors SC 207 in Emitterschaltung für eingeprägte Spannungssteuerung (Bild 4.39 a 1) und für eingeprägte Stromsteuerung (Bild 4.39 a 2) dargestellt. Bild 4.39 b enthält die Eingangskennlinien $I_B(U_{BE})$, Bild 4.39 c die Übertragungskennlinien $I_C(I_B)$. Bei diesen Kurven ist die Ausgangsspannung U_{CE} als Parameter gewählt, 4.39 b und 4.39 c sind also auf Spannungssteuerung beschränkt.

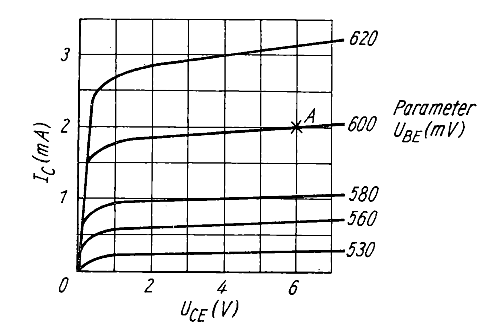


Bild 4.39. Kennlinien des npn-Transistors SC 207
a 1) Ausgangskennlinien bei eingeprägter Spannungssteuerung

Für die Verstärkertechnik sind besonders die Beträge der **Strom-** und der **Spannungsübersetzung** sowie des **Wechselstrom-Eingangs-** und **-Ausgangswiderstandes** von Interesse. Sie können aus der Kennlinie einfach ermittelt werden. Dabei ist darauf zu achten, daß die Kenngrößen vom Arbeitspunkt abhängig sind. Es muß daher entsprechend den Gleichungen (6), (8), (9) und (10) stets ein Parameter festgehalten werden.

Beispiel 23

Bei Spannungssteuerung entspricht dem Arbeitspunkt A ($U_{CE} = 6{,}0$ V, $U_{BE} = 600$ mV) nach Bild 4.39 a1 die Stromstärke $I_C = 2{,}0$ mA. Sie fällt bei konstanter Eingangsspannung $U_{BE} = 600$ mV um $\Delta I_C = -0{,}1$ mA auf 1,9 mA, wenn die Ausgangsspannung um $\Delta U_{CE} = -3$ V auf 3V gesenkt wird. Daraus folgt nach (9) für den Betrag des Wechselstrom-Ausgangswiderstandes im Arbeitspunkt A

$$|\mathfrak{R}_{2\sim}| = \frac{3{,}0}{0{,}1 \cdot 10^{-3}}\,\Omega = 30\,\text{k}\Omega.$$

Nach Bild 4.39b entspricht dem Arbeitspunkt A der Eingangsstrom $I_B = 52\,\mu$A. Wächst die Eingangsspannung von 600 auf 620 mV, so verändert sich bei konstanter Ausgangsspannung $U_{CE} = 6$ V der Eingangsstrom um $\Delta I_B = 14\,\mu$A auf 66 μA. Nach (8) erhält man damit für den Wechselstrom-Eingangswiderstand

$$|\mathfrak{R}_{1\sim}| = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{14 \cdot 10^{-6}}\,\Omega = 1{,}4\,\text{k}\Omega.$$

Aus Bild 4.39c entnimmt man für den Arbeitspunkt A bei konstanter Ausgangsspannung $U_{CE} = 6$ V: $\Delta I_B = 5$ µA, $\Delta I_C = 0{,}3$ mA und daraus nach (6) für die Kurzschlußstromverstärkung

$$\beta = \frac{0{,}3 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-6}} = 60.$$

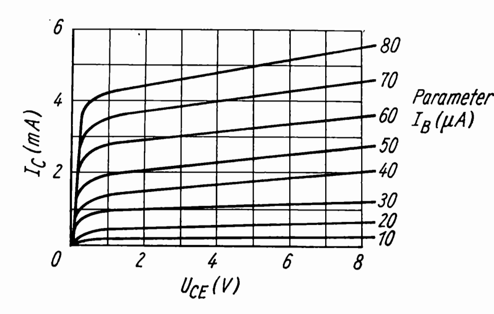


Bild 4.39
a 2) Ausgangskennlinien bei eingeprägter Stromsteuerung

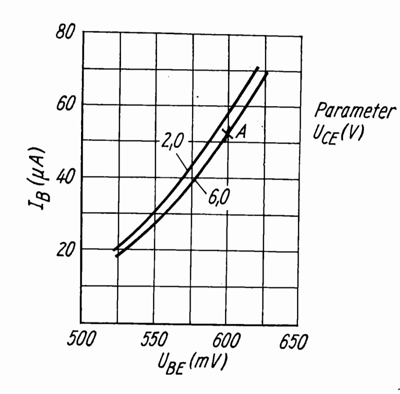


Bild 4.39 b. Eingangskennlinien

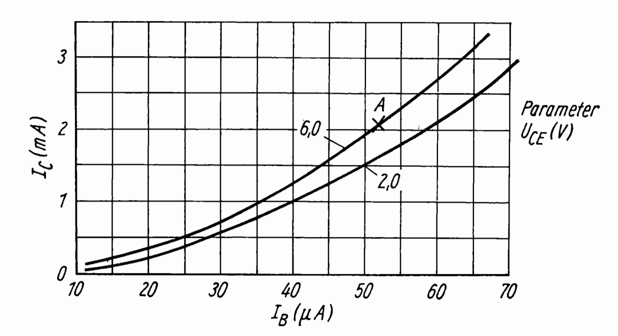


Bild 4.39 c. Übertragungs- oder Mischkennlinien

Ein Signal mit der Wechselstromamplitude 1 μA am Eingang wird somit durch den Transistor auf 60 μA verstärkt.
Die Berechnung der Spannungsübersetzung nach (10) kann auf Grund der Kennlinien in Bild 4.39b vor sich gehen. Im Arbeitspunkt A gilt

$$U_{\mathrm{BE}} = 600\,\mathrm{mV}, \quad U_{\mathrm{CE}} = 6\,\mathrm{V}, \quad I_{\mathrm{B}} = 52\,\mu\mathrm{A}.$$

Die benachbarte Kurve ist für $U_{\mathrm{CE}} = 2\,\mathrm{V}$ aufgenommen. Bei konstantem Eingangsstrom $I_{\mathrm{B}} = 50\,\mu\mathrm{A}$ (gleiche Ordinate) liest man auf der Abszisse $U_{\mathrm{BE}} = 585\,\mathrm{mV}$ ab. Daraus folgt die Leerlaufspannungsverstärkung

$$\left|\frac{\Delta U_{\mathrm{CE}}}{\Delta U_{\mathrm{BE}}}\right|_{I_{\mathrm{B}}} = \frac{4}{15 \cdot 10^{-3}} = 265.$$

Hat das Eingangssignal z. B. die Spannungsamplitude 1 mV, so ist diese am Ausgang auf 265 mV verstärkt.

Die **Größenordnung** des Eingangs- und des Ausgangswiderstandes in der Basis- und in der Kollektorschaltung kann aus den Werten der Emitterschaltung abgeschätzt werden.

Beispiel 24

In der Basisschaltung ist

$$|I_1| = |I_{\mathrm{E}}|, \qquad |U_1| = |U_{\mathrm{EB}}|.$$

Gegenüber der Emitterschaltung tritt also der Emitterstrom als Eingangsstrom an die Stelle des Basisstromes. Die Spannung ändert sich auf der Eingangsseite nicht.
Das Verhältnis der Emitterstrom- zur Basisstromamplitude kann genähert gleich der Kurzschlußstromübersetzung angenommen werden, wobei berücksichtigt wird, daß Emitter- und Kollektorstrom dem Betrage nach nahezu gleich sind:

$$\left|\frac{\Delta I_{\mathrm{E}}}{\Delta I_{\mathrm{B}}}\right|_{\mathrm{A}} \approx \left|\frac{\Delta I_{\mathrm{C}}}{\Delta I_{\mathrm{B}}}\right|_{\mathrm{A}} \approx \beta(A).$$

Daraus folgt für den Betrag des Eingangswiderstandes in Basisschaltung

$$|\mathfrak{R}_{1\sim}^{\mathrm{B}}| = \left|\frac{\Delta U_{\mathrm{EB}}}{\Delta I_{\mathrm{E}}}\right| \approx \left|\frac{\Delta U_{\mathrm{EB}}}{\Delta I_{\mathrm{B}}}\right| \frac{1}{\beta} = |\mathfrak{R}_{1\sim}^{\mathrm{E}}| \frac{1}{\beta}.$$

Mit den errechneten Werten aus Beispiel 23 ergibt sich

$$|\mathfrak{R}_{1\sim}^{\mathrm{B}}| = \frac{1{,}4\,\mathrm{k}\Omega}{60} \approx 20\,\Omega.$$

In Tabelle 7 sind die Größenordnungen der Ein- und Ausgangswiderstände sowie der Strom- und der Spannungsübersetzungen zusammengestellt (vgl. auch 4.5.2.).
Aus der Krümmung der Kennlinien geht hervor, daß die Verknüpfung zwischen den Eingangs- und Ausgangsgrößen nichtlinear ist, daß jedoch die Nichtlinearität in kleineren Bereichen im allgemeinen vernachlässigt werden kann. Bei kleiner Aus-

Tabelle 7. Die Größenordnungen bei den Grundschaltungen eines Transistors

	Basis-schaltung	Emitter-schaltung	Kollektor-schaltung
Eingangswiderstand	100 Ω	1 kΩ	100 kΩ
Ausgangswiderstand	1 MΩ	100 kΩ	100 Ω
Stromübersetzung	<1	100	100
Spannungsübersetzung	···1000	···1000	< 1

steuerung um einen bestimmten Arbeitspunkt kann man genähert mit Beziehungen entsprechend den Vierpolgleichungen (4.2./1) rechnen. In der Transistortechnik, insbesondere im NF-Bereich, ist es häufig zweckmäßig, die **hybride** Darstellung

$$\left.\begin{aligned} U_{10} &= h_{11}I_{10} + h_{12}U_{20}, \\ I_{20} &= h_{21}I_{10} + h_{22}U_{20} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

zu verwenden. U_{10}, I_{10}, U_{20}, I_{20} bezeichnen die Amplituden der Spannungen und der Ströme am Eingang und am Ausgang. Die hybriden Vierpolparameter h_{ik} sind vom Arbeitspunkt abhängig. In Tabellen werden typische Werte für die Transistoren angegeben. Die Bedeutung der hybriden Vierpolparameter geht aus 4.5.3. hervor. Bei kleinen Wechselströmen und -spannungen bestimmen die Vierpolparameter vollständig die Betriebseigenschaften des Transistors (vgl. 4.5.4.).

Im Bereich sehr niedriger Spannungen zwischen Kollektor und Emitter (U_{CE} in der Größenordnung 0,1...1 V) fällt nach Bild 4.39 a 1 und Bild 4.39 a 2 der Kollektorstrom I_{C} mit abnehmender Spannung U_{CE} steil ab. Dagegen bleibt der Strom I_{C} nach Überschreiten dieses Bereiches nahezu konstant, wenn U_{CE} verändert wird. Man bezeichnet die Spannung, von der an der Strom I_{C} bei Spannungserhöhungen nahezu unverändert bleibt, als **Rest- oder Kniespannung** U_{CER} (vgl. Bild 4.40). Die schwache Abhängigkeit der Restspannung U_{CER} vom Basisstrom kann meist vernachlässigt werden. U_{CER} liegt zwischen 0,1 und 1 V.

Der Kollektorstrom I_{C} geht auch bei fehlendem Steuerstrom $I_{\mathrm{B}} = 0$ nicht genau auf Null zurück. Bei der Öffnung des Eingangskreises, d. h., wenn der Basisstrom auf Null absinkt, fließt zwischen Emitter und Kollektor ein schwacher Strom weiter. Er wird als **Kollektorreststrom** I_{CO} bezeichnet (vgl. Bild 4.40) und beträgt 0,1 nA bis einige mA.

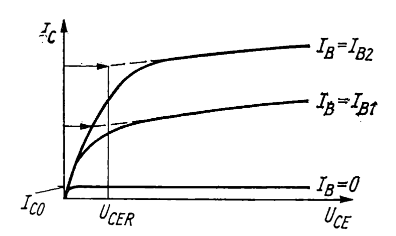


Bild 4.40. Rest- oder Kniespannung U_{CER} und Kollektorreststrom I_{CO}

Tabelle 8a. Vierpolparameter von Transistoren in Emitterschaltung

Transistor	Aufbau	h_{11} in kΩ	h_{21}	h_{22} in $10^{-6}\,\Omega^{-1}$	h_{12} 10^{-4}	Bemerkung
SC 100	pnp	0,5	15	32	1,8	typ.
SC 104	pnp	1,8	55	150	6	max.
SC 207	npn	2,3	30	48	3,8	typ.
SF 121	npn	700	95	31	3,5	typ.
SF 122	npn	700	95	31	3,5	typ.
SS 101	pnp	0,2	8	10	1	min.
		0,46	14	28	2	typ.
		0,9	22	50	6	max.
GC 116	pnp	1,3	56	200	20	max.

Tabelle 8b. Eigenschaften von Transistoren

Transistor	Aufbau	Zulässige Höchstwerte			Rest-spannung	Rest-strom
		Strom	Leistung	Spannung		
		$\bar{I}_C$ in A	P_{VO} in mW	U_{CEO} in V	U_{CER} in V	I_{CO} in μA
SC 112	npn	0,1	600	20	0,3	
SC 207	npn	0,1	200	40	0,4	
SF 127	npn	0,5	600	40	0,3	
SF 128	npn	0,5	600	60	0,5	100
SS 101	pnp	0,2	250	33	1	2
GC 116	pnp	0,15		20	0,2	25
GD 241	pnp	3,0		35	0,3	1000
GS 121	pnp	0,1		20	0,5	

Anmerkung: Der erste Buchstabe S bzw. G kennzeichnet Silizium bzw. Germanium als Grundstoff. Durch den zweiten Buchstaben wird die Verwendungsmöglichkeit angegeben: C NF-Transistoren, D NF-Leistungstransistoren, F HF-Transistoren, S Schalttransistoren.

P Probleme

4.5.1. Kurzschlußstromverstärkung

Der Silizium-npn-Transistor SC 111 läßt in der Emitterschaltung maximal eine Kurzschlußstromverstärkung um den Faktor $\beta = 550$ zu. Berechnen Sie die Stromverstärkung in der Basisschaltung und in der Kollektorschaltung bei ausgangsseitigem Kurzschluß.

Lösung

In der Emitterschaltung nach Bild 4.38 wird der Transistor mit dem Basisstrom I_B ausgesteuert. Der Kollektorstrom auf der Ausgangsseite ist am größten, wenn diese kurzgeschlossen ist. Als Kurzschlußstromverstärkung in Emitterschaltung definiert man (vgl. 4.5./5)

$$\beta = \left| \frac{I_{0C}}{I_{0B}} \right|. \tag{1}$$

Zwischen den Amplituden des Basis-, des Emitter- und des Kollektorstromes besteht nach den Gesetzen der Stromverzweigung die Beziehung

$$I_{0B} + I_{0C} + I_{0E} = 0. \tag{2}$$

Hierin ist nach 4.5. $|I_{0B}|$ klein gegen $|I_{0E}|$ und gegen $|I_{0C}|$. Schreiben wir daher

$$I_{0E} = -I_{0C} - I_{0B}, \tag{2a}$$

so ist aus dem Vorzeichen zu erkennen, daß entsprechend der Festlegung, zum Kristall hinfließende Ströme positiv zu rechnen, der Emitter- und der Kollektorstrom gegeneinander um 180° phasenverschoben sind.
Wir drücken in (1) I_{0B} durch I_{0E} und I_{0C} aus und erhalten

$$\beta = \frac{|I_{0C}|}{|I_{0E} + I_{0C}|} = \frac{1}{-\left(\frac{I_{0E}}{I_{0C}} + 1\right)} = \frac{1}{\left|\frac{I_{0E}}{I_{0C}}\right| - 1}. \tag{3}$$

In der Basisschaltung wird der Kollektorstrom durch den Emitterstrom gesteuert. Das Verhältnis zwischen den Beträgen der Amplituden bei kollektorseitigem Kurzschluß definiert man als Kurzschlußstromverstärkung α der Basisschaltung:

$$\alpha = \left| \frac{I_{0C}}{I_{0E}} \right| = -\frac{I_{0C}}{I_{0E}}. \tag{4}$$

Wir erhalten somit

$$\beta = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} - 1} \quad \text{bzw.} \quad \alpha = \frac{\beta}{\beta + 1}. \tag{5}$$

Da β eine große Zahl ist, liegt α nahe bei eins.

In der Kollektorschaltung nach Bild 4.36 steuert der Basisstrom den Emitterstrom. Für das Verhältnis zwischen den Wechselstromamplituden folgt bei ausgangsseitigem (emitterseitigem) Kurzschluß mittels (2) und (1)

$$\gamma = \left|\frac{I_{0E}}{I_{0B}}\right| = \frac{|I_{0B} + I_{0C}|}{|I_{0B}|} = 1 + \beta. \tag{6}$$

Mit dem vorgegebenen Wert erhalten wir aus (5) für die Kurzschlußstromverstärkungen in Basisschaltung bzw. in Kollektorschaltung

$$\alpha = \frac{550}{551} = 0{,}998, \qquad \gamma = 551.$$

4.5.2. Eingangswiderstand

Die Emitterschaltung des Transistors SF 121 besitze den Eingangswiderstand $\mathfrak{R}_{1E} = 0{,}8\,\text{k}\Omega$, während der Lastwiderstand $\mathfrak{R}_L$ am Ausgang $\mathfrak{R}_L = 100\,\text{k}\Omega$ beträgt. Berechnen Sie die Eingangswiderstände der Basis- und der Kollektorschaltung. Die Kurzschlußstromverstärkung in Emitterschaltung ist $\beta = 95$.

Lösung

Der Eingangswiderstand ist gleich dem Verhältnis zwischen der Spannungs- und der Stromamplitude an der Eingangsklemme. In der Emitterschaltung nach Bild 4.38 ist der Eingangsstrom gleich dem Basisstrom. Damit folgt als Verhältnis der Spannungsamplitude U_{10} zur Stromamplitude I_{10}

$$\mathfrak{R}_{1E} = \frac{U_{10}}{I_{10}} = \frac{U_{10}}{I_{0B}}. \tag{1}$$

Nach den Stromverzweigungsgesetzen sowie nach 4.5.1./4 können wir schreiben

$$\mathfrak{R}_{1E} = \frac{U_{10}}{I_{0B}} = \frac{U_{0BE}}{I_{0B}} = \frac{U_{0BE}}{-(I_{0E} + I_{0C})} = \frac{U_{0EB}}{I_{0E}(1-\alpha)}. \tag{2}$$

Der Eingangswiderstand in Basisschaltung ist nach Bild 4.34 gleich

$$\mathfrak{R}_{1B} = \frac{U_{10}}{I_{0E}} = \frac{U_{0EB}}{I_{0E}}. \tag{3}$$

Wir erhalten daher als Beziehung zwischen den Eingangswiderständen

$$\mathfrak{R}_{1E} = \mathfrak{R}_{1B}\,\frac{1}{1-\alpha}, \tag{4}$$

bzw. wenn wir die Verknüpfung nach (4.5.1./5) einsetzen,

$$\mathfrak{R}_{1E} = \mathfrak{R}_{1B}(1 + \beta). \tag{5}$$

In der Kollektorschaltung nach Bild 4.36 fließt der steuernde Basiswechselstrom von der Klemme *12* aus über die als widerstandsfrei anzusehenden Gleichspannungsquellen zum Transistor und

von dort zur Klemme *11*. Aus Bild 4.36 erhalten wir damit

$$U_{10} = -\mathfrak{R}_L I_{0E} + U_{0BE}. \tag{6}$$

Für den Emitterstrom setzen wir in erster Näherung den Kurzschlußstrom nach (4.5.1./6) ein und berücksichtigen die Phasenverschiebung:

$$I_{0E} = -I_{0B}(1 + \beta). \tag{7}$$

Damit ergibt sich aus (6) die Spannungsamplitude

$$U_{10} = \mathfrak{R}_L I_{0B}(1 + \beta) + U_{0BE}. \tag{8}$$

Als Eingangswiderstand der Kollektorschaltung folgt

$$\mathfrak{R}_{1K} = \frac{U_{10}}{I_{0B}} = \mathfrak{R}_L(1 + \beta) + \frac{U_{0BE}}{I_{0B}}. \tag{9}$$

Der zweite Summand ist nach (2) der Eingangswiderstand für die Emitterschaltung. Somit können wir schreiben

$$\mathfrak{R}_{1K} = \mathfrak{R}_{1E} + \mathfrak{R}_L(1 + \beta). \tag{10}$$

Einsetzen der Zahlenwerte liefert nach (5)

$$\mathfrak{R}_{1B} = \frac{\mathfrak{R}_{1E}}{1 + \beta} = \frac{0{,}8}{96}\,\mathrm{k\Omega} = 8{,}3\,\Omega$$

und nach (10)

$$\mathfrak{R}_{1K} = (0{,}8 + 100 \cdot 96)\,\mathrm{k\Omega} = 9{,}6\,\mathrm{M\Omega}.$$

Der Eingangswiderstand der Emitterschaltung liegt hiernach im allgemeinen um ein bis zwei Größenordnungen über dem der Basisschaltung und wird vom Eingangswiderstand der Kollektorschaltung um einige Größenordnungen übertroffen (vgl. Tabelle 7).

4.5.3. Vierpolgleichung des Transistors

Zwischen den Amplituden der Eingangsspannung U_{10}, des Eingangsstromes I_{10}, der Ausgangsspannung U_{20} und des Ausgangsstromes I_{20} besteht bei einem Transistor die Beziehung

$$U_{10} = h_{11} I_{10} + h_{12} U_{20}, \tag{1}$$

$$I_{20} = h_{21} I_{10} + h_{22} U_{20}, \tag{2}$$

sofern die Amplituden kleine Größen sind.
Für den Silizium-pnp-Niederfrequenztransistor SC 104 in Emitterschaltung werden als typische Werte die hybriden Koeffizienten

$$h_{11} = 1{,}8\,\mathrm{k\Omega}, \qquad h_{12} = 6 \cdot 10^{-4}, \qquad h_{21} = 55, \qquad h_{22} = 150 \cdot 10^{-6}\,\Omega^{-1}$$

angegeben. Untersuchen Sie die physikalische Bedeutung dieser Größen.

Lösung

Bei Kurzschluß $U_{20} = 0$ auf der Ausgangsseite folgt aus (1)

$$h_{11} = \left(\frac{U_{10}}{I_{10}}\right)_{U_{20}=0} \quad \text{bzw.} \quad h_{11} = \left(\frac{\Delta U_1}{\Delta I_1}\right)_{U_2} = \left(\frac{\Delta U_{BE}}{\Delta I_B}\right)_{U_{CE}}. \tag{3}$$

h_{11} gibt somit den Eingangswiderstand bei ausgangsseitigem Kurzschluß an:

$$h_{11} = (\Re_{1\sim})_{U_{20}=0}. \tag{4}$$

Im betrachteten Fall ist dieser in der Emitterschaltung gleich

$$(\Re_{1E})_{U_{20}=0} = 1{,}8\ \text{k}\Omega.$$

Aus (2) folgt für $U_{20} = 0$

$$h_{21} = \left(\frac{I_{20}}{I_{10}}\right)_{U_{20}=0} \quad \text{bzw.} \quad h_{21} = \left(\frac{\Delta I_2}{\Delta I_1}\right)_{U_2} = \left|\frac{\Delta I_C}{\Delta I_B}\right|_{U_{CE}}. \tag{5}$$

Danach kennzeichnet h_{21} die Kurzschlußstromverstärkung. Bei der Emitterschaltung ist diese nach (4.5.1./1) gleich

$$\beta = \left(\frac{I_{0C}}{I_{0B}}\right)_{U_{CE}} = h_{21}. \tag{6}$$

Im vorliegenden Fall ergibt sich also $\beta = 55$.
Bei eingangsseitigem Leerlauf ist $I_{10} = 0$. Damit folgt aus (1)

$$h_{12} = \left(\frac{U_{10}}{U_{20}}\right)_{I_{10}=0} \quad \text{bzw.} \quad h_{12} = \left(\frac{\Delta U_{BE}}{\Delta U_{CE}}\right)_{I_B}. \tag{7}$$

Der Koeffizient h_{12} kennzeichnet das Spannungsverhältnis zwischen dem Vierpoleingang und -ausgang bei eingangsseitigem Wechselstromleerlauf. h_{12} gibt somit ein Maß für die Spannungsrückwirkung zwischen den beiden Vierpolseiten. In dem vorgegebenen Fall erhalten wir

$$\left(\frac{U_{10}}{U_{20}}\right)_{I_{10}=0} = 6 \cdot 10^{-4},$$

d. h., geringe eingangsseitige Spannungen bewirken große ausgangsseitige Spannungen.
Aus (2) folgt bei eingangsseitigem Leerlauf $I_{10} = 0$

$$h_{22} = \left(\frac{I_{20}}{U_{20}}\right)_{I_{10}=0} \tag{8}$$

bzw.

$$\frac{1}{h_{22}} = \left(\frac{U_{20}}{I_{20}}\right)_{I_{10}=0} = (\Re_{2\sim})_{I_{10}=0}. \tag{8a}$$

h_{22} kennzeichnet den Ausgangsleitwert bei eingangsseitigem Leerlauf. Mit der vorgegebenen Größe erhalten wir nach (8a) für den Ausgangswiderstand $\Re_{2\sim} = U_{20}/I_{20}$ bei eingangsseitigem Leerlauf

$$(\Re_{2\sim})_{I_{10}=0} = \frac{1}{150 \cdot 10^{-6}}\,\Omega = 6{,}67\ \text{k}\Omega.$$

4.5.4. Betriebseigenschaften eines Transistors bei kleinen Signalspannungen

Der Transistor SF 122 ist in Emitterschaltung mit dem Nutzwiderstand $\mathfrak{R}_L = 5\,\mathrm{k}\Omega$ abgeschlossen. Bestimmen Sie die betriebliche Stromverstärkung I_{20}/I_{10}, die betriebliche Spannungsverstärkung U_{20}/U_{10}, den Eingangswiderstand $\mathfrak{R}_1 = U_{10}/I_{10}$ sowie die Leistungsverstärkung P_2/P_1. Die Vierpolparameter des Transistors in Emitterschaltung lauten

$$h_{11} = 700\,\Omega, \qquad h_{12} = 3{,}5 \cdot 10^{-4}, \qquad h_{21} = 95, \qquad h_{22} = 31 \cdot 10^{-6}\,\Omega^{-1}.$$

Lösung

Ströme und Spannungen sind nach (4.5.3./1) durch die beiden Gleichungen

$$U_{10} = h_{11}I_{10} + h_{12}U_{20}, \tag{1}$$

$$I_{20} = h_{21}I_{10} + h_{22}U_{20} \tag{2}$$

verknüpft. Zwischen den Amplituden des Stromes und der Spannung am Ausgang des Vierpols besteht die Beziehung

$$U_{20} = -\mathfrak{R}_L I_{20}. \tag{3}$$

Wir setzen (3) in (1) ein und lösen nach I_{20}/I_{10} auf:

$$\boxed{\frac{I_{20}}{I_{10}} = \frac{h_{21}}{1 + h_{22}\mathfrak{R}_L}}. \tag{4}$$

In (1) können wir I_{10} gemäß (4) durch I_{20} und weiter I_{20} mittels (3) durch U_{20} ausdrücken. Es folgt nach Umformungen für die Spannungsverstärkung

$$\boxed{\frac{U_{20}}{U_{10}} = \frac{-h_{21}\mathfrak{R}_L}{\mathfrak{R}_L \Delta h + h_{11}}} \tag{5}$$

mit

$$\Delta h = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}. \tag{6}$$

Der Eingangswiderstand ergibt sich aus

$$\mathfrak{R}_{1\sim} = \frac{U_{10}}{I_{10}} = \frac{U_{20}}{U_{20}/U_{10}} \cdot \frac{I_{20}/I_{10}}{I_{10}},$$

woraus man mittels (4) und (5) erhält

$$\boxed{\mathfrak{R}_{1\sim} = \frac{\Delta h \mathfrak{R}_L + h_{11}}{1 + h_{22}\mathfrak{R}_L}}. \tag{7}$$

Für die Leistungsverstärkung folgt schließlich bei einem reellen Nutzwiderstand $\mathfrak{R}_L = R_L$

$$V_L = \frac{P_2}{P_1} = \frac{I_{20}^2 R_L}{I_{10}^2 R_1} = \frac{R_L}{R_{1\sim}} \frac{h_{21}^2}{(1 + h_{22}R_L)^2}. \tag{8}$$

Mit den vorgegebenen Zahlen erhalten wir aus (4)

$$\frac{I_{20}}{I_{10}} = \frac{95}{1 + 31 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^3} = 82{,}2.$$

Aus (6) ergibt sich

$$\Delta h = 700 \cdot 31 \cdot 10^{-6} - 3{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot 95 = -0{,}01155$$

und damit aus (5)

$$\frac{U_{20}}{U_{10}} = \frac{-95 \cdot 5 \cdot 10^3}{-5 \cdot 10^3 \cdot 0{,}01155 + 700} = -740.$$

Das negative Vorzeichen kennzeichnet die Phasenumkehr. Der Eingangswiderstand wird nach (7) gleich

$$\mathfrak{R}_{1\sim} = \frac{-0{,}01155 \cdot 5 \cdot 10^3 + 700}{1 + 31 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^3}\,\Omega = 556\,\Omega,$$

die Leistungsverstärkung nach (8)

$$V_L = \frac{P_2}{P_1} = \frac{5 \cdot 10^3}{556} \frac{95^2}{(1 + 31 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^3)^2} = 60800.$$

4.5.5. Arbeitspunkteinstellung durch Spannungsteilerwiderstände

Für den npn-Transistor SC 207 in Emitterschaltung soll der Arbeitspunkt $I_C = 2$ mA, $U_{CE} = 4$ V mit einer Spannungsteilerschaltung nach Bild 4.41 eingestellt werden. Der Lastwiderstand beträgt $\mathfrak{R}_L = 5\,\text{k}\Omega$. Wie sind die Spannungsteilerwiderstände zu wählen, wenn die Summe der beiden Ströme I_I und I_{II} gleich dem Fünffachen des Basisstromes I_B ist?

Lösung

Es gelten die folgenden Beziehungen

$$I_I - I_{II} - I_B = 0, \tag{1}$$

$$R_{II} I_{II} = U_{BE}, \tag{2}$$

$$U_B - U_{BE} - R_I I_I = 0. \tag{3}$$

Aus (3) folgt, wenn wir I_I aus (1), I_{II} aus (2) einsetzen,

$$U_B - U_{BE} - R_I \left(\frac{U_{BE}}{R_{II}} + I_B\right) = 0. \tag{4}$$

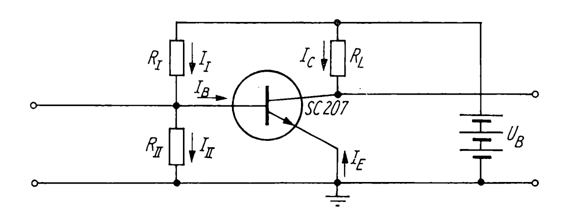


Bild 4.41. Arbeitspunkteinstellung eines Transistors durch Spannungsteilung

Hieraus erhalten wir

$$\frac{R_\mathrm{I}}{R_\mathrm{II}} = \frac{U_\mathrm{B} - U_\mathrm{BE}}{U_\mathrm{BE} + R_\mathrm{II} I_\mathrm{B}}. \tag{5}$$

Ferner besteht die Beziehung

$$U_\mathrm{B} + U_\mathrm{EC} - \Re_\mathrm{L} I_\mathrm{C} = 0. \tag{6}$$

Nach (1) und (2) gilt

$$\frac{I_\mathrm{I} + I_\mathrm{II}}{I_\mathrm{B}} = 1 + \frac{2U_\mathrm{BE}}{R_\mathrm{II} I_\mathrm{B}}.$$

Soll dieses Verhältnis gleich 5 sein, so muß

$$R_\mathrm{II} = \frac{U_\mathrm{BE}}{2I_\mathrm{B}} \tag{7}$$

erfüllt sein.
Nach Bild 4.39 a 2 ist für den angestrebten Arbeitspunkt $I_\mathrm{B} = 45\ \mu\mathrm{A}$. Damit folgt nach Bild 4.39 b $U_\mathrm{BE} = 585$ mV. Aus (7) ergibt sich

$$R_\mathrm{II} = \frac{585 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 45 \cdot 10^{-6}}\,\Omega = 6{,}5\ \mathrm{k}\Omega,$$

während wir aus (6)

$$U_\mathrm{B} = U_\mathrm{CE} + \Re_\mathrm{L} I_\mathrm{C} = (4 + 5 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3})\ \mathrm{V} = 14\ \mathrm{V}$$

und damit aus (5)

$$R_\mathrm{I} = 6{,}5 \cdot 10^3\, \frac{14 - 585 \cdot 10^{-3}}{585 \cdot 10^{-3} + 6{,}5 \cdot 10^3 \cdot 45 \cdot 10^{-6}}\,\Omega = 99{,}4\ \mathrm{k}\Omega$$

erhalten.

4.5.6. Relaisschaltung mit Transistoren

Zur Anwendung des Transistors als elektronischer Schalter wird eine Anordnung nach Bild 4.42 verwendet. Sie stellt einen von zwei möglichen Zuständen her, die mit O und L bezeichnet werden. Bild 4.43 zeigt die Kennlinien des verwendeten Schalttransistors Trs S und die den Zuständen O und L entsprechenden Arbeitspunkte.

Bei O ist der Ausgangswiderstand des Schalttransistors sehr groß, bei L sehr klein. O entspricht dem ausgeschalteten, L dem eingeschalteten Stromkreis.
Die Schaltung erfolgt durch einen Lichtstrahl, der auf ein Photoelement einwirkt. Zwischen dem Fotoelement und dem Schalttransistor befindet sich ein weiterer Transistor Trs V.
Fällt kein Licht auf das Fotoelement, so liegt im vorgeschalteten Transistor Trs V zwischen der Basis- und der Emitterelektrode die von der Batterie hervorgerufene Spannung U_{BE}^{V}. Sie führt in Trs V zu einem großen Kollektorstrom $I_C{}^V$ und einer großen Kollektorspannung U_{CE}^{V}. Im Schalttransistor wirkt diese Spannung der durch die Batterie verursachten Spannung zwischen der Basis- und der Emitterelektrode entgegen, so daß der Basisstrom des Schalttransistors gleich Null, der Kollektorstrom gleich dem Reststrom I_{CO} ist (Zustand O). Durch die äußere Spannungsquelle und durch geeignete Wahl der eingeschalteten Widerstände kann im Schalttransistor Trs S die Spannung U_{CE} auf sehr große Werte gebracht werden. U_{CE} ist nach oben begrenzt, da die Durchbruchspannung (vgl. Bild 4.32) nicht erreicht werden darf. Es muß $U_{CE} \leqq U_{CEO}$ sein.
Durch Lichteinwirkung wird das Fotoelement zur **Spannungsquelle**. Diese ist so geschaltet, daß die erzeugte Spannung an der Basis des zwischengeschalteten Transistors Trs V der Batteriespannung entgegenwirkt und den Basisstrom schwächt. Infolgedessen vermindert sich auch der Kollektorstrom $I_C{}^V$. Die Kollektorspannung U_{CE}^{V} nimmt gleichfalls ab. Dagegen steigt der Basisstrom des Schalttransistors an und führt zu einem großen Kollektorstrom.
Die Abnahme der Kollektorspannung U_{CE}^{V} im vorgeschalteten Transistor Trs V bewirkt, daß im Schalttransistor Trs S die Spannung zwischen der Kollektor- und der Emitterelektrode ebenfalls abnimmt. Trifft der volle Lichtstrahl das Fotoelement, so wird damit in Trs S der Arbeitspunkt L eingestellt.

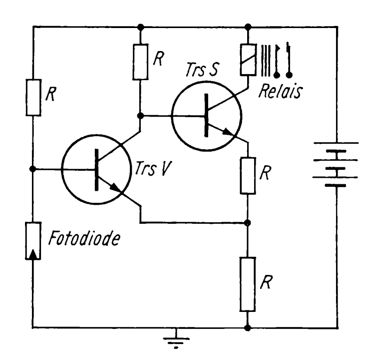


Bild 4.42. Relaisschaltung mit Transistoren

Der Strom I_C des Arbeitspunktes L reicht gerade aus, das an die Kollektorelektrode des Schalttransistors angeschlossene Relais anzuziehen. Eine Schwächung oder Unterbrechung des Lichtstrahles führt zur Abnahme des Kollektorstromes. Dabei fällt das Relais ab, und es wird ein technischer Prozeß (z. B. ein Alarmzeichen) ausgelöst.
Berechnen Sie die optimalen Werte des Ausgangswiderstandes bei Verwendung des mittelschnellen Schalttransistors SF 128. Wie groß ist die aufgenommene Leistung?
Welche Schaltleistung wird aufgebracht, wenn der Wicklungswiderstand $R_L = 80\,\Omega$ beträgt und der Arbeitspunkt L durch $I_C = 400$ mA, $U_{CE} = 0{,}5$ V festgelegt ist?

Lösung

Für den npn-Transistor SF 128 entnimmt man Tabellenbüchern über Transistoren die folgenden Angaben:
Die zulässige Höchstspannung in der Emitterschaltung beträgt $U_{CEO} = 60$ V, der zulässige

Höchststrom $\bar{I}_C = 500$ mA. Als zulässige Höchstleistung des Transistors werden $P_{VO} = 600$ mW angegeben (vgl. Tabelle 8b und Bild 4.43). Der Reststrom beträgt $I_{CO} = 0{,}1$ mA, die Restspannung $U_{CER} = 0{,}5$ V.

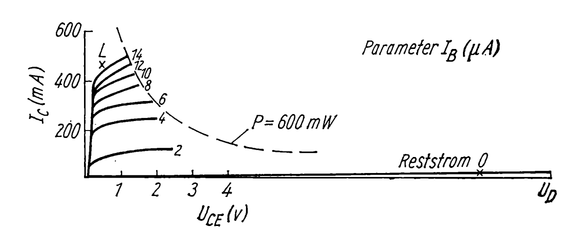


Bild 4.43. Kennlinien und Arbeitspunkte eines Schalttransistors

Der größtmögliche Wert des Ausgangswiderstandes (Innenwiderstandes) im Falle des ausgeschalteten Stromkreises ist somit gleich

$$R_{iO} = \frac{U_{CEO}}{I_{CO}} \text{ (Sperrwiderstand).} \tag{1}$$

Für den Ausgangswiderstand bei eingeschaltetem Stromkreis folgt als kleinstmöglicher Wert

$$R_{iL} = \frac{U_{CER}}{\bar{I}_C} \text{ (Durchlaßwiderstand).} \tag{2}$$

Die aufgenommene Leistung für den Sperrzustand O ergibt sich aus

$$P_O = U_{CEO} I_{CO}. \tag{3}$$

Im offenen Zustand L nimmt der Transistor die Leistung

$$P_L = U_{CER} \bar{I}_C \tag{4}$$

auf.
Mit den vorgegebenen Zahlen folgt als Sperrwiderstand

$$R_{iO} = \frac{60}{0{,}1 \cdot 10^{-3}}\ \Omega = 600\ \text{k}\Omega,$$

als Durchlaßwiderstand

$$R_{iL} = \frac{0{,}5}{500 \cdot 10^{-3}}\ \Omega = 1\ \Omega.$$

Die aufgenommenen Leistungen im gesperrten und im offenen Zustand sind nach (3) und (4)

$$P_O = 60 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-3}\ \text{W} = 6\ \text{mW},$$

$$P_L = 0{,}5 \cdot 500 \cdot 10^{-3}\ \text{W} = 250\ \text{mW}.$$

Als Schaltleistung definiert man die Leistung P_N, die vom Nutzwiderstand R_L während der Durchlaßschaltung aufgenommen wird, d. h., während der Zustand L geschaltet ist. Dafür erhalten wir

$$P_N = R_L I_C^2. \tag{5}$$

Bei dem vorgegebenen Arbeitspunkt ergibt sich aus (5)

$$P_N = 80 \cdot (400 \cdot 10^{-3})^2 \text{ W} = 12{,}8 \text{ W}.$$

4.5.7.* Zweistufiger Vorverstärker mit RC-Kopplung

Für den zweistufigen Vorverstärker nach Bild 4.44 wird eine Ausgangswechselspannung $U_{2\,\mathrm{eff}} = 1{,}0$ V gefordert. Als Verstärker dient für beide Stufen der npn-Transistor SC 207, dessen Kennlinien in Bild 4.39 dargestellt sind. Der Arbeitspunkt ist für beide Stufen an die Stelle $U_{CE} = 3$ V, $I_C = 1{,}0$ mA, $I_B = 28$ µA gelegt. Die Vierpolparameter des Transistors lauten in Emitterschaltung für den Arbeitspunkt

$$h_{11} = 2{,}3 \text{ k}\Omega, \qquad h_{12} = 3{,}8 \cdot 10^{-4}, \qquad h_{21} = 30, \qquad h_{22} = 48 \cdot 10^{-6} \Omega^{-1}.$$

Als Betriebsspannung wird eine Spannungsquelle mit $U_B \doteq 15$ V gewählt. Der Spannungsabfall an den Emitterwiderständen $R_{E1} = R_{E2} = R_E$ soll 0,4 V betragen. Die Spannungsteilerwiderstände sind durch $R_{II} = R_{II\,1} = R_{II\,2} = 10$ kΩ bestimmt.

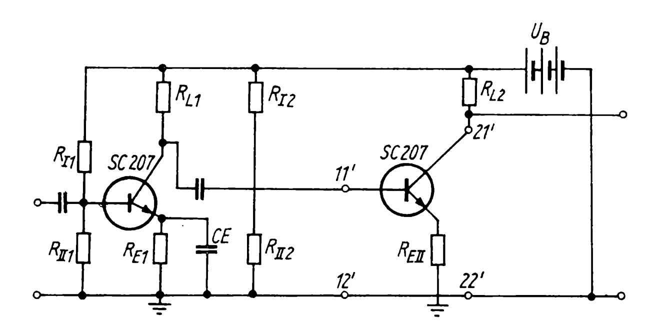


Bild 4.44. Zweistufiger Vorverstärker

Berechnen Sie die erforderliche Größe der Lastwiderstände, die Strom- und die Spannungsverstärkung sowie den Eingangswiderstand jeder einzelnen Verstärkerstufe. Wie groß ist die erforderliche Eingangsspannung? Welche Kapazitäten müssen die Kondensatoren haben, wenn gegenüber hohen Frequenzen für $\omega_g/2\pi = 50$ Hz als unterer Grenzfrequenz ein Stromabfall $1 : \sqrt{2}$ zugelassen wird?

Lösung

Geht man vom **zweiten Verstärkerkreis** aus und betrachtet die Spannung in der rechten Schleife des Bildes 4.44, so ergibt sich die Beziehung

$$-R_{E2} I_E - U_B + R_{L2} I_C + U_{CE} = 0. \tag{1}$$

Wir setzen genähert $I_E = -I_C$ und erhalten nach Umformung

$$R_{E2} + R_{L2} = \frac{U_B - U_{CE}}{I_C}. \tag{2}$$

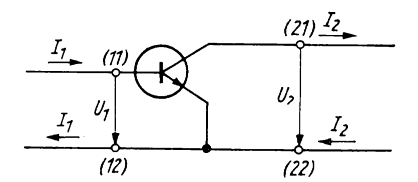
Mit den vorgegebenen Zahlen folgt

$$R_{E2} + R_{L2} = \frac{15 - 3}{10^{-3}} \Omega = 12\,\mathrm{k}\Omega.$$

Soll am Widerstand R_{E2} ein Spannungsabfall von $R_{E2}I_C = 0{,}4$ V erfolgen, so muß

$$R_{E2} = \frac{0{,}4}{10^{-3}} \Omega = 400\,\Omega$$

sein. Für den erforderlichen Lastwiderstand erhält man damit $R_{L2} = 11{,}6\,\mathrm{k}\Omega$.



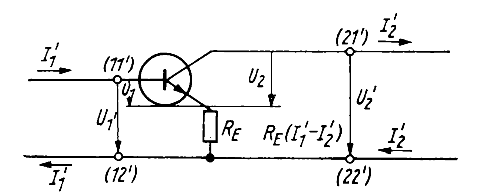


Bild 4.44a

In Bild 4.44a betrachten wir den Vierpol zwischen den Punkten *11'*, *12'* und *21'*, *22'*. Die Ausgangswechselgrößen des betrachteten Vierpols sind mit denen des Eingangs über den relativ niedrigen Widerstand R_{E2} gegengekoppelt. Bei der Berechnung dieser Kopplung können die parallel zu R_E geschalteten Widerstände R_{L2} und R_{I2} als unendlich groß angenommen werden, so daß über diese keine Kopplung zu berücksichtigen ist. Die auftretenden Spannungen sind beim Vorverstärker so klein, daß mit den **Vierpolparametern** gerechnet werden kann. Wir bezeichnen die Vierpolparameter für $R_{E2} = 0$ mit h_{ik}, dagegen für $R_{E2} \neq 0$ mit h'_{ik}:

$$U_{10} = h_{11}I_{10} + h_{12}U_{20}, \tag{3}$$

$$I_2 = h_{21}I_{10} + h_{22}U_{20}; \tag{4}$$

$$U'_{10} = h'_{11}I'_{10} + h'_{12}U'_{20}, \tag{5}$$

$$I'_{20} = h'_{21}I'_{10} + h'_{22}U'_{20}. \tag{6}$$

In Bild 4.44a ist der Transistorvierpol für $R_{E2} = 0$ durch die Punkte *11*, *12*; *21*, *22*, dagegen für $R_{E2} \neq 0$ durch *11'*, *12'*; *21'*, *22'* dargestellt.

Der Emitterwiderstand R_E wird sowohl von I_1' als auch von I_2' durchflossen. An ihm erfolgt der Spannungsabfall $R_{E2}(I'_{10} - I'_{20})$. Somit bestehen die Beziehungen

$$U'_{10} = U_{10} + R_{E2}(I'_{10} - I'_{20}), \tag{7}$$

$$U'_{20} = U_{20} + R_{E2}(I'_{10} - I'_{20}). \tag{8}$$

Die Ströme ändern sich nicht:

$$I'_{10} = I_{10}, \tag{9}$$

$$I'_{20} = I_{20}. \tag{10}$$

Wir lösen (8) nach U_{20} auf und setzen den sich ergebenden Ausdruck in (4) ein. Indem wir (9) und (10) berücksichtigen, erhalten wir

$$I_{20} = \frac{h_{21} - h_{22}R_{E2}}{1 + h_{22}R_{E2}} I_{10} + \frac{h_{22}}{1 + h_{22}R_{E2}} U_{20}. \tag{11}$$

Durch Vergleich der Koeffizienten in (11) und (6) folgt

$$h'_{21} = \frac{h_{21} - h_{22}R_{E2}}{1 + h_{22}R_{E2}}, \tag{12}$$

$$h'_{22} = \frac{h_{22}}{1 + h_{22}R_{E2}}. \tag{13}$$

Ebenso gelangt man mittels (3), (7), (9) und (10) zu

$$h'_{11} = h_{11} + \frac{(1 + h_{21})(1 - h_{12})}{1 + h_{22}R_{E2}} R_{E2}, \tag{14}$$

$$h'_{12} = \frac{h_{12} + h_{22}R_{E2}}{1 + h_{22}R_{E2}}. \tag{15}$$

In (12) bis (15) können wir in erster Näherung $h_{22}R_{E2} \ll 1$, $h_{12} \ll 1$, $h_{21} \gg 1$ setzen. Damit folgt genähert

$$\left.\begin{aligned} h'_{11} &= h_{11} + h_{21}R_{E2}, & h'_{12} &= h_{12} + h_{22}R_{E2}, \\ h'_{21} &= h_{21}, & h'_{22} &= h_{22}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Mit den vorgegebenen Werten erhalten wir

$$h'_{11} = (2{,}3 \cdot 10^3 + 30 \cdot 400)\,\Omega = 14{,}3\,\text{k}\Omega,$$

$$h'_{12} = 3{,}8 \cdot 10^{-4} + 4{,}8 \cdot 10^{-6} \cdot 400 = 19{,}6 \cdot 10^{-3},$$

$$h'_{21} = 30,$$

$$h'_{22} = 48 \cdot 10^{-6}\,\Omega^{-1}.$$

Damit folgt nach (4.5.4./4) für die Stromverstärkung

$$\frac{I'_{20}}{I'_{10}} = \frac{h'_{21}}{1 + h'_{22}R_{L2}}, \tag{17}$$

nach (4.5.4./5) für die Spannungsverstärkung

$$\frac{U'_{20}}{U'_{10}} = \frac{-h'_{21}R_{L2}}{R_{L2}\,\Delta h' + h'_{11}}, \tag{18}$$

nach (4.5.4./7) für den **Eingangswiderstand der zweiten Verstärkerstufe**

$$\mathfrak{R}_{12} = \frac{\Delta h' R_{L2} + h'_{11}}{1 + h'_{22}R_{L2}}. \tag{19}$$

Mit den vorliegenden Zahlen ergibt sich nach (4.5.4./6)

$$\Delta h' = 14{,}3 \cdot 10^3 \cdot 48 \cdot 10^{-6} - 19{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot 30 = 98{,}4 \cdot 10^{-3}.$$

Hieraus erhalten wir nach (17), (18) und (19)

$$\frac{I'_{20}}{I'_{10}} = 19{,}3, \quad \frac{U'_{20}}{U'_{10}} = -22{,}5, \quad \mathfrak{R}_{12} = 9{,}92\,\mathrm{k\Omega}.$$

Die **erste Verstärkerstufe** enthält parallel zum Emitterwiderstand R_{E1} die Emitterkapazität C_E. Sie wird derart gewählt, daß ihr elektrischer Widerstand dem Betrag nach klein gegen die reelle Größe R_{E1} ist. Der Emitterwiderstand ist damit praktisch durch die Emitterkapazität kurzgeschlossen.
Den wirksamen Lastwiderstand $\mathfrak{R}_{1L}$ des ersten Verstärkerkreises berechnen wir aus den parallelgeschalteten Widerständen R_{L1}, $\mathfrak{R}_{12}$, R_{II}. R_I ist so groß, daß sein Leitwert zu vernachlässigen ist. Es folgt

$$\frac{1}{\mathfrak{R}_{1L}} = \frac{1}{R_{L1}} + \frac{1}{\mathfrak{R}_{12}} + \frac{1}{R_{II}}, \tag{20}$$

mit den vorgegebenen Zahlen $\mathfrak{R}_{1L} = 3{,}5\,\mathrm{k\Omega}$.
Damit erhalten wir nach (4.5.4./4) und (4.5.4./5) für die Strom- und für die Spannungsverstärkung der ersten Verstärkerstufe

$$\frac{I'_{10}}{I_0} = \frac{h_{21}}{1 + h_{22}\mathfrak{R}_{1L}}, \tag{21}$$

$$\frac{U'_{10}}{U_0} = -\frac{h_{21}\mathfrak{R}_{1L}}{\mathfrak{R}_{1L}\,\Delta h + h_{11}}, \tag{22}$$

während nach (4.5.4./7) für den Eingangswiderstand der ersten Stufe

$$\mathfrak{R}_{11} = \frac{\Delta h\,\mathfrak{R}_{1L} + h_{11}}{1 + h_{22}\mathfrak{R}_{1L}} \tag{23}$$

folgt.
Die vorgegebenen Zahlen eingesetzt, liefert

$$\frac{I'_{10}}{I_0} = 25{,}7, \qquad \frac{U'_{10}}{U_0} = -39{,}6, \qquad \mathfrak{R}_{11} = 2{,}27\,\mathrm{k\Omega}.$$

Die gesamte Spannungsverstärkung durch beide Stufen ist somit gleich

$$\frac{U'_{20}}{U'_{10}} \cdot \frac{U'_{10}}{U_0} = 22{,}5 \cdot 39{,}6 = 891.$$

Um die Ausgangswechselspannung 1,0 V zu erzielen, muß die Eingangswechselspannung

$$U_{0\,\mathrm{eff}} = \frac{1{,}0}{891}\,\mathrm{V} = 1{,}12\ \mathrm{mV}$$

betragen.

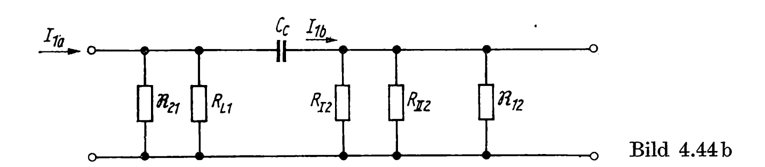


Bild 4.44b

Zur Bestimmung der Kapazität C_C zwischen den beiden Transistoren betrachten wir die Ersatzschaltung nach Bild 4.44b. Der Ausgangswiderstand $\Re_{21}$ der ersten Stufe hat im allgemeinen bei der Emitterschaltung einen Wert in der Größenordnung 100 kΩ (vgl. Tabelle 7). In Bild 4.44b kommt daher in der Parallelschaltung links des Kondensators C_C nur der Widerstand R_{L2} zur Wirkung. Rechts von C_C kann man sich auf R_{II} und den Eingangswiderstand $\Re_{12}$ des rechten Transistors beschränken. Es folgt

$$\frac{I_{1a}}{I_{1e}} = \frac{R_{L2} + \dfrac{1}{\mathrm{i}\omega C_C} + \left(\dfrac{1}{R_{II}} + \dfrac{1}{\Re_{12}}\right)^{-1}}{R_{L2}}. \tag{24}$$

Für das Verhältnis zwischen den Strömen am Eingang $\Re_{12}$ bei sehr hohen Frequenzen $\omega \to \infty$ und bei der Grenzfrequenz ω_g ergibt sich daraus

$$\frac{I_{1e\infty}}{I_{1eg}} = \frac{R_{L2} + \dfrac{1}{\mathrm{i}\,\omega C_C} + \left(\dfrac{1}{R_{II}} + \dfrac{1}{\Re_{12}}\right)^{-1}}{R_{L2} + \left(\dfrac{1}{R_{II}} + \dfrac{1}{\Re_{12}}\right)^{-1}}. \tag{25}$$

Hieraus folgt als erforderliche Kapazität, wenn die Grenzfrequenz $\omega_g/2\pi = 50$ Hz betragen soll,

$$C_C = \frac{1}{\omega_g\left(R_{L2} + \dfrac{R_{II}\Re_{12}}{R_{II} + \Re_{12}}\right)}. \tag{26}$$

Mit den vorgegebenen Zahlen erhalten wir

$$C_C = \frac{10^{-3}}{2\pi \cdot 50\left(11{,}6 + \dfrac{10 \cdot 9{,}92}{10 + 9{,}92}\right)}\,\mathrm{F} = 0{,}192 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}.$$

Der Kondensator C_E schließt bei richtiger Dimensionierung den Emitterwiderstand R_E kurz. Dieser braucht im Ersatzschaltbild zur Berechnung von C_E daher nicht berücksichtigt zu werden. Am Kondensator C_E tritt ein Spannungsabfall auf, der dem Betrage nach gleich

$$|\Delta U| = \frac{|I_E|}{\omega C_E} \tag{27}$$

ist. Dieser wirkt durch die Gegenkopplung auf den Eingangskreis. Hier fließt der Basisstrom I_B, den wir genähert aus dem Emitterstrom über die Kurzschlußstromverstärkung $\beta = h_{21}$ bestimmen:

$$|\Delta U| = \frac{h_{21}}{\omega C_E} |I_B|. \tag{28}$$

Bei der Berechnung der Rückwirkung auf den Eingangskreis ist die Emitterkapazität daher nur mit C_E/h_{21} einzusetzen.

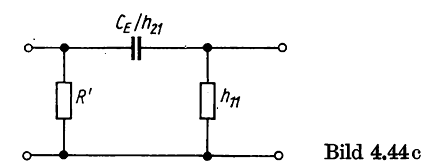


Bild 4.44c

Von den im Eingangskreis vorhandenen Widerständen berücksichtigen wir den Eingangswiderstand $\mathfrak{R}_{11}$, den wir gleich seinem Kurzschlußwert h_{11} annehmen. Alle anderen Widerstände werden in einem zusammenfassenden Widerstand R' aufgenommen. Es ergibt sich damit das Ersatzschaltbild nach Bild 4.44c. Aus diesem folgt analog (26) für die erforderliche Kondensatorkapazität

$$C_E = \frac{h_{21}}{\omega_g(R' + h_{11})}. \tag{29}$$

Bei festgelegtem C_E wird die untere Grenzfrequenz ω_g am größten für $R' = 0$. Dieser Fall stellt die ungünstigste Möglichkeit dar. Man errechnet daher C_E am einfachsten aus

$$(C_E)_{R'=0} = \frac{h_{21}}{\omega_g h_{11}}. \tag{30}$$

Diese Kapazität gewährleistet mindestens bis ω_g herab eine einwandfreie Funktion des Verstärkers.
Mit den vorgegebenen Zahlen erhalten wir $C_E = 41{,}5\ \mu\text{F}$.

4.5.8.* Gegentakt-*B*-Verstärker

Um eine große Leistungsverstärkung bei kleiner Verzerrung zu erzielen, werden die Endstufen von NF-Transistorverstärkern als Gegentakt-B-Verstärker nach Bild 4.45 aufgebaut.
Die Spannungen sind durch Vorverstärker auf so große Werte gebracht worden, daß mit den **Kennlinien** gearbeitet werden muß.
Nach der Lage des Arbeitspunktes im Eingangskennlinienfeld $I_B(U_{BE})$ unterscheidet man zwischen A- und B-Verstärkern.
Bei den A-Verstärkern fließt im Ruhezustand, d. h., wenn keine Signalspannung anliegt, ein schwacher Eingangsstrom (Basisruhestrom). Zwischen der Basis- und der Emitterelektrode liegt eine hinreichend große Spannung (Größenordnung 0,01 ··· 1 V), so daß eine Aussteuerung sowohl nach positiven als auch nach negativen Werten der Signalspannung möglich ist.
Dagegen liegt bei B-Verstärkern der Arbeitspunkt so, daß der Transistor nur nach einer Seite ausgesteuert werden kann (z. B. für $U_1 > 0$ beim npn-Transistor). Signalspannungen in der Gegenrichtung führen am pn-Übergang zwischen Basis und Emitter zu Spannungen in Sperrrichtung und damit zur Sperrung des Transistors.

Beim Gegentakt-B-Verstärker führt der Übertrager Ü$_1$ das Eingangssignal U_1 den beiden Transistoreingängen mit der Phasenverschiebung π zu. Von den Transistoren arbeitet immer nur einer, während der zweite gesperrt ist. Ein Wechsel im Arbeitstakt erfolgt jeweils während des Übergangs von der positiven zur negativen Halbwelle des Steuersignals U_1, da im Transistor nur für eine Spannungsrichtung zwischen Basis und Emitter ein Kollektorstrom fließt.

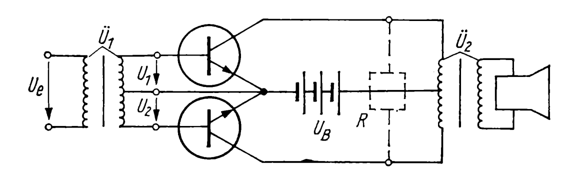


Bild 4.45. Endstufe eines Transistorverstärkers (Gegentakt-B-Verstärker)

Nach ihrer Verstärkung durch die Transistoren werden die beiden Halbwellen wieder zusammen gefaßt. Bild 4.46 veranschaulicht die Vorgänge. Zur Realisierung der Gegentakt-B-Verstärkung legt man den Arbeitspunkt A des Ruhezustandes (keine Signalspannung) in beiden Transistoren auf einen sehr kleinen Kollektorstrom $I_C = I_{CA}$ (vgl. Bild 4.47).

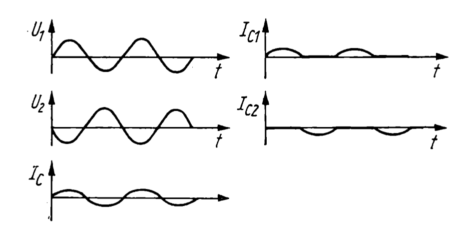


Bild 4.46. Spannungen und Ströme bei der Gegentakt-Verstärkung

Der Spannungsabfall in den Spulenwicklungen kann im allgemeinen vernachlässigt werden. An den Elektroden liegt praktisch die gesamte Batteriespannung:

$$U_B = U_{CE1} = U_{CE2} = U_{CE}.$$

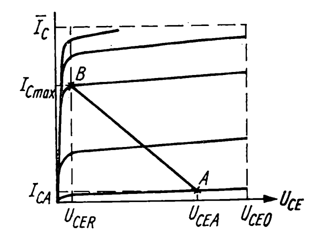


Bild 4.47. Kennlinien für die Gegentakt-B-Verstärkung
A Arbeitspunkt des Ruhezustandes, AB Arbeitsgerade

In der Gegentaktschaltung nach Bild 4.45 wird für die Leistungsverstärkung der npn-Transistor SF 127 verwendet. Als zulässige Höchstwerte werden für diesen Transistor angegeben (vgl. Tabelle 8b, S. 267): maximale Spannung $U_{CEO} = 40$ V, maximaler Strom $\bar{I}_C = 500$ mA.
Die vom Transistor in Wärme umgesetzte Leistung darf nicht größer als $P_{V0} = 0{,}6$ W sein.
Geben Sie die erforderliche Mindestgröße des Arbeitswiderstandes an, wenn die Batteriespannung $U_B = 20$ V beträgt.
Wie groß ist die von der Gegentaktstufe abgegebene Wechselstromleistung bei vollständiger Aussteuerung, wenn der Arbeitswiderstand $R = 80\,\Omega$ beträgt? Wie groß ist der Wirkungsgrad?
Die Restspannung des Transistors ist gleich $U_{CER} = 0{,}3$ V. Der Arbeitspunkt für den Ruhestrom liegt bei $I_{CA} = 5$ mA; $U_{CEA} = U_B = 20$ V.

Lösung

Nach Bild 4.47 werden die Kollektorspannung vom Arbeitspunktwert $U_{CEA} = U_B$ bis zur Restspannung U_{CER}, der Kollektorstrom I_C vom Arbeitspunktwert I_{CA} bis zum maximalen Wert $I_{C\max}$ variiert. $I_{C\max}$ muß kleiner als die maximal zulässige Stromstärke $\bar{I}_C$ sein, wenn der Transistor gebrauchsfertig bleiben soll.
Bezeichnen U_{0CE} und I_{0C} die Amplituden der Wechselgrößen, so definiert man

$$m = \frac{U_{0CE}}{U_B - U_{CER}} = \frac{I_{0C}}{I_{C\max} - I_{CA}} \tag{1}$$

als Grad der Aussteuerung. Maximale Aussteuerung ist durch $m = 1$ gekennzeichnet.
Die von der Schaltung abgegebene **Wechselstromleistung** beträgt

$$2P = \frac{U_{0CE} - I_{0C}}{2} = m^2 \frac{(U_B - U_{CER})^2}{2R}, \tag{2}$$

wobei

$$R = \frac{U_{0CE}}{I_{0C}} \tag{3}$$

den Arbeitswiderstand des Kollektorkreises angibt.
Der Mittelwert der Kollektorwechselspannung ist gleich $2I_{0C}/\pi$. Für die von der Batterie abgegebene Leistung folgt damit, abgesehen von der durch den kleinen Ruhestrom verursachten Leistung,

$$2P_B = \frac{2I_{0C}}{\pi} U_B = \frac{2m}{\pi} (I_{C\max} - I_{CA})\, U_B. \tag{4}$$

Die von einem der beiden Transistoren in Wärme umgesetzte Verlustleistung P_V ist gleich

$$P_V = P_B - P = \frac{m}{\pi} (I_{C\max} - I_{CA})\, U_B - m^2 \frac{(U_B - U_{CER})^2}{4R}. \tag{5}$$

Wir bestimmen das Maximum P_{V0} der Verlustleistung. Es ergibt sich aus

$$\frac{dP_V}{dm} = 0. \tag{6}$$

Man erhält

$$(m)_{P_{V0}} = \frac{2}{\pi} \frac{U_B}{U_B - U_{CER}}. \tag{7}$$

Diese Größe setzen wir in (5) ein und berücksichtigen (3) und (1). Damit folgt

$$P_{VO} = \frac{U_B{}^2}{\pi^2 R}. \tag{8}$$

Ist die maximal zulässige Verlustleistung vorgegeben, so kann man mittels (8) den Mindestwert des Arbeitswiderstandes bestimmen:

$$R \geqq R_{min} = \frac{U_B}{\pi^2 P_{VO}}. \tag{9}$$

Für den maximalen Kollektorstrom ergibt sich bei bekanntem R aus (1) in Verbindung mit (3)

$$I_{C\,max} = I_{CA} + \frac{U_B - U_{CER}}{R}. \tag{10}$$

Der Wirkungsgrad der Schaltung gibt das Verhältnis zwischen der Wechselstromleistung und der gesamten von der Batterie abgegebenen Leistung an. Nach (2) und (4) folgt

$$\eta = \frac{P}{P_B} = \frac{\pi}{4} m \frac{U_B - U_{CER}}{U_B}. \tag{11}$$

Mit den vorliegenden Zahlen ergibt sich aus (9) als Mindestwert des Arbeitswiderstandes

$$R_{min} = \frac{20^2}{\pi^2 \cdot 0{,}6}\,\Omega = 67{,}6\,\Omega.$$

Im betrachteten Fall ist der Arbeitswiderstand $R = 80\,\Omega$. Wir setzen diese Größe in (10) ein und erhalten

$$I_{C\,max} = 0{,}005\text{ A} + \frac{20 - 0{,}3}{80}\text{ A} = 226\text{ mA}.$$

Der Strom liegt also unter dem zulässigen Höchstwert $\bar{I}_C = 0{,}5$ A. Für die Strom- und für die Spannungsamplitude folgt bei maximaler Aussteuerung $m = 1$ aus (1)

$$I_{0C} = m(I_{C\,max} - I_{CA}) = 221\text{ mA},$$
$$U_{0CE} = m(U_B - U_{CER}) = 19{,}7\text{ V}.$$

Für die von der Gegentaktstufe übertragene Wechselstromleistung ergibt sich nach (2) im Falle $m = 1$

$$2P = \frac{19{,}7^2}{2 \cdot 80}\text{ W} = 2{,}43\text{ W}.$$

Der Wirkungsgrad wird für $m = 1$

$$\eta = \frac{\pi}{4}\,\frac{19{,}7}{20} = 0{,}774.$$



Aufgaben

A 4.5.1. Ein Transistor in Basisschaltung arbeitet bei $U_{EB} = 0{,}3$ V, $U_{BC} = 4{,}5$ V. Welche Spannungen sind in der Emitterschaltung und in der Kollektorschaltung anzubringen, wenn die gleichen Ströme wie bei der Basisschaltung fließen sollen?

A 4.5.2. Der Transistor SF 216 hat in Emitterschaltung die Kurzschlußstromverstärkung 224 ··· 560. Berechnen Sie den Wertebereich der Kurzschlußstromverstärkung für die Basisschaltung.

A 4.5.3. Der Transistor SC 108 habe in Emitterschaltung den Eingangswiderstand $\mathfrak{R}_{1E} = 1{,}5\,\mathrm{k\Omega}$. Wie groß ist der Eingangswiderstand in der Basisschaltung? Die Kurzschlußstromverstärkung in Emitterschaltung ist gleich $\beta = 22$.

A 4.5.4. Für den Eingangswiderstand in Emitterschaltung wird bei Verwendung des Schalttransistors SS 101 die Größe $\mathfrak{R}_{1E} = 0{,}7\,\mathrm{k\Omega}$ gemessen. In der Basisschaltung wird der Eingangswiderstand $\mathfrak{R}_{1B} = 50\,\Omega$ festgestellt. Bestimmen Sie die Kurzschlußstromverstärkung für alle drei Grundschaltungen.

A 4.5.5. Bestimmen Sie aus den Vierpolparametern nach Tabelle 8 die Stromverstärkung für den Transistor SF 122 in Emitterschaltung, wenn der Nutzwiderstand $\mathfrak{R}_L = 10\,\mathrm{k\Omega}$ beträgt.

A 4.5.6. Berechnen Sie zur vorangegangenen Aufgabe den Eingangswiderstand.

A 4.5.7. Stellen Sie die Formel für den Ausgangswiderstand $\mathfrak{R}_2 = U_2/I_2$ des Transistors auf, wenn der Eingang mit dem Widerstand $\mathfrak{R}_G$ (Innenwiderstand der Signalquelle) versehen ist.

A 4.5.8.* Stellen Sie die Bedingungsgleichung für optimale Leistungsanpassung auf und berechnen Sie die optimale Leistungsübersetzung.

A 4.5.9.* Leiten Sie auf Grund der physikalischen Eigenschaften die h-Parameter für die Basis- und für die Kollektorschaltung aus denen der Emitterschaltung ab.

A 4.5.10. Bestimmen Sie zu Aufgabe A 4.5.5. die Stromverstärkungen in der Basis- und in der Kollektorschaltung.

A 4.5.11. Bestimmen Sie aus den Kennlinien des Bildes 4.39 die Kurzschlußstromverstärkung β des Transistors SC 207 für $U_{CE} = 4$ V, $I_C = 4$ mA.

A 4.5.12. Der Transistor SC 207 ist auf den Arbeitspunkt $U_{CE} = 4$ V, $I_C = 4$ mA eingestellt und wird ausgangsseitig mit dem Lastwiderstand $\mathfrak{R}_L = 1{,}5\,\mathrm{k\Omega}$ abgeschlossen. Bestimmen Sie die anzulegende Batteriespannung.

A 4.5.13. Bestimmen Sie für den Arbeitspunkt $I_C = 3$ mA, $U_{CE} = 4$ V des Transistors SC 207 im Grenzfall der Stromsteuerung die Größen I_B, I_E, U_{BE}, U_{CB} (vgl. Bild 4.39).

A 4.5.14.* Der Transistor SC 207 soll durch einen Vorwiderstand nach Bild 4.48 auf die folgenden Arbeitswerte eingestellt werden: $I_C = 4{,}2$ mA, $I_B = 70\,\mu$A, $U_{CE} = 5$ V. Der Nutzwiderstand beträgt $\mathfrak{R}_L = 1\,\mathrm{k\Omega}$. Bestimmen Sie die anzulegende Spannung U_B und den Vorwiderstand R_V (Kennlinien nach Bild 4.39).

A 4.5.15.* Berechnen Sie zur vorangegangenen Aufgabe die Leistungsverstärkung.

A 4.5.16. Mit einem Spannungsteiler soll für den Transistor SC 207 der Arbeitspunkt $I_C = 1{,}5$ mA, $U_{CE} = 2$ V, $I_B = 50\,\mu$A eingestellt werden. Der Lastwiderstand

beträgt $R_L = 0{,}8\,\text{k}\Omega$, die Summe der Ströme I_I und I_{II} soll das Fünffache des Basisstromes betragen. Bestimmen Sie die erforderliche Batteriespannung U_B sowie die Widerstände R_I und R_{II}.

A 4.5.17. Für den Schalttransistor SS 101 beträgt die höchstzulässige Spannung $U_{CEO} = 33\,\text{V}$, der Reststrom $I_{CO} = 2\,\mu\text{A}$. Der maximal zulässige Strom ist bei der Temperatur 125 °C gleich $\bar{I}_C = 200\,\text{mA}$, die Restspannung $U_{CER} = 1\,\text{V}$. Berechnen Sie den Durchlaß- und den Sperrwiderstand, wenn die angegebenen Werte die beiden Arbeitspunkte im Schaltbetrieb bestimmen.

A 4.5.18. Berechnen Sie für den Schalttransistor SS 101 die Schaltleistung, wenn ein Nutzwiderstand von 200 Ω angeschlossen ist. Wie groß sind die aufgenommenen Leistungen im gesperrten und im offenen Zustand? Die Arbeitspunkte seien durch $I_{CL} = 150\,\text{mA}$, $U_{CEL} = 1\,\text{V}$, $I_{CO} = 10\,\text{A}$, $U_{CEO} = 12\,\text{V}$ festgelegt.

A 4.5.19. In der Verstärkerschaltung nach Bild 4.44 soll die untere Grenzfrequenz $16^2/_3$ Hz betragen. Die Widerstände sind gleich $\mathfrak{R}_{L2} = 20\,\text{k}\Omega$, $\mathfrak{R}_{12} = 5\,\text{k}\Omega$, $R_{II2} = 2\,\text{k}\Omega$. Wie groß muß die Kopplungskapazität sein?

A 4.5.20. Der Arbeitswiderstand eines Leistungsverstärkers beträgt $R = 50\,\text{k}\Omega$. Die Verlustleistung darf 0,2 W nicht übersteigen. Welche Bedingung ergibt sich daraus für den Arbeitspunkt?

A 4.5.21.* Stellen Sie die Formel für die Einstellung des Arbeitspunktes bei einem Transistor mit Vorwiderstand auf, wenn der Widerstand R_E zwischen der Emitterelektrode und Masse berücksichtigt wird. Schaltung nach Bild 4.48.

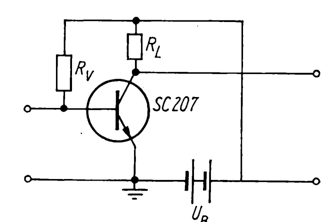


Bild 4.48. Arbeitspunkteinstellung durch Vorwiderstand

A 4.5.22.* Stellen Sie unter der gleichen Voraussetzung wie in der vorangegangenen Aufgabe die Formel für das Verhältnis der Spannungsteilerwiderstände auf, wenn die Arbeitspunkteinstellung nach Bild 4.41 erfolgt.

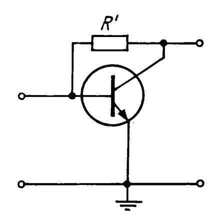


Bild 4.49. Verstärkerschaltung

A 4.5.23.* Ein Transistor befindet sich in der Gegenkopplungsschaltung nach Bild 4.49. Bestimmen Sie die Vierpolparameter dieser Schaltung, wenn die Vierpolparameter des Transistors bekannt sind.

5. Hochfrequente Wechselfelder

5.1. Das elektromagnetische Feld elektrischer und magnetischer Dipole

E Einführung

Bei den rasch veränderlichen elektromagnetischen Feldern der drahtlosen Übertragungstechnik sind die Voraussetzungen für die quasistationäre Rechnung nicht erfüllt. Man muß die ungekürzten MAXWELLschen Gleichungen (1.4./1) bis (1.4./4)

$$\dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{J} = \operatorname{rot} \mathfrak{H}, \tag{1}$$

$$\dot{\mathfrak{B}} = -\operatorname{rot} \mathfrak{E}, \tag{2}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho, \tag{3}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0 \tag{4}$$

verwenden. In einem einheitlichen Medium bestehen nach (1.4./5) bis (1.4./7) die linearen Beziehungen

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}, \tag{5}$$

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}, \tag{6}$$

$$\mathfrak{J} = \gamma \mathfrak{E}. \tag{7}$$

Drückt man $\mathfrak{H}$ durch $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ durch $\mathfrak{E}$ aus, so ergeben sich anstelle von (1) und (3) die beiden Gleichungen

$$\varepsilon\mu \dot{\mathfrak{E}} + \mu \mathfrak{J} = \operatorname{rot} \mathfrak{B}, \tag{1a}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon}. \tag{3a}$$

Die Gleichung (4) wird wie in 3. durch Einführung des **Vektorpotentials** $\mathfrak{A}$ befriedigt:

$$\mathfrak{B} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}. \tag{8}$$

Setzt man diesen Ansatz in (2) ein, so folgt

$$\operatorname{rot}(\mathfrak{E} + \dot{\mathfrak{A}}) = 0. \tag{9}$$

Das Verschwinden der Rotation eines Vektorfeldes bedeutet, daß dieses sich als Gradient eines skalaren Potentials $-\Phi$ darstellen läßt. Daraus ergibt sich

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\Phi - \dot{\mathfrak{A}}. \tag{10}$$

(8) und (10) können in (1a) eingesetzt werden. Man erhält (vgl. 1.3. A 6.)

$$-\varepsilon\mu\,(\operatorname{grad}\dot{\Phi} + \ddot{\mathfrak{A}}) + \mu\mathfrak{J} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{A} = -\triangle\mathfrak{A} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{A}. \tag{11}$$

Diese Gleichung wird stets dann erfüllt, wenn die beiden Gleichungen

$$\boxed{\triangle\mathfrak{A} - \varepsilon\mu\ddot{\mathfrak{A}} + \mu\mathfrak{J} = 0} \tag{12}$$

und

$$\operatorname{div}\mathfrak{A} + \varepsilon\mu\dot{\Phi} = 0 \tag{13}$$

befriedigt werden. Berücksichtigt man in (3a) die Beziehung (10), so folgt

$$\triangle\Phi + \operatorname{div}\dot{\mathfrak{A}} + \frac{\varrho}{\varepsilon} = 0. \tag{14}$$

Aus (14) ergibt sich mittels (13)

$$\boxed{\triangle\Phi - \varepsilon\mu\ddot{\Phi} + \varrho\varepsilon = 0}\,. \tag{15}$$

Das skalare Potential Φ und das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ genügen nach (12) und (15) Differentialgleichungen der gleichen Form. Mit der Erfüllung dieser Gleichungen durch Φ und $\mathfrak{A}$ ist die Erfüllung der MAXWELLschen Gleichungen gewährleistet.
Die Lösungen der Gleichungen (12) und (15) können durch die **retardierten Potentiale**

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint \frac{\varrho(\xi, \eta, \zeta, \tau)}{r}\,\mathrm{d}V \tag{16}$$

$$\mathfrak{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint \frac{\mathfrak{J}(\xi, \eta, \zeta, \tau)}{r}\,\mathrm{d}V \tag{17}$$

mit

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta$$

dargestellt werden. Ladungs- und Stromdichte am Ort (ξ, η, ζ) sind bei der Integration nicht mit ihren Werten zur Zeit t, für die $\mathfrak{A}$ und Φ bestimmt werden sollen, sondern einem früheren Zeitpunkt

$$\tau = t - \frac{r}{c} \tag{18}$$

einzusetzen. Die Differenz

$$t - \tau = \sqrt{\varepsilon\mu}\, r$$

entspricht der Zeit, die für die Ausbreitung der Welle vom Integrations- zum Aufpunkt erforderlich ist. Der Ausdruck

$$c = \frac{c_0}{n} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

gibt die Phasengeschwindigkeit der Welle an, die Größe

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2} \tag{19}$$

bezeichnet die Entfernung zwischen Integrations- und Aufpunkt; n ist die Brechzahl des Mediums.

Ein kleiner Körper wird als **Strom- oder Leiterelement** bezeichnet, wenn die Stromdichte in jedem seiner Punkte gleich ist. Für ein Stromelement $I\,\mathrm{d}\mathfrak{h}$ kann der Abstand seiner einzelnen Punkte vom Aufpunkt konstant gleich r gesetzt werden. Das Stromelement im Punkt $P_0(\xi, \eta, \zeta)$ erzeugt also nach (17) im Aufpunkt $P(x, y, z)$ das Vektorpotential

$$\mathrm{d}\mathfrak{A} = \mathrm{d}\mathfrak{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I(\xi, \eta, \zeta, \tau)}{r_{PP_0}}\, \mathrm{d}\mathfrak{h}. \tag{20}$$

Das von einem beliebigen ausgedehnten Körper mit bekannter Stromverteilung ausgestrahlte Feld läßt sich genähert berechnen, indem man die von den einzelnen Stromelementen ausgehenden Felder unabhängig voneinander bestimmt und vektoriell addiert. Im folgenden werden zeitlich periodisch veränderliche Felder der Form $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ betrachtet.

Ein Leiterstück der Länge h, auf dem näherungsweise die elektrische Stromdichte als räumlich konstant angesehen werden kann, sich jedoch mit der Zeit t verändert, wird als **Elementardipol** bezeichnet. Die Länge h des Dipols muß klein gegen die Wellenlänge λ sein, wenn die Voraussetzung räumlicher Konstanz der Stromdichte erfüllt sein soll:

$$h \ll \lambda = \frac{nc}{f} = \frac{2\pi nc}{\omega}\,. \tag{21}$$

Anschaulich kann man sich einen Elementardipol als kurze Stabantenne vorstellen, die oben und unten in einen nach außen hin abgeschirmten Schwingkreis eingeschaltet ist (vgl. Bild 5.1). Strahlung erfolgt nur durch die kurze Antenne. Infolge der hin- und herfließenden Wechselströme tragen die abgeschirmten Bauelemente des Dipols die Ladung $\pm Q$, wobei $Q = Q(t)$ eine Funktion der Zeit ist. Das elektrische Moment des Elementardipols ist durch

$$\mathfrak{m} = Q\mathfrak{h} \tag{22}$$

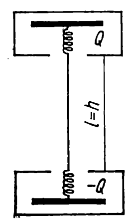


Bild 5.1. Modell des strahlenden Dipols

bestimmt. Andererseits hängen die elektrische Ladung Q des Dipols, die in ihm vorhandene Stromstärke I und sein elektrisches Moment $\mathfrak{m} = Q\mathfrak{h}$ bzw. $d\mathfrak{m} = Q\,d\mathfrak{h}$ durch die Formeln

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = I(t), \quad \frac{\partial \mathfrak{m}(t)}{\partial t} = I(t)\mathfrak{h} \tag{23}$$

zusammen. Daraus folgt in Verbindung mit (20) für das Vektorpotential des Elementardipols

$$\mathfrak{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu}{4\pi r} \frac{\partial \mathfrak{m}\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{nr}{c}\right)}{\partial t}. \tag{24}$$

Die Größe

$$\mathfrak{Z}(x, y, z,) \, t = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\mathfrak{m}\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{nr}{c}\right)}{r} \tag{25}$$

wird als elektrischer **Hertzscher Vektor** des vom elektrischen **Dipol** erzeugten elektromagnetischen Feldes bezeichnet. Der HERTZsche Vektor $\mathfrak{Z}$ ist **orts- und zeitabhängig.** Mit dem Vektorpotential $\mathfrak{A}$ ist er durch die Formel

$$\boxed{\mathfrak{A} = \varepsilon\mu \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}} \tag{26}$$

verknüpft. Dieser Zusammenhang wird **allgemein** als Definition für den HERTZschen Vektor eines elektromagnetischen Feldes benutzt.
Aus (26) und (12) ergibt sich für $\mathfrak{Z}$ im **stromfreien Raum** die Differentialgleichung

$$\varepsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} (\triangle \mathfrak{Z} - \varepsilon\mu \ddot{\mathfrak{Z}}) = 0.$$

Sie wird erfüllt, wenn $\mathfrak{Z}$ der **Wellengleichung**

$$\boxed{\triangle \mathfrak{Z} - \varepsilon\mu \ddot{\mathfrak{Z}} = 0} \tag{27}$$

genügt. Wie aus (12) und (15) folgt, erfüllen im strom- und ladungsfreien Raum auch das skalare Potential Φ und das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ die Wellengleichung.
Das skalare Potential Φ ergibt sich nach (26) und (13) aus dem HERTZschen Vektor $\mathfrak{Z}$ gemäß

$$\Phi = -\text{div}\,\mathfrak{Z}. \tag{28}$$

Für die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ erhält man damit nach (10)

$$\mathfrak{E} = -\text{grad div}\,\mathfrak{Z} - \varepsilon\mu\ddot{\mathfrak{Z}}. \tag{29a}$$

Auf Grund der Beziehung grad div $\mathfrak{Z} = \triangle\mathfrak{Z} + \text{rot rot}\,\mathfrak{Z}$ folgt daraus mittels (27)

$$\boxed{\mathfrak{E} = \text{rot rot}\,\mathfrak{Z}}\,. \tag{29}$$

Für die magnetische Flußdichte $\mathfrak{B}$ ergibt sich nach (8)

$$\boxed{\mathfrak{B} = \varepsilon\mu\,\text{rot}\,\dot{\mathfrak{Z}}.} \tag{30}$$

Wie man aus den MAXWELLschen Gleichungen (1) bis (4) herleiten kann, genügen auch die elektromagnetischen Feldgrößen im strom- und ladungsfreien Raum der Wellengleichung. Für die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ verläuft der Beweis über die Gültigkeit der Wellengleichung in der folgenden Weise:

Differenziert man die MAXWELLsche Gleichung (1) nach der Zeit und wendet auf (2) die Operation rot an, so entsteht für $\mathfrak{J} = 0$

$$\varepsilon\ddot{\mathfrak{E}} = \text{rot}\,\dot{\mathfrak{H}}, \qquad \mu\,\text{rot}\,\dot{\mathfrak{H}} = -\text{rot rot}\,\mathfrak{E}.$$

Hieraus erhält man

$$\varepsilon\mu\ddot{\mathfrak{E}} = -\text{rot rot}\,\mathfrak{E} = \triangle\mathfrak{E} - \text{grad div}\,\mathfrak{E}.$$

Im homogenen ladungsfreien Raum gilt nach (3)

$$\text{div}\,\mathfrak{E} = 0.$$

Damit verbleibt die Wellengleichung

$$\triangle\mathfrak{E} - \varepsilon\mu\ddot{\mathfrak{E}} = 0.$$

Für periodisch veränderliche Felder geht (27) in die **zeitfreie Wellengleichung**

$$\boxed{\triangle\mathfrak{Z} + \varepsilon\mu\omega^2\mathfrak{Z} = 0} \tag{31}$$

über. Der Zeitfaktor $e^{-i\omega t}$ kürzt sich heraus.
Berücksichtigt man in (31)

$$\varepsilon\mu = \frac{n^2}{c_0^2}, \tag{32}$$

so entsteht

$$\triangle \mathfrak{Z} + k^2 \mathfrak{Z} = 0, \tag{33}$$

wobei

$$k = \frac{n\omega}{c_0} = \frac{2\pi n}{\lambda_0} \tag{34}$$

die **Wellenzahl,** λ_0 die Vakuumwellenlänge bedeuten.

Aus dem magnetischen Moment $\mathfrak{m}_\mathrm{m}$ einer Stromschleife definiert man den **magnetischen Hertzschen Vektor**

$$\boxed{\mathfrak{Z}_\mathrm{m} = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\mathfrak{m}_\mathrm{m}(\xi, \eta, \zeta, \tau)}{r}}\,. \tag{35}$$

Für das von der Stromschleife ausgehende Feld ergeben sich die Formeln

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathfrak{Z}_\mathrm{m}, \\ \mathfrak{H} &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{Z}_\mathrm{m} \end{aligned} \tag{36}$$

(vgl. 5.1.8.).



Probleme

5.1.1. Hertzscher Dipol (Elementardipol)

Ein elektrischer Dipol befindet sich in großer Höhe über der Erde. Er wird von einem Strom mit der effektiven Stärke $I_\mathrm{eff} = 0{,}1$ A und der Frequenz $f = 10^8$ Hz durchflossen. Die Länge des Dipols beträgt $h = 15$ cm. Bestimmen Sie das Strahlungsfeld in großer Entfernung vom Dipol. Untersuchen Sie die Richtcharakteristik und berechnen Sie die ausgestrahlte Leistung. Wie groß ist der Strahlungswiderstand des Dipols?

Lösung

Wir wählen den Antennenmittelpunkt als Anfangspunkt des Koordinatensystems. Die z-Achse legen wir in Richtung der Antennenachse. Der Hertzsche Vektor ist nach (5.1./25) und (5.1./27) bis auf eine Konstante dem Dipolstrom, d. h. der z-Achse parallelgerichtet (vgl. Bild 5.2). Die Konstante kann gleich Null gesetzt werden. Wir erhalten damit für den Hertzschen Vektor $\mathfrak{Z} = (0, 0, \mathfrak{Z}_z)$.
Es ist zweckmäßig, Kugelkoordinaten r, ϑ, φ einzuführen. Die Antennenachse bezeichnet die Richtung $\vartheta = 0$. Nach (1.2./12) erhalten wir für die Komponenten des Hertzschen Vektors in Kugelkoordinaten

$$\mathfrak{Z}_r = \mathfrak{Z}_z \cos\vartheta, \qquad \mathfrak{Z}_\vartheta = -\mathfrak{Z}_z \sin\vartheta, \qquad \mathfrak{Z}_\varphi = 0. \tag{1}$$

$\mathfrak{Z}_z$ ist nach (5.1./25) außer von der Zeit t von der Aufpunktkoordinate r abhängig, dagegen von ϑ und φ unabhängig. Nach (1.3./7b) folgt damit

$$\operatorname{rot}_r \mathfrak{Z} = \operatorname{rot}_\vartheta \mathfrak{Z} = 0, \qquad \operatorname{rot}_\varphi \mathfrak{Z} = -\sin\vartheta \frac{\partial \mathfrak{Z}_z}{\partial r}. \tag{2}$$

Des weiteren liefert (1.3./20)

$$\operatorname{div} \mathfrak{Z} = \cos\vartheta \frac{\partial \mathfrak{Z}_z}{\partial r}, \tag{3}$$

ferner (1.2./13)

$$\operatorname{grad}_r \operatorname{div} \mathfrak{Z} = \cos\vartheta \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_z}{\partial r^2}, \quad \operatorname{grad}_\vartheta \operatorname{div} \mathfrak{Z} = -\frac{\sin\vartheta}{r} \frac{\partial \mathfrak{Z}_z}{\partial r}, \quad \operatorname{grad}_\varphi \operatorname{div} \mathfrak{Z} = 0. \tag{4}$$

Hieraus erhalten wir nach (5.1./28) und (5.1./29), wenn wir $\mathrm{B} = \mu\mathfrak{H}$ berücksichtigen,

$$\mathfrak{H}_r = 0, \qquad \mathfrak{H}_\vartheta = 0, \qquad \mathfrak{E}_\varphi = 0, \tag{5}$$

d. h., nur für $\mathfrak{H}_\varphi$, $\mathfrak{E}_r$, $\mathfrak{E}_\vartheta$ ergeben sich Werte ungleich Null.
Wir führen das elektrische Moment $\mathfrak{m}$ des Dipols ein. Es hängt nur von der Zeit ab. Bei der Berechnung der Feldgrößen sind retardierte Potentiale zu verwenden, so daß $\mathfrak{m}$ in der funktionellen Abhängigkeit

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}\left(t - \frac{nr}{c_0}\right) \tag{6}$$

erscheint. Mit dem HERTZschen Vektor ist es durch (5.1./25) verknüpft. Nach (5.1./29) und (5.1./30) erhalten wir für $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_z \mathfrak{k}$

$$\mathfrak{H}_\varphi = -\frac{1}{4\pi} \frac{\sin\vartheta}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \dot{\mathfrak{m}}_z - \frac{1}{r} \dot{\mathfrak{m}}_z\right), \tag{7}$$

$$\mathfrak{E}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\cos\vartheta}{r} \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{m}_z}{\partial r^2} - \varepsilon\mu\ddot{\mathfrak{m}}_z - \frac{2}{r}\frac{\partial \mathfrak{m}_z}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\mathfrak{m}_z\right), \tag{8}$$

$$\mathfrak{E}_\vartheta = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\sin\vartheta}{r} \left(\varepsilon\mu\ddot{\mathfrak{m}}_z - \frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{m}_z}{\partial r} + \frac{\mathfrak{m}_z}{r}\right). \tag{9}$$

Zwischen der Ableitung nach der Zeit t und der Ableitung nach dem Abstand r besteht die Verknüpfung

$$\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial r} = -\frac{n}{c} \frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t} = -\sqrt{\varepsilon\mu} \frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t}. \tag{6a}$$

In (8) heben sich daher der erste und der zweite Summand heraus. Wir beschränken uns auf das Fernfeld $r \gg \lambda$ und berücksichtigen in (7) bis (9) nur Glieder der Ordnung $1/r$, während Glieder höherer Ordnung in $1/r$ vernachlässigt werden. Für die Feldkomponente $\mathfrak{E}_r$ folgt damit aus (8)

$$\mathfrak{E}_r = 0. \tag{10}$$

Die anderen beiden Komponenten erhalten wir aus (7) und (9):

$$\mathfrak{H}_\varphi = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{4\pi} \frac{\sin\vartheta}{r} \ddot{\mathfrak{m}}_z \left(t - \frac{nr}{c}\right), \tag{11}$$

$$\mathfrak{E}_\vartheta = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\sin\vartheta}{r} \ddot{\mathfrak{m}}_z \left(t - \frac{nr}{c}\right). \tag{12}$$

Das magnetische Feld hat somit für $r \gg \lambda$ die Richtung der Breiten-, das elektrische Feld die Richtung der Längenkreise um den Dipol (vgl. Bild 5.2). Zwischen dem magnetischen und dem

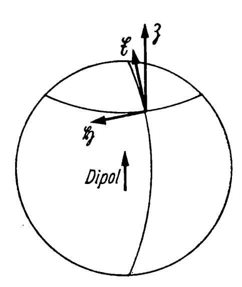


Bild 5.2. Lage der Vektoren eines Elementardipols

elektrischen Feld besteht keine Phasenverschiebung. Als Verhältnis der elektrischen zur magnetischen Feldstärke ergibt sich

$$\boxed{\frac{\mathfrak{E}_\vartheta}{\mathfrak{H}_\varphi} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z.} \tag{13}$$

In der Dipolachse, d. h. für $\vartheta = 0$, verschwinden die Glieder des Fernfeldes. Dagegen ist hier $\mathfrak{E}_r$ nach (8) ungleich Null. Dieses Glied nimmt proportional $1/r^2$ ab; es entstammt dem dritten und vierten Summanden in (8). Diese nur in der Achse merkliche Einwirkung des Nahfeldes nimmt mit zunehmender Entfernung sehr rasch ab.
Die größte Feldstärke wird in der Richtung senkrecht zum Dipol $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ gemessen. Für periodische Ströme

$$I = I_0 \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

besteht nach (5.1./23) der Zusammenhang

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{m}}{\partial t^2} = \frac{\partial I}{\partial t} \mathfrak{h} = -\mathrm{i}\omega I_0 \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \mathfrak{h}.$$

Damit folgt für die elektrische Feldstärke

$$\mathfrak{E}_\vartheta = -\frac{\mathrm{i}\omega\mu \sin\vartheta}{4\pi r} I_0 \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\left(t - \frac{nr}{c}\right)} h = -\frac{\mathrm{i}Z}{2} \frac{I_0 h}{\lambda} \frac{\sin\vartheta}{r} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - kr)}, \tag{14}$$

für die magnetische Feldstärke

$$\mathfrak{H}_\varphi \frac{-\mathrm{i}\sqrt{\varepsilon\mu}\,\omega I_0 h \sin\vartheta\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - kr)}}{4\pi r} = -\mathrm{i}\,\frac{I_0 h}{2\lambda}\,\frac{\sin\vartheta}{r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - kr)}, \tag{15}$$

für die Effektivwerte

$$(\mathfrak{E}_\vartheta)_{\mathrm{eff}} = \frac{\mu\omega}{4\pi}\,\frac{\sin\vartheta}{r}\,I_{\mathrm{eff}}h = \frac{Z}{2}\,\frac{h}{\lambda}\,\frac{\sin\vartheta}{r}\,I_{\mathrm{eff}}, \tag{16}$$

$$(\mathfrak{H}_\varphi)_{\mathrm{eff}} = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}\,\omega}{4\pi}\,\frac{\sin\vartheta}{r}\,I_{\mathrm{eff}}h = \frac{1}{2}\,\frac{h}{\lambda}\,\frac{\sin\vartheta}{r}\,I_{\mathrm{eff}}. \tag{17}$$

Da $\mathfrak{H}_\varphi$ und $\mathfrak{E}_\vartheta$ von φ unabhängig sind, ist die Feldstärke in der Horizontalebene $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, d. h. in der Ebene senkrecht zur Dipolachse, richtungsunabhängig: Die **Horizontalcharakteristik** ist ein Kreis. Der Elementardipol zeigt in der Horizontalebene keine Richtwirkung. Dagegen ist in jeder den Dipol enthaltenden Vertikalebene die Feldstärke proportional $\sin\vartheta$, also richtungsabhängig. Trägt man den zur vorgegebenen Richtung ϑ gehörenden Effektivwert der Feldstärke über dem Winkel auf, so entsteht die **Vertikalcharakteristik** nach Bild 5.3. Die abgestrahlte

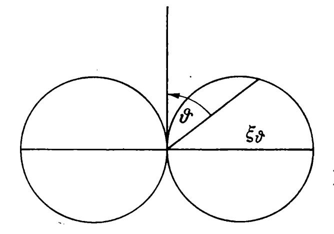


Bild 5.3. Vertikalcharakteristik eines Dipols

Leistung ergibt sich durch Integration über die Kugelfläche:

$$P = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\mathfrak{H}_\varphi)_{\mathrm{eff}}\,(\mathfrak{E}_\vartheta)_{\mathrm{eff}}\,r^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi. \tag{18}$$

Wir setzen (16) und (17) in (18) ein und erhalten

$$P = \frac{Z}{4}\,\frac{h^2}{\lambda^2}\,I_{\mathrm{eff}}^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^3\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi. \tag{19}$$

Das innere Integral hat den Wert 4/3; das äußere ist gleich 2π. Somit folgt

$$\boxed{P = \frac{2}{3}\,\pi Z\,\frac{h^2}{\lambda^2}\,I_{\mathrm{eff}}^2 = R_{\mathrm{s}} I_{\mathrm{eff}}^2}\,. \tag{20}$$

Die Größe

$$\boxed{R_s = \frac{2}{3}\pi Z \frac{h^2}{\lambda^2}} \tag{21}$$

wird als **Strahlungswiderstand des ungeerdeten Elementardipols** bezeichnet.

Für die Ausbreitung in Luft oder Vakuum ist $Z = Z_0 = 120\pi\,\Omega$. Somit ergibt sich mit den vorgegebenen Zahlen

$$P = \frac{2}{3}\pi \cdot 120\pi \left(\frac{0{,}15}{3}\right)^2 0{,}1^2\,\text{W} = 20\,\text{mW}, \qquad R_s = 2{,}0\,\Omega.$$

5.1.2. Vertikalantenne auf leitender Erde

Eine Stabantenne ist senkrecht in die Höhe geführt. Die Dicke des Antennenstabes und der Abstand seines Fußpunktes vom Erdboden sind gegen die Stablänge $l = h = 15$ cm zu vernachlässigen. Bestimmen Sie die elektrische Feldstärke auf dem Erdboden im Abstand 1 km, wenn die Strahlungsleistung $P = 20$ W beträgt. Die Wellenlänge ist gleich $\lambda = 3{,}00$ m.

Lösung

Wir setzen die Erde als idealleitend voraus. Die elektrischen Feldlinien müssen überall senkrecht auf die Erdoberfläche treffen. Das wird gewährleistet, wenn wir die Antenne mit ihren Ladungen an der Erdoberfläche spiegeln. Anstelle des Dipols im freien Raum mit der Länge h haben wir also einen Dipol der Länge $2h$ zu betrachten. Dem nach oben gerichteten negativen Ladungsstrom entspricht spiegelbildlich ein nach unten gerichteter positiver Ladungsstrom. Er kann ebenfalls als ein nach oben gerichteter negativer Strom aufgefaßt werden. Die Stromstärke ist also einschließlich des Vorzeichens oben und unten gleich. Das Feld eines vertikal auf die Erdoberfläche aufgesetzten Dipols entspricht hiernach dem Feld, das im freien Raum ein Dipol doppelter Länge in den oberen Halbraum ausstrahlt (vgl. Bild 5.4).

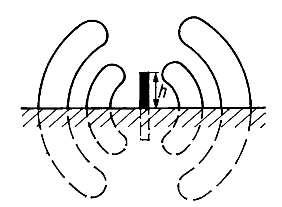


Bild 5.4. Elektrische Feldlinien eines geerdeten Dipols.
—————— Feldlinien des Dipols im freien Raum

Für die effektive elektrische Feldstärke folgt auf Grund dieser Anschauung gemäß (5.1.1./16)

$$(\mathfrak{E}_\vartheta)_{\text{eff}} = Z \frac{h}{\lambda} \frac{\sin\vartheta}{r} I_{\text{eff}}. \tag{1}$$

Das Verhältnis zwischen elektrischer und magnetischer Feldstärke ist wie beim Elementardipol gleich Z.

Bei der Berechnung der ausgestrahlten Leistung haben wir davon auszugehen, daß gegenüber

dem Elementardipol sowohl $(\mathfrak{E}_\vartheta)_{\text{eff}}$ als auch $(\mathfrak{H}_\varphi)_{\text{eff}}$ verdoppelt sind. Die Integration erstreckt sich jedoch nur über die Halbkugel, da in die idealleitende Erde kein Feld ausgestrahlt wird. Hierdurch ergibt sich der Faktor 1/2. Anstelle (5.1.1./20) erhalten wir damit für die Strahlungsleistung des geerdeten Dipols die

Rüdenbergsche Strahlungsformel $$P = \frac{4}{3}\pi Z \frac{h^2}{\lambda^2} I_{\text{eff}}^2. \tag{2}$$

Der **Strahlungswiderstand** des geerdeten Dipols wird

$$R_s = \frac{4}{3}\pi Z \frac{h^2}{\lambda^2}. \tag{3}$$

Setzt man für Z den Wellenwiderstand des Vakuums ein, so folgt

$$R_s = 160\pi^2 \frac{h^2}{\lambda^2}\,\Omega. \tag{4}$$

Einer Strahlungsleistung von 20 W entspricht im vorliegenden Fall die Stromstärke

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{3P}{4\pi Z_0}}\,\frac{\lambda}{h} = \sqrt{\frac{3\cdot 20}{4\pi\cdot 120\pi}}\,\frac{3{,}00}{0{,}15}\text{ A} = 2{,}25\text{ A}.$$

Diese ergibt an der Erdoberfläche $\vartheta = \pi/2$ im Abstand 1 km

$$(\mathfrak{E}_\vartheta)_{\text{eff}} = 120\pi\,\frac{0{,}15}{3{,}00}\,\frac{1}{10^3}\,2{,}25\text{ V m}^{-1} = 42\cdot 10^{-3}\text{ V m}^{-1}.$$

5.1.3. Reflektordipol

Zwei parallele, gleich lange Elementardipole (vgl. Bild 5.5) werden von Strömen gleicher Stärke durchflossen. Sie sind unter verschiedenen Phasen angeregt. Untersuchen Sie, wie groß der Abstand zwischen beiden Dipolen sein muß, damit sich ihre Strahlung in der einen Richtung maximal verstärkt, in der Gegenrichtung jedoch gerade aufhebt.

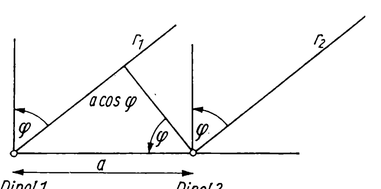


Bild 5.5. Parallele Dipole

Lösung

Wir gehen von der Gleichung (5.1.1./14) für die elektrische Feldkomponente $\mathfrak{E}_\vartheta$ aus. Die Konstanten fassen wir in der Größe E zusammen und schreiben

$$\mathfrak{E}_\vartheta = \frac{E \sin \vartheta}{r} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - kr)}. \tag{1}$$

Entsprechend der Aufgabenstellung beschränken wir uns auf die Horizontalebene $\vartheta = \pi/2$. Werden in (1) die Realteile gewählt, so erhält man für die von den beiden Dipolen ausgehenden Wellen

$$\mathfrak{E}_{\vartheta 1} = \frac{E_0}{r_1} \sin(\omega t - kr_1), \tag{2}$$

$$\mathfrak{E}_{\vartheta 2} = \frac{E_0}{r_2} \sin(\omega t - kr_2 + \psi). \tag{3}$$

E_0 bezeichnet eine reelle Konstante.
Bei der Berechnung des retardierten Feldes in einem weit entfernten Punkt können wir für beide Strahler mit dem gleichen Azimut φ rechnen. Es gilt daher

$$r_1 = r_2 + a \cos \varphi. \tag{4}$$

Im Nenner von (3) und (2) ist der Unterschied zwischen r_1 und r_2 vernachlässigbar. Hier rechnen wir daher mit $r_1 = r_2 = r$. Dagegen ist die Differenz $r_1 - r_2 = a \cos \varphi$ im Zähler bei den Phasen von Bedeutung. Für das resultierende Feld der überlagerten Wellen ergibt sich dementsprechend

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_\vartheta &= \frac{E_0}{r} [\sin(\omega t - kr_1) + \sin(\omega t - kr_2 + \psi)] \\ &= \frac{2E_0}{r} \cos\left(\frac{ka}{2} \cos \varphi + \frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\omega t - kr + \frac{\psi}{2}\right).\end{aligned} \tag{5}$$

Wie wir hieraus entnehmen, ist die Amplitude der resultierenden Schwingung richtungsabhängig. Soll für eine Richtung φ_1 maximale Verstärkung, für die Gegenrichtung jedoch Auslöschung erfolgen, so müssen nach (5) die beiden Gleichungen

$$\frac{ka}{2} \cos \varphi_1 + \frac{\psi}{2} = 0 \pmod{\pi}, \qquad -\frac{ka}{2} \cos \varphi_1 + \frac{\psi}{2} = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \tag{6}$$

erfüllt sein. Als Lösung dieses Gleichungssystems folgt

$$\psi = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}, \qquad ka \cos \varphi_1 = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}. \tag{7}$$

Ist $\varphi_1 = \pi$, so erhält man aus (7)

$$\psi = \frac{\pi}{2}, \qquad a = \frac{\lambda}{4}. \tag{8}$$

Wird von den beiden Dipolen im Abstand $a = \frac{\lambda}{4}$ nur einer an die Spannungsquelle angeschlossen, so erregt dieser durch seine Strahlung den zweiten. Dabei tritt gerade die Phasenverschiebung $\psi = ka = \pi/2$ auf. Ein im Abstand $\lambda/4$ hinter einem stromgespeisten Dipol angebrachter ungespeister Dipol wirkt daher als Reflektor.

5.1.4. Das Fernfeld einer langen Stabantenne (Halbwellendipol)

Bestimmen Sie das Fernfeld, das eine 20 cm lange Stabantenne unter der Wellenlänge $\lambda = 40$ cm aussendet. Die Antenne befindet sich hoch über dem Erdboden, so daß von hier keine Rückwirkung erfolgt. Welche Feldstärke wird in der Entfernung $r = 1$ km unter dem Winkel $\vartheta = 45°$ gegen die Stabachse gemessen, wenn die Ausgangsleistung $P = 1$ W beträgt?

Lösung

Die Antennenlänge ist nicht mehr klein gegen die Wellenlänge. Sie wird daher im folgenden mit l bezeichnet.
Wir zerlegen den Dipol in Elementardipole der Länge dz. Für das elektrische Feld, das von einem dieser Elementardipole ausgeht, erhalten wir nach (5.1.1./14)

$$\mathrm{d}\mathfrak{E}_\vartheta = \frac{-\mathrm{i} Z_0 I_0 \sin\vartheta}{2\lambda r}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - kr)}\, \mathrm{d}z. \tag{1}$$

Bezeichnet z den Abstand eines Antennenpunktes vom Antennenmittelpunkt (vgl. Bild 5.6), so gilt für die Weglänge vom Elementardipol dz zum Aufpunkt

$$r = r(z) = r_0 - z \cos\vartheta. \tag{2}$$

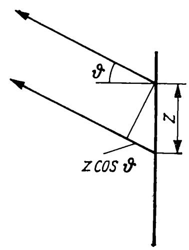


Bild 5.6. Stabantenne

Darin gibt r_0 die Entfernung vom Antennenmittelpunkt zum Aufpunkt an. Wir setzen (2) im Exponenten von (1) ein, während wir im Nenner mit $r = r_0$ rechnen. Durch Integration über die Antenne folgt

$$\mathfrak{E}_\vartheta = -\frac{\mathrm{i}\, Z_0 \sin\vartheta}{2\lambda r_0}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - kr_0)} \int\limits_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} I_0(z)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\, z\cos\vartheta}\, \mathrm{d}z. \tag{3}$$

Wir setzen auf der Antenne eine Stromverteilung der Form

$$I_0(z) = I_0 \cos kz \tag{4}$$

voraus. Bei dieser Stromverteilung hat die $\frac{\lambda}{2}$-Antenne an ihren beiden Enden Stromknoten. (3) kann damit aus

$$\int \cos kz \, \mathrm{e}^{-ikz\cos\vartheta} \, \mathrm{d}z = \frac{\mathrm{e}^{-ikz\cos\vartheta}}{k\sin^2\vartheta} (-\mathrm{i}\cos\vartheta\cos kz + \sin kz) + C. \tag{4a}$$

berechnet werden. Für den Effektivwert bei der Länge $l = \frac{\lambda}{2}$ folgt nach (1.1./28) aus (3), (4) und (4a)

$$\mathfrak{E}_{\text{eff}} = (\mathfrak{E}_\vartheta)_{\text{eff}} = \frac{Z_0 I_{\text{eff}}}{2\pi r_0 \sin\vartheta} \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\vartheta\right). \tag{5}$$

I_{eff} bedeutet die effektive Stromstärke im Antennenmittelpunkt. In der Richtung $\vartheta = \pi/2$ erhält man für die **effektive Feldstärke des ungeerdeten Halbwellendipols**

$$\boxed{\mathfrak{E}_{\text{eff}} = \frac{Z_0 I_{\text{eff}}}{2\pi r_0}}. \tag{6}$$

Die effektive magnetische Feldkomponente ist durch den Zusammenhang mit dem Wellenwiderstand gegeben (vgl. 5.1.1./13).
Als Strahlungsleistung ergibt sich

$$P = \oint\!\!\oint \mathfrak{S} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{A} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathfrak{E}_{\text{eff}}\mathfrak{H}_{\text{eff}} r_0^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{Z_0 I_{\text{eff}}^2}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\vartheta\right)\mathrm{d}\vartheta}{\sin\vartheta}. \tag{7}$$

Der Strahlungswiderstand ist auf Grund der Beziehung

$$P = R_S I_{\text{eff}}^2 \tag{8}$$

definiert. Er ist ebenfalls auf den Strom im Antennenmittelpunkt bezogen.
Die Auswertung des bestimmten Integrals (7) ist auf elementarem Wege nicht möglich. Man erhält

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\vartheta\right)}{\sin\vartheta} \mathrm{d}\vartheta = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos t}{t} \mathrm{d}t = 1{,}22\ldots$$

Daraus folgt als **Strahlungswiderstand des ungeerdeten Halbwellendipols**

$$\boxed{R_S = \frac{Z_0}{2\pi} \int\limits_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\vartheta\right)}{\sin\vartheta}\,d\vartheta = 73{,}2\,\Omega}\,. \tag{9}$$

Drückt man I_{eff} nach (8) durch die Strahlungsleistung P aus, so folgt für die Feldstärke in Richtung maximaler Strahlung

$$(\mathfrak{E}_\vartheta)_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{P}{R_S}}\,\frac{Z_0}{2\pi r}\,. \tag{6a}$$

Mit den vorgegebenen Zahlen ergibt sich nach (8)

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{P}{R_S}} = \sqrt{\frac{1}{73{,}2}}\,\text{A} = 117\,\text{mA}.$$

Die elektrische Feldstärke wird somit nach (5) in der Entfernung 1 km unter dem Winkel $\vartheta = 45°$ gleich

$$(\mathfrak{E}_\vartheta)_{\text{eff}} = \frac{120\pi \cdot 0{,}117}{2\pi \cdot 10^3 \cdot 0{,}707} \cos(0{,}707 \cdot 90°)\,\text{V m}^{-1} = 4{,}4 \cdot 10^{-3}\,\text{V m}^{-1}.$$

5.1.5. Dipolzeile

Vier gleichphasig erregte Halbwellendipole sind in einer Dipolzeile nach Bild 5.7 angeordnet. Der Mittelpunktsabstand a zweier benachbarter Dipole ist geringfügig größer als die halbe Wellenlänge, so daß man zwar mit $a = \frac{\lambda}{2}$ rechnen kann, jedoch kein Kontakt besteht. Stellen Sie die Formel für die elektrische Feldstärke im Fernfeld auf und vergleichen Sie die Richtcharakteristik mit der des Elementardipols. Wie groß ist die Leistungsdämpfung gegenüber dem Maximum für eine Strahlung, die unter dem Winkel 10° gegen die Horizontalebene (d. h. für $\vartheta = 80°$) beobachtet wird?

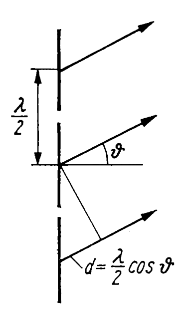


Bild 5.7. Dipolzeile

Lösung

Wir betrachten eine Dipolzeile aus n Halbwellendipolen, die wir von unten nach oben mit $\nu = 1$ bis $\nu = n$ numerieren. Die Phasendifferenz, die ein vom ν-ten Dipol ausgehender Strahl gegen den entsprechenden Strahl des ersten Dipols im Fernfeld hat, ist gleich

$$\nu kd = \nu \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2} \cos\vartheta = \nu\pi\cos\vartheta. \tag{1}$$

Für die Stärke des vom ν-ten Dipol ausgehenden elektrischen Feldes erhält man daraus nach (5.1.4./3) und (5.1.4./6)

$$\mathfrak{E}_\vartheta{}^\nu = \frac{Z_0 I_0 \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\vartheta\right)}{2\pi r \sin\vartheta} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - \nu\pi\cos\vartheta)}. \tag{2}$$

Die resultierende Feldstärke ergibt sich durch Summierung über sämtliche Dipole. Wir erhalten für den Effektivwert durch Mittelwertbildung

$$(\mathfrak{E}_\vartheta)_{\mathrm{eff}} = \frac{Z_0 I_{\mathrm{eff}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\vartheta\right)}{2\pi r \sin\vartheta} \left| \sum_{n-1}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\pi\cos\vartheta} \right|. \tag{3}$$

In (3) errechnen wir den Absolutwert der Summe gemäß

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n=1} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\cos\vartheta})^\nu \right| = \left| \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi n\cos\vartheta}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\cos\vartheta}} \right| = \sqrt{\frac{(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi n\cos\vartheta})(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi n\cos\vartheta})}{(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi n\cos\vartheta})(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\cos\vartheta})}}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\cos\vartheta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\vartheta\right)}. \tag{4}$$

Hieraus ergibt sich für das resultierende Feld

$$(\mathfrak{E}_\vartheta)_{\mathrm{eff}} = \frac{Z_0 I_{\mathrm{eff}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\vartheta\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\cos\vartheta\right)}{2\pi r \sin\vartheta \sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\vartheta\right)} = \frac{Z_0 I_{\mathrm{eff}}}{2\pi r} f(n,\vartheta). \tag{5}$$

Für $\vartheta = 0$ folgt nach der BERNOULLI—l'HOSPITALschen Regel aus (5) wie beim Elementardipol die Feldstärke Null. Dagegen erhält man für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$

$$\lim f(n,\vartheta) = n \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{\vartheta \to \frac{\pi}{2}} (\mathfrak{E}_\vartheta)_{\mathrm{eff}} = n \frac{Z_0 I_{\mathrm{eff}}}{2\pi r}, \tag{6}$$

d. h. den n-fachen Wert des Halbwellendipols. Die Feldstärke kann somit durch eine Zeile aus n Dipolen gegenüber dem einfachen Dipol auf das n-fache gesteigert werden.

Unter dem Winkel $\vartheta = 80°$, d. h. 10° gegen das Maximum, erhalten wir

$$\lg f(4, 80°) = \lg \frac{\cos(90° \cos 80°) \sin(360° \cos 80°)}{\sin 80° \sin(90° \cos 80°)} = \lg \frac{\cos 15{,}62° \sin 62{,}5}{\sin 80° \sin 15{,}62°}$$
$$= 0{,}5801.$$

Dagegen ergibt sich nach (6)

$$\log f(4, 90°) = \log 4 = 0{,}6021.$$

Für die Leistungsdämpfung b folgt daraus nach (4.2./14)

$$b = 10 \lg \frac{P(90°)}{P(80°)} \text{ dB} = 20 \lg \frac{\mathfrak{E}_\vartheta(90°)}{\mathfrak{E}_\vartheta(80°)} \text{ dB} = 20 \lg \frac{f(4, 90°)}{f(4, 80°)} \text{ dB},$$

d. h.

$$b = 20(0{,}6021 - 0{,}5081) \text{ dB} = 1{,}9 \text{ dB}.$$

Ein einzelner Halbwellendipol hat demgegenüber nach (5.1.4./8) unter $\vartheta = 80°$ die Leistungsdämpfung

$$b = 20 \lg \frac{\sin 80°}{\cos(90° \cos 80°)} \text{ dB} = 0{,}19 \text{ dB}.$$

Die Richtwirkung der Dipolzeile aus vier Dipolen ist also bedeutend besser als die des Halbwellendipols.

5.1.6. Dipolgruppe

Eine Dipolgruppe aus $m = 4$ parallel zueinander angeordneten Halbwellendipolen wird gleichphasig erregt. Der Abstand der Dipole voneinander beträgt $\lambda/2$. Untersuchen Sie die Richtcharakteristik. Wie groß ist die Leistungsdämpfung im Empfänger, wenn die Empfangsantenne aus der Richtung maximalen Empfangs um $\Delta\varphi = 10°$ verdreht wird?

Lösung

Wir wählen die Achsenrichtung der parallelen Dipole als z-Achse, die Verbindungsgerade zwischen den Dipolen als y-Achse (vgl. Bild 5.8). Der Aufpunkt habe die Kugelkoordinaten r, ϑ, φ. Koordinatenanfangspunkt ist der Mittelpunkt des ersten Dipols.
Für die Wegdifferenz zweier paralleler, von gleichwertigen Punkten auf benachbarten Antennen ausgehenden Strahlen ergibt sich

$$d = r - \sqrt{r^2 \sin^2\vartheta \cos^2\varphi + \left(r \sin\vartheta \sin\varphi - \frac{\lambda}{2}\right)^2 + r^2 \cos^2\vartheta}$$
$$\approx r - \left(r - \frac{\lambda}{2} \sin\vartheta \sin\varphi\right) = \frac{\lambda}{2} \sin\vartheta \sin\varphi. \tag{1}$$

Die Phasendifferenz zwischen zwei derartigen Strahlen beträgt

$$kd = \pi \sin\vartheta \sin\varphi. \tag{2}$$

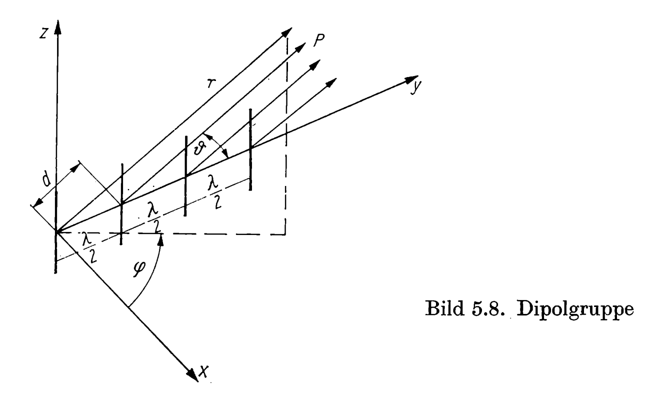


Bild 5.8. Dipolgruppe

In gleicher Weise wie bei der Dipolzeile folgt daraus für das effektive Feld (vgl. 5.1.5./5)

$$(\mathfrak{E}_\vartheta)_{\text{eff}} = \frac{Z_0 I_{\text{eff}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\vartheta\right)\sin\left(\frac{m\pi}{2}\sin\vartheta\sin\varphi\right)}{\sin\vartheta\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin\vartheta\sin\varphi\right)} \tag{3}$$

Durch die Dipolgruppe erfolgt somit eine Richtwirkung auch in der Horizontalebene. Für $\varphi = 0$ ergibt sich aus (3) durch Grenzübergang

$$\lim_{\varphi\to 0} g(\vartheta,\varphi) = \lim_{\varphi\to 0} \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{2}\sin\vartheta\sin\varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin\vartheta\sin\varphi\right)} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{\frac{m\pi}{2}\sin\vartheta\cdot\varphi}{\frac{\pi}{2}\sin\vartheta\cdot\varphi} = m.$$

Wie aus (3) folgt, strahlt die betrachtete Dipolgruppe am stärksten in Richtung der x-Achse und entgegengesetzt dazu, d. h. in die Richtungen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$. Es erfolgt jedoch auch eine relativ starke Strahlung in die Richtung $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Für die Leistungsdämpfung der Strahlung in Richtung $\varphi = 10°$, $\vartheta = 90°$ erhalten wir relativ zum Maximum im Falle $m = 4$

$$b = 20 \lg \frac{4 \sin(90° \sin 10°)}{\sin(360° \sin 10°)} \,\text{dB} = 1{,}7\,\text{dB}.$$

Sie ist etwas geringer als bei der Dipolzeile.

5.1.7. Der Gewinn einer Dipolebene mit Reflektor

Es soll eine sowohl in der Vertikal- als auch in der Horizontalebene scharf gerichtete räumliche Strahlung erzeugt werden. Hierzu werden die Funktionen der Dipolzeile mit denen der Dipolgruppe kombiniert, indem $m = 4$ gleiche parallele Dipolzeilen mit je $n = 3$ Halbwellendipolen zu einer Dipolebene geschaltet werden. Der Querabstand der Dipolzeilen beträgt $\lambda/2$.

Um Strahlung nach nur einer Richtung zu gewährleisten, wird hinter der Dipolebene im Abstand $\lambda/4$ eine zweite Dipolebene angebracht, die nicht gesondert erregt wird.
Bestimmen Sie die Intensität und die Feldstärke der Strahlung im Vergleich zu einem einfachen Halbwellendipol.

Lösung

Die Dipolebene allein verknüpft die Wirkung von Dipolzeile und -gruppe. Es folgt daher nach (5.1.5./5) und (5.1.6./3)

$$(\mathfrak{E}_\vartheta)_{\text{eff}} = \frac{Z_0 I_{\text{eff}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\vartheta\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\cos\vartheta\right)}{2\pi r \sin\vartheta \sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\vartheta\right)} \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{2}\sin\vartheta\sin\varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin\vartheta\sin\varphi\right)}. \tag{1}$$

In der Richtung $\varphi = 0 \pmod{\pi}$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir durch Grenzübergang

$$(\mathfrak{E}_\vartheta)_{\text{eff}} = \frac{Z_0 I_{\text{eff}}}{2\pi r} mn. \tag{2}$$

Der **Gewinn** g gibt die Intensität in Richtung maximaler Strahlung, bezogen auf einen $\frac{\lambda}{2}$-Dipol an. Für die Dipolebene aus m gleichen parallelen Dipolzeilen mit je n Halbwellendipolen beträgt der Gewinn im Falle des Querabstandes $\lambda/2$ (vgl. 5.1.4./6)

$$g = (mn)^2. \tag{3}$$

Ohne Reflektor erhalten wir also im vorliegenden Fall

$$g = (4 \cdot 3)^2 = 144.$$

Durch die im Abstand $\lambda/4$ hinter der Dipolebene befindliche Reflektoranordnung wird nach 5.1.3. die Feldstärke in der einen Richtung verdoppelt, in der Gegenrichtung annulliert. Der Gewinn erhöht sich damit auf

$$\boxed{g_R = 4m^2n^2}, \tag{4}$$

mit den vorgegebenen Zahlen also auf 576.
Die Feldstärke erhöht sich um den Faktor $2mn = 24$.

5.1.8. Rahmenantenne

Eine kreisförmige Stromschleife hat den Durchmesser $2R = 20$ cm. Die effektive Stromstärke beträgt $I_{\text{eff}} = 5$ A, die Frequenz ist $f = 100$ MHz. Wie groß ist die Feldstärke in 10 km Entfernung? Berechnen Sie den Strahlungswiderstand und die Strahlungsleistung (vgl. Bild 5.9).

Lösung

Wir wählen den Mittelpunkt der Schleife als Koordinatenanfangspunkt, die Schleifenebene als x,y-Ebene. Der Aufpunkt, in dem sich die Empfangsantenne befindet, erhält die Cartesischen Koordinaten $x, 0, z$, die Kugelkoordinaten $r, \vartheta, 0$.

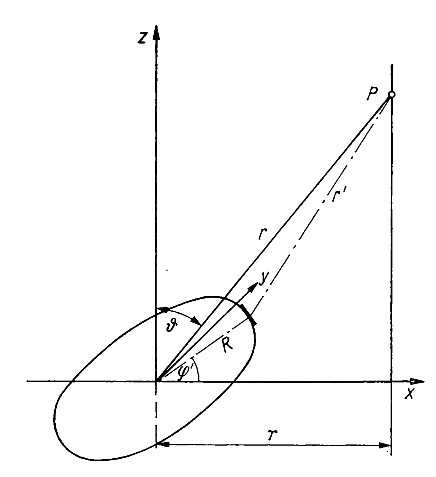


Bild 5.9. Zur Berechnung des Feldes einer Rahmenantenne

Benutzt man Kugelkoordinaten, so hat das Vektorpotential nur die Komponente

$$\mathfrak{A}_\varphi = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\omega\left(t - \frac{r'}{c}\right)}}{r'} R \cos\varphi' \, d\varphi'. \tag{1}$$

r' gibt den Abstand vom Integrations- zum Aufpunkt, φ' die Winkelkoordinate des Integrationspunktes an. Der Abstand r' folgt gemäß

$$r'^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\varphi' \sin\vartheta, \tag{2}$$

worin ϑ den Winkel zwischen dem Radiusvektor des Aufpunktes und der z-Achse bezeichnet. Im Falle $R \ll r$ können wir genähert

$$r' = r - R\cos\varphi' \sin\vartheta, \quad \frac{1}{r'} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{R}{r}\cos\varphi' \sin\vartheta\right) \tag{3}$$

schreiben. Damit folgt aus (1)

$$\mathfrak{A}_\varphi = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \frac{R}{r} e^{-i(\omega t - kr)} \int_0^{2\pi} e^{ikR\cos\varphi' \sin\vartheta} \cos\varphi' \, d\varphi'. \tag{4}$$

mit $k = \omega/c_0 = 2\pi/\lambda_0$ (Brechzahl $n = 1$).
Für das Integral ergibt sich unter der Voraussetzung $2\pi R \ll \lambda$

$$\int_0^{2\pi} (1 + ikR' \cos\varphi' \sin\vartheta) \cos\varphi' \, d\varphi' = i\,kR \sin\vartheta\pi. \tag{5}$$

Somit erhält man wegen

$$\mathfrak{A} = \varepsilon\mu \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} \tag{6}$$

für die Komponente $\mathfrak{Z}_\varphi$ des (elektrischen) HERTZschen Vektors

$$\mathfrak{Z}_\varphi = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{R^2 I_0 \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - kr)} \sin\vartheta}{4r}. \tag{7}$$

Die anderen Komponenten von $\mathfrak{Z}$ sind gleich Null. Aus $\mathfrak{Z}$ ergibt sich nach (5.1./29) und (5.1./30) das Fernfeld

$$\mathfrak{H}_\vartheta = -\frac{\pi^2 I_0 R^2}{\lambda^2} \frac{\sin\vartheta \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - kr)}}{r}, \tag{8}$$

$$\mathfrak{E}_r = \frac{\pi^2 I_0 R^2}{\lambda^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\sin\vartheta \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - kr)}}{r} = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \mathfrak{H}_\vartheta. \tag{9}$$

Wie man sich durch Nachrechnen überzeugt, gelangt man zu diesen Feldgrößen auch, wenn man nach (5.1./35) über das magnetische Moment der Stromschleife den magnetischen HERTZschen Vektor einführt und die Feldgrößen nach (5.1./36) und (5.1./37) berechnet.
Die Effektivwerte erhalten wir aus (9):

$$(\mathfrak{H}_\vartheta)_{\mathrm{eff}} = \frac{\pi^2 R^2}{\lambda^2} \frac{\sin\vartheta}{r} I_{\mathrm{eff}}, \quad (\mathfrak{E}_r)_{\mathrm{eff}} = Z_0 (\mathfrak{H}_\vartheta)_{\mathrm{eff}}. \tag{10}$$

Aus dem Vergleich mit (5.1.1./16) und (5.1.1./17) entnehmen wir: Setzt man in (10)

$$h = \frac{2\pi^2 R^2}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} A \quad (A \text{ Rahmenfläche}), \tag{11}$$

so stimmen sowohl die beiden elektrischen als auch die beiden magnetischen Komponenten überein. Bei der Rahmenantenne haben die magnetischen Feldlinien jedoch im Gegensatz zum Feld des elektrischen Dipols die Richtung der Längenkreise, während die elektrischen Feldlinien in Richtung der Breitenkreise verlaufen. $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ haben also ihre Rolle getauscht.
Bei kleinen Querschnittsabmessungen kann (11) auf beliebige Rahmenquerschnittflächen A erweitert werden. Zur Berechnung der Strahlungsleistung setzen wir (11) in (5.1.1./20) ein und erhalten

$$P = \frac{8\pi^5 Z_0 R^4}{3\lambda^4} I_{\mathrm{eff}}^2 \quad \text{bzw.} \quad P = \frac{8\pi^3}{3} \frac{Z_0}{\lambda^4} A^2 I_{\mathrm{eff}}^2. \tag{12}$$

Der Strahlungswiderstand der Rahmenantenne ist also

$$R_{\mathrm{S}} = \frac{8\pi^5 R^4}{3\lambda^4} Z_0 \quad \text{bzw.} \quad R_{\mathrm{S}} = \frac{8\pi A^2 Z_0}{3\lambda^4}. \tag{13}$$

Mit den vorgegebenen Zahlen folgt bei optimaler Ausrichtung

$$(\mathfrak{H}_\vartheta)_{\mathrm{eff}} = \frac{\pi^2 \cdot 0{,}1^2}{3^2} \frac{1}{10^4} \cdot 5 \text{ A m}^{-1} = 5{,}48 \cdot 10^{-6} \text{ A m}^{-1},$$

$$(\mathfrak{E}_r)_{\mathrm{eff}} = 120\pi \cdot 5{,}48 \cdot 10^{-6} \text{ V m}^{-1} = 2{,}07 \cdot 10^{-3} \text{ V m}^{-1}.$$

Für die Strahlungsleistung erhalten wir

$$P = \frac{8\pi^5 \cdot 120\pi \cdot 10^{-4}}{3 \cdot 3^4} \cdot 25\ \mathrm{W} = 9{,}49\ \mathrm{W}.$$

Der Strahlungswiderstand beträgt

$$R_S = 0{,}38\,\Omega.$$

Bei n Windungen vergrößern sich $\mathfrak{H}_\vartheta$ und $\mathfrak{E}_r$ um den Faktor n, P um den Faktor n^2.



Aufgaben

A 5.1.1. Wie groß ist der Strahlungswiderstand eines Dipols von 25 cm Länge, wenn eine Strahlung der Wellenlänge 2 m ausgesandt wird? Der Dipol befindet sich in großer Entfernung von der Erde.

A 5.1.2. Berechnen Sie die effektive Feldstärke in der Horizontalebene eines Dipols der Länge $h = 20$ cm; $I_{\mathrm{eff}} = 1$ A, $\lambda = 1{,}50$ m. Der Dipol befindet sich in großer Entfernung von der Erde, der Aufpunkt im Abstand 100 m vom Dipol.

A 5.1.3. Wie groß ist die effektive Stromstärke in einem Sender der Frequenz 500 kHz, der eine Strahlungsleistung von 0,15 W abgibt, wenn die Länge der Vertikalantenne 60 cm beträgt? Der Sender befindet sich in großer Entfernung von der Erde.

A 5.1.4. Welche Strahlungsleistung hat ein 20 m hoher Sender, der auf der Frequenz $f = 1{,}5$ MHz sendet und in dem ein Strom der Stärke $I_{\mathrm{eff}} = 20$ A fließt?

A 5.1.5. Bestimmen Sie das Feld einer Horizontalantenne, die unmittelbar über dem Erdboden angebracht ist.

A 5.1.6.* Stellen Sie die Formel auf für die elektrische Feldstärke eines Dipols der Länge $l = \lambda$ in der Entfernung r_0 unter dem Winkel ϑ gegen die Achse ($r_0 \gg \lambda$).

A 5.1.7.* Stellen Sie die Formel für die elektrische Feldstärke eines Dipols der Länge $l = n\,\dfrac{\lambda}{2}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) auf.

A 5.1.8.* Wie groß ist der Strahlungswiderstand einer auf die Erde aufgesetzten Vertikalantenne der Länge $l = \dfrac{\lambda}{4}$? Der Strom hat am Fußpunkt sein Maximum und sinkt an der Spitze nach einem Cosinusgesetz auf Null ab.

A 5.1.9.* Berechnen Sie den Strahlungswiderstand einer kurzen, auf die Erde aufgesetzten Vertikalantenne der Länge h. Der Strom hat an der Spitze die Stärke Null und nimmt zur Mitte hin linear zu.

A 5.1.10. Berechnen Sie die Leistungsdämpfung bei einer Dipolzeile aus 20 Halbwellendipolen (Abstand $\lambda/2$), wenn der Empfänger aus der Hauptstrahlungsrichtung in die Richtung $\vartheta = 89°$ gedreht wird.

A 5.1.11. Unter welchem Winkel ϑ gegen die Achse erfolgt bei einer Dipolzeile aus n Halbwellendipolen (Abstand $\lambda/2$) keine Strahlung? Untersuchen Sie speziell $n = 6$.

A 5.1.12. Geben Sie die Leistungsdämpfung einer Dipolebene aus 20 Zeilen und 20 Gruppen in der Richtung $\vartheta = 89°$, $\varphi = 1°$ an.

A 5.1.13. Ein geerdeter elektrischer Dipol mit dem Strahlungswiderstand $R_S = 8\,\Omega$ wird mit dem Strom $I_{\mathrm{eff}} = 0{,}3$ A gespeist. Welche elektrische und welche magnetische Feldstärke werden in 10 km Entfernung in der Horizontalebene $\vartheta = \pi/2$ gemessen?

A 5.1.14. Wie groß sind der Strahlungswiderstand und die Strahlungsleistung einer kreisförmigen Rahmenantenne mit dem Durchmesser $2R = 50$ cm, wenn diese mit dem Strom $I_{\text{eff}} = 4$ A gespeist wird? Die Frequenz beträgt $f = 20$ MHz.

A 5.1.15. Eine Antenne hat den Gewinn $g = 120$. Welche Verstärkung in dB tritt hierdurch gegenüber einem $\frac{\lambda}{2}$-Dipol ein? Wie groß sind die Spannungs- und die Leistungsverstärkung?

A 5.1.16. Eine Antenne hat den Gewinn $g = 120$. Mit ihr als Empfangsantenne wird die Feldstärke $\mathfrak{E}_{\text{eff}} = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ V m^{-1} gemessen. Bei Verwendung einer zweiten Antenne mißt man die Feldstärke $\mathfrak{E}_{\text{eff}} = 2{,}7 \cdot 10^{-3}$ V m^{-1}. Wie groß ist der Gewinn dieser Antenne?

5.2. Ausstrahlung und Empfang elektromagnetischer Wellen

E Einführung

Die Sendeanlage mit ihrer Sendeantenne und die Empfangsanlage mit ihrer Empfangsantenne bilden ein **Übertragungssystem.** Sende- und Empfangsantenne mit dem dazwischenliegenden Feld können als Vierpol aufgefaßt werden, an dem eingangsseitig der Sender, ausgangsseitig der Empfänger angeschlossen sind. Das von der Sendeantenne ausgestrahlte Feld erzeugt zwischen der Empfangsantenne und der Erde eine Wechselspannung, die auf der Antenne zu einem elektrischen Strom führt.
Grundlage für die physikalische Behandlung der Gesetzmäßigkeiten beim Empfang elektromagnetischer Wellen ist das **Reziprozitätstheorem.** Zu seiner Erklärung geht man von einem Sender am Ort S aus, der eine Sendeleistung P ausstrahlt. Hierdurch wird in der Empfangsantenne am Ort A die Spannung U_{A} induziert. Wird die gleiche Sendeleistung P am Ort A über die hier befindliche Antenne ausgestrahlt, so induziert diese in der Antenne bei S ebenfalls die Spannung U_{A}. Sender und Empfänger sind also zueinander reziprok: Sie können miteinander vertauscht werden, ohne daß sich in der Wechselwirkung zwischen beiden Orten etwas ändert.
Aus dem Reziprozitätstheorem folgt, daß der Gewinn g einer Antenne unabhängig davon ist, ob diese für die Ausstrahlung oder für den Empfang des Feldes verwendet wird.
Die von der Antenne ausgehenden Wellen werden durch die Absorption gedämpft. Hierdurch tritt gegenüber den in 5.1. für verlustfreie Wellenausbreitung abgeleiteten Formeln ein zusätzlicher Faktor

$$e^{-\beta r} \tag{1}$$

auf. Bei der **Bodenwelle,** die sich entlang der Erdoberfläche ausbreitet, hängt β im wesentlichen vom Boden und von der Frequenz ab. In erster Näherung kann man schreiben

$$\beta = \frac{B}{\sqrt{\lambda}}. \tag{2}$$

Mittlere Meßwerte für B bei verschiedenen Böden sind in Tabelle 9 zusammengestellt. Bei idealleitender Erde ist β gleich Null, wenn die Wellenausbreitung im Vakuum erfolgt.
Dezimeter- und Zentimeterwellen werden im allgemeinen nicht als Bodenwellen abgestrahlt. Sie breiten sich, auf ein bestimmtes Ziel gerichtet, durch den freien Raum aus. Ihre Dämpfungskonstante hängt daher nicht vom Boden, sondern von der Atmosphäre ab. Meßwerte hierüber gehen aus Tabelle 10 hervor.

Tabelle 9. Mittlere Meßwerte für B bei der Dämpfung elektromagnetischer Wellen

Boden	B	
	in 10^{-6} Np m$^{-1/2}$	in 10^{-6} dB m$^{-1/2}$
Meerwasser	50	430
feuchter Boden	290	2500
trockener Boden	900	7800
Großstadtgelände	2100	18000

Tabelle 10. Mittlere Meßwerte über die Dämpfung von Zentimeterwellen durch die Atmosphäre

	β bei $\lambda = 3$ cm		β bei $\lambda = 6$ cm	
	in 10^{-6} Np m^{-1}	in 10^{-6} dB m^{-1}	in 10^{-6} Np m^{-1}	in 10^{-6} dB m^{-1}
durch Regen 22 mm/h	92	800	6	50
Dunst über dem Meer	16	140	1	9
über Festland (mittl. Breiten)	1	9	—	—

Eine Vertikalantenne der Länge $l = h_S$, auf der die elektrische Stromstärke I_{eff} in jedem Punkt gleich ist, erzeugt nach (5.1.2./1) unter Berücksichtigung der Dämpfung im Abstand r die effektive elektrische Feldstärke (vgl. 1.1./29)

$$\mathfrak{E}_{\text{eff}} = Z_0 I_{\text{eff}} \frac{h_S}{\lambda r} \, e^{-\beta r}. \tag{3}$$

Die hierdurch zwischen der Empfangsantenne und der Erde hervorgerufene Spannung kann in erster Näherung unter der Voraussetzung bestimmt werden, daß der Strom auch auf der Empfangsantenne in jedem Punkt gleich ist. Diese Voraussetzung ist für $h \ll \lambda$ immer gut erfüllt.
Stehen die elektrischen Feldlinien und die Empfangsantenne senkrecht zur Erdoberfläche, so erhält man

$$U_{\text{Ant}} = \int_0^{h_E} \mathfrak{E}_{\text{eff}} \, dz = \mathfrak{E}_{\text{eff}} h_E = Z_0 I_{\text{eff}} \frac{h_S h_E}{\lambda r} \, e^{-\beta r}. \tag{4}$$

Darin bezeichnet h_E die Höhe der Empfangsantenne.

Beispiel 25

Eine Vertikalantenne der Höhe $h_S = 9$ m sende auf der Wellenlänge $\lambda = 380$ m. Die Stromstärke betrage $I_{eff} = 20$ A. Der Abstand zwischen dem Sende- und dem Empfangsort betrage $r = 150$ km. Dazwischen befinde sich trockener Boden ($B = 900 \cdot 10^{-6}$ Np m$^{-1/2}$). Für β folgt aus (2)

$$\beta = \frac{900 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{380}} \text{ Np m}^{-1} = 46 \cdot 10^{-6} \text{ Np m}^{-1}.$$

Als Feldstärke am Empfangsort ergibt sich aus (3)

$$(\mathfrak{E}_\vartheta)_{eff} = 120\pi \cdot 20 \frac{9}{380 \cdot 150 \cdot 10^3} \exp(-46 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}5 \cdot 10^5) \text{ V m}^{-1} = 1{,}2 \cdot 10^{-6} \text{V m}^{-1}.$$

Die Antennenspannung wird nach (4) für $h_E = 2{,}5$ m

$$U_{Ant} = 1{,}2 \cdot 10^{-6} \cdot 2{,}5 \text{ V m}^{-1} = 3{,}0 \cdot 10^{-6} \text{ V}.$$

Bei Antennen, deren Länge gegen die Wellenlänge nicht zu vernachlässigen ist, hat man die **Stromverteilung** zu berücksichtigen. Wegen des Reziprozitätstheorems braucht man bei der Untersuchung über die Wechselwirkung zwischen der Antenne und dem Feld keinen Unterschied zwischen Sende- und Empfangsantenne zu machen. Man kann also das von einer Antenne abgestrahlte Feld betrachten und daraus Rückschlüsse auf den Empfang ziehen.
Um das von einer vorgegebenen Antenne erzeugte Außenfeld genähert zu berechnen, wird diese durch ein Stromelement der Länge $h = h_{eff}$ ersetzt, in dem die Stromstärke konstant ist. Auf der Antenne nimmt man eine Stromverteilung

$$I_{eff}(z) = I_0 \cos \alpha z \tag{5}$$

an. Diese Stromverteilung wird auch bei einer Vertikalantenne vorausgesetzt, deren Fußpunkt sich nicht an der Erdoberfläche, sondern in der Höhe a befindet (vgl. Bild 2.8). Man geht also von einer Stromverteilung aus, als erfolge die Speisung vom Erdboden aus über ein strahlungsloses Kabel der Länge a. Diese Festlegung ist besonders für **beschwerte Antennen** zweckmäßig. Bei ihnen ist zur Kopplung oder Abstimmung am Fußpunkt ein Kondensator oder eine Spule eingeschaltet (vgl. 5.2.2./6).
Das Stromelement wird durch die Gleichung

$$I_{eff} h + \int_a^{a+l} I_{eff}(z) \, dz = I_0 \int_a^{a+l} \cos \alpha z \, dz \tag{6}$$

definiert. Den konstanten Strom I_{eff} des Stromelementes setzt man gleich dem Effektivwert des vorgegebenen Antennenstroms im Speisepunkt. Nach (5) besteht also die Beziehung

$$I_{eff} = I_{eff}(a) = I_0 \cos \alpha a. \tag{7}$$

Aus (6) folgt

$$I_{\text{eff}} h = \frac{I_0}{\alpha} \left[\sin \alpha(a + l) - \sin \alpha a\right], \tag{8}$$

woraus sich mit $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$ für die effektive Antennenhöhe

$$\boxed{h = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\sin \frac{2\pi}{\lambda}(a + l) - \sin \frac{2\pi a}{\lambda}}{\cos \frac{2\pi a}{\lambda}}} \tag{9}$$

ergibt.

Beispiel 26

Bei einer kurzen Antenne, deren geometrische Länge l klein gegen die Wellenlänge λ ist, sind effektive Höhe h und geometrische Länge l genähert gleich. Aus (9) ergibt sich bei Anwendung der Additionstheoreme

$$h = l \qquad \text{für} \qquad \frac{l}{\lambda} \ll 1.$$

Beispiel 27

Für eine Vertikalantenne mit dem Fußpunkt in der Höhe $a = 50$ cm und der Länge $l = 8$ m erhält man nach (9) bei der Wellenlänge $\lambda = 30$ m

$$h = \frac{30}{2\pi} \frac{\sin \frac{8{,}5}{30} 360° - \sin \frac{0{,}5}{30} 360°}{\cos \frac{0{,}5}{30} 360°} \text{ m} = 4{,}19 \text{ m}.$$

Als Strahlungswiderstand dieser Antenne folgt nach (5.1.2./4)

$$R_S = 160\pi^2 \left(\frac{4{,}19}{30}\right)^2 \Omega = 30{,}8\,\Omega.$$

Beispiel 28

Bei der geerdeten Vertikalantenne mit der Länge $l = \frac{\lambda}{4}$ folgt

$$h_{\lambda/4} = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{9a}$$

Ein $\frac{\lambda}{2}$-Strahler im freien Raum kann derart gedeutet werden, daß zwei $\frac{\lambda}{4}$-Strahler spiegelbildlich zueinander stehen. Die Stromverteilung ist, von den Dipolenden aus betrachtet, durch ein Cosinus-

gesetz gegeben. Daraus ergibt sich nach (9a), wenn man beachtet, daß in den gesamten Raum gestrahlt wird,

$$h_{\lambda/2} = 2\,\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{\pi}. \tag{9b}$$

Beim $\frac{\lambda}{4}$ -Dipol nach (9a) hat man den Strahlungswiderstand nach (5.1.2./3) zu berechnen:

$$(R_S)_{\lambda/4} = \frac{4}{3}\,\pi Z_0 \left(\frac{h_{\lambda/4}}{\lambda}\right)^2 = 40\,\Omega.$$

Dagegen folgt beim $\frac{\lambda}{2}$-Strahler nach (5.1.1./21) und (9b)

$$(R_S)_{\lambda/2} = \frac{2}{3}\,\pi Z_0 \left(\frac{h_{\lambda/2}}{\lambda}\right)^2 = 80\Omega.$$

Dieser Wert liegt um etwa 10% über dem genaueren Wert nach (5.1.4./9).

Beispiel 29

Bei der **Rahmenantenne** aus n Windungen mit der Empfangsfläche A folgt nach (5.1.8./11), wenn die Rahmenabmessungen klein gegen $\lambda/4$ sind,

$$h = \frac{2\pi}{\lambda}\,An.$$

Bei der drahtlosen Übertragung erzeugt man in der Sendestation die **Trägerschwingung** $U_T = U_{0T}\sin\omega t$ und strahlt diese als elektromagnetische Welle aus. Die Trägerschwingung erfolgt mit hoher Frequenz f ($f = f_T$ Träger- oder Sendefrequenz, $\omega = 2\pi f$ Kreisfrequenz der Trägerschwingung). Auf die Trägerschwingung wird das Nutzsignal $U_M = U_{0M}\sin\omega_M t$ moduliert, indem z. B. die Amplitude, die Phase oder die Frequenz periodisch mit der Kreisfrequenz ω_M verändert werden. Die Frequenz f_M des Nutzsignals muß um Größenordnungen niedriger als die Trägerfrequenz f sein, wenn eine einwandfreie Übertragung erfolgen soll. f_M wird als Modulationsfrequenz definiert.

Von den verschiedenen Modulationen wird in der Nachrichtentechnik am häufigsten die **Amplitudenmodulation** angewandt. Sie führt zu Schwingungen der Form

$$U = U_0(1 + m\sin\omega_M t)\sin\omega t. \tag{10}$$

Der Faktor m definiert den Modulationsgrad.

Eine amplitudenmodulierte Schwingung kann z. B. durch ein Mikrofon erzeugt werden, das die Leitfähigkeit des Sendekreises, um einen Mittelwert schwankend, periodisch verändert (vgl. Bild 5.14).

Im allgemeinen besteht das Nutzsignal aus der Überlagerung mehrerer Schwingungen mit verschiedener Frequenz und verschiedener Amplitude. Der auf die Trägerfrequenz des Senders abgestimmte **Empfänger** überführt das durch den Modulationsvorgang frequenzverschobene Nutzsignal wieder in den ursprünglichen Frequenz-

bereich (Demodulation). Zur einwandfreien Übertragung müssen bei der Demodulation Schwingungen erzeugt werden, deren Frequenzen mit den entsprechenden Frequenzen des Nutzsignals übereinstimmen und deren Amplituden denen des Nutzsignals proportional sind. Bei der amplitudenmodulierten Schwingung kann die Demodulation grundsätzlich mit den gleichen Geräten wie die Modulation erfolgen, z. B. mit einem Mikrofon.

Der Empfänger setzt sich im Prinzip aus dem für die Abstimmung erforderlichen **Resonanzschwingkreis** und dem **Verstärkervierpol** zusammen. Die Antenne stellt die Spannungsquelle des Empfängers dar. Ihr Widerstand $\mathfrak{R}_{\text{Ant}} = \mathfrak{R}_i$ kann als Innenwiderstand der Spannungsquelle aufgefaßt werden. Der Außenwiderstand $\mathfrak{R}_a = \mathfrak{R}$ wird maßgeblich durch den Widerstand des Resonatorschwingkreises bestimmt. Für die am Verstärkervierpol liegende Spannung U_V erhält man nach (4.1.2./1) (vgl. Bild 5.10)

$$U_V = \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}_{\text{Ant}} + \mathfrak{R}} U_{\text{Ant}}. \tag{11}$$

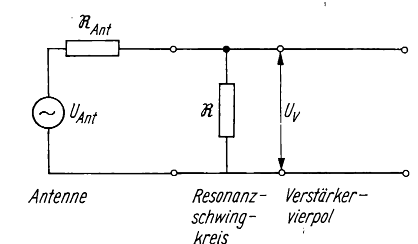


Bild 5.10. Prinzipschaltbild der Empfangsanlage

Bei der Abstimmung des Resonatorkreises verschwinden in (11) die Blindkomponenten. Hierdurch läßt sich erreichen, daß bei Resonanz die am Verstärker liegende Spannung U_V ihrem Betrag nach die Antennenspannung U_{Ant} übersteigt. Der Quotient

$$v = \left| \frac{U_V}{U_{\text{Ant}}} \right| \tag{12}$$

wird als **Spannungsüberhöhung** definiert.

Für den Empfang des Nutzsignals kommt nur den auf die Trägerwelle modulierten Amplitudenschwankungen Bedeutung zu. Sie verursachen im Empfänger Spannungsschwankungen um einen Mittelwert. Nach (10) sind die Spannungsschwankungen durch

$$\Delta U = mU_0 \sin \omega_M t \tag{13}$$

gegeben. Bezeichnet U_{Ant} die vom Sender hervorgerufene effektive Antennenspannung, so kann also bei einem Modulationsgrad m hiervon nur der Anteil m für den Empfang des Signals genutzt werden. Infolge der nach (11) bzw. (12) bei der Abstimmung auftretenden Spannungsüberhöhung erhält man somit für die am Verstärkervierpol liegende Nutzspannung

$$U_N = mvU_{\text{Ant}}. \tag{14}$$

Die für eine einwandfreie Übertragung erforderliche Nutzspannung wird durch das **Rauschen** bestimmt. Es findet seine Ursache in statistischen Schwankungen bei der Verteilung der Elektronen.

Das thermische Rauschen tritt bei jedem Wirkwiderstand R auf. Es führt zu unregelmäßigen Spannungsschwankungen, deren Effektivwert mit U_R bezeichnet wird. Nach NYQUIST rauscht jeder Wirkwiderstand R mit der mittleren Leistung

$$\boxed{P_\mathrm{R} = 4kT\,\Delta f.} \tag{15}$$

Darin bezeichnet $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$ die BOLTZMANN-Konstante, T die thermodynamische Temperatur (absolute Temperatur), Δf die Bandbreite des Frequenzbereiches. Blindwiderstände liefern keinen Beitrag zur Rauschleistung.

In den Verstärkern treten spezielle, von der Physik des Verstärkers abhängige Rauscheffekte auf. Das Rauschen von Verstärkerröhren denkt man durch einen mit dem Wirkwiderstand R des Eingangskreises in Reihe liegenden Widerstand $R_\mathrm{ä}$ entstanden, der als **äquivalenter Rauschwiderstand** bezeichnet wird. R und $R_\mathrm{ä}$ addieren sich zum Rauschwiderstand R_R (vgl. Bild 5.11):

$$R_\mathrm{R} = R + R_\mathrm{ä}.$$

Der äquivalente Rauschwiderstand $R_\mathrm{ä}$ ist für Zimmertemperatur definiert. Für die in Gebrauch befindlichen Röhren liegen die Rauschwiderstände zwischen 0,5 kΩ und 100 kΩ.

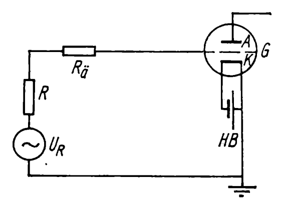


Bild 5.11. Äquivalenter Rauschwiderstand $R_\mathrm{ä}$ einer Verstärkerröhre
HB Heizbatterie, K Katode, A Anode, G Gitter

Aus der Verknüpfung zwischen Leistung und Spannung folgt nach (15) für die **Rauschspannung des Empfängers**

$$U_\mathrm{R} = \sqrt{p_\mathrm{R} R_\mathrm{R}} = \sqrt{4kT\,\Delta f\,R_\mathrm{R}}\,. \tag{16}$$

Beispiel 30

Der Resonanzwiderstand eines Mittelwellenempfängers mit Röhrenverstärkung beträgt 150 kΩ, der äquivalente Rauschwiderstand der Röhre $R_\mathrm{ä} = 70\,\mathrm{k\Omega}$. Die Bandbreite ist gleich $\Delta f = 9\,\mathrm{kHz}$. Hieraus ergibt sich bei Zimmertemperatur $T = 288\,\mathrm{K}$

$$R_\mathrm{R} = (150 + 70)\,\mathrm{k\Omega} = 220\,\mathrm{k\Omega}$$

und daraus nach (16) für die Rauschspannung

$$U_\mathrm{R} = \sqrt{4 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 288 \cdot 9 \cdot 10^3 \cdot 220 \cdot 10^3}\,\mathrm{V} = 5{,}6 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{V}.$$

Das Verhältnis zwischen der Nutzleistung P und der Rauschleistung p bezeichnet man als **Störabstand** $\varrho = P/p$.

Allgemein wird zur Kennzeichnung des Rauschverhaltens eines Vierpols insbesondere bei Transistoren die **Rauschzahl** F eingeführt. Sie gibt das Verhältnis zwischen dem Störabstand am Eingang des Vierpols und dem Störabstand am Ausgang an:

$$\boxed{F = \frac{\text{Eingangsstörabstand}}{\text{Ausgangsstörabstand}} = \frac{P_E/p_E}{P_A/p_A} = \frac{\varrho_E}{\varrho_A}}. \tag{17}$$

Darin bedeuten P_E bzw. p_E die von der Signalquelle am Eingang des Vierpols angebotene Nutz- bzw. Rauschleistung. P_A und p_A geben die Nutz- bzw. Rauschleistung am Vierpolausgang an. Bezeichnet V_L die Leistungsverstärkung im Empfänger, so besteht zwischen den Nutzleistungen die Beziehung

$$P_A = V_L P_E. \tag{18}$$

Dagegen hat man für den Zusammenhang zwischen den Rauschleistungen am Ausgang und am Eingang zu schreiben

$$p_A = V_L p_E + p_Z. \tag{19}$$

Darin bedeutet p_Z die im Empfänger entstehende Rauschleistung. Setzt man (18) in (17) ein, so folgt

$$F = \frac{P_E/p_E}{V_L P_E/p_A} = \frac{p_A}{V_L p_E}. \tag{20}$$

Durch Umformung entsteht hieraus

$$\boxed{p_A = F V_L p_E}. \tag{21}$$

Durch den Vierpol mit der Rauschzahl F und der Leistungsverstärkung V_L wird die Rauschleistung somit nicht nur um den Faktor V_L, sondern um den Faktor $F V_L$ vergrößert. Der Vierpol wirkt also auf das Eigenrauschen derart, als würde nicht nur die Rauschleistung p_E, sondern die um den Faktor F vergrößerte Rauschleistung Fp_E angeboten. Setzt man voraus, daß die von der Umgebung in den Empfänger gelangende Rauschleistung zu vernachlässigen ist, so kann für die im Empfänger mit angeschlossenem Verstärker auftretende Rauschleistung geschrieben werden:

$$p_F = 4FkT\,\Delta f. \tag{22}$$

Die Rauschspannung wird nach (22) gleich

$$U_F = \sqrt{4FkT\,\Delta f\,R}, \tag{23}$$

wobei R den Resonanzwiderstand angibt.
In den Tabellenwerken über **Transistoren** werden die Rauschzahl und die Leistungsverstärkung allgemein in dB angegeben. Dabei definiert man

$$\boxed{\tilde{F} = 10 \lg F, \quad \tilde{V}_L = 10 \lg V_L}. \tag{24}$$

Tabelle 11 enthält die Rauschzahl für verschiedene Transistoren.

Die Forderungen an die **Qualität einer Übertragung** beziehen sich auf den Störabstand ϱ als Verhältnis zwischen der am Eingang liegenden Nutzleistung $P_E = P_N$ und der Rauschleistung $p_E = p_R$ im Empfänger. Nach (14) und (22) bzw. (23) folgt hierfür bei einem Empfänger mit der Rauschzahl F und dem Resonanzwiderstand R

$$\boxed{\varrho = \frac{P_N}{p_F} = \frac{m^2 v^2 U_{Ant}^2}{4FkT\,\Delta f\,R}}\,. \tag{25}$$

Der Störabstand $\tilde{\varrho} = 10 \lg \varrho$ wird ebenfalls in dB angegeben. Tabelle 12 enthält Daten über Frequenzen, Bandbreite und Störabstand bei verschiedenen Übertragungsformen. In den Tabellen 13 und 14 sind Rauschzahlen und Störabstände zusammengestellt.

Tabelle 11. Rauschzahlen von Transistoren

Transistor	Rauschzahl $\tilde{F}$ in dB	Bemerkung
SC 111	8	typ.
SC 112	5	max.
SC 207	5,6 8	typ. $f = 1$ kHz, $\Delta f = 850$ kHz max.
SF 127	4,5	$\Delta f = 1$ kHz
SF 132	7 3,5 2,5 6	$f = 1$ kHz $f = 10$ kHz $f = 100$ kHz $f = 50$ MHz
SS 101	15 6	max. typ.
GC 116	6 20	typ. $f = 1$ kHz, $\Delta f = 1$ kHz max.
GS 109	25	max.
GS 121	25	max.

P **Probleme**

5.2.1. Widerstand einer Antenne im Speisepunkt

Eine geerdete Vertikalantenne (vgl. 2.1.7.) der Länge $l = 15$ cm mit dem Durchmesser $2r_0 = 1$ cm wird am Fußpunkt durch einen Generator der Frequenz $f = 10^8$ Hz gespeist. Berechnen Sie den Widerstand im Speisepunkt. Die ohmschen Verluste seien gegen den Strahlungswiderstand zu vernachlässigen.

Tabelle 12. Frequenzbereich und mittlere Werte für Bandbreite und Störabstand bei verschiedenen Übertragungsformen

Bezeichnung	Trägerfrequenzbereich f in MHz	Bandbreite Δf in kHz	Störabstand $\tilde{\varrho}$ in dB
Telegraphie	0,03···300	0,1···1, 5	4···16
Telephonie	0,03···300	0,3···3	13···33
Rundfunk:			
Langwelle	0,15···0,285	bis 9,0	30
Mittelwelle	0,535···1,605	bis 9,0	40
Kurzwelle	5,95···26,1	10	30
UKW	20···500	bis 400	40···50
Fernsehen:			
Bild	30···100	≈7,0	42···57
Ton	100···300		
	300···1000	≈7,0	18···35

Tabelle 13. Rauschzahlen für Funkempfänger

Bezeichnung		$\tilde{F}$ in dB
Telephonie-Funkempfänger		
im festen Funkdienst 1,6···30 MHz		4···10
im beweglichen Funkdienst	30···300 MHz	8···11
Telegraphie-Empfänger		5···10
Rundfunkempfänger	— Kurz- und Mittelwelle	6···21
	UKW	8···26
Fernsehempfänger	— Bild	5···14
	Ton	6···13

Tabelle 14. Störabstände

Qualität	Leistungs-verhältnis	Spannungs-verhältnis	$\tilde{\varrho}$ in dB
Grenze der Wahrnehmbarkeit	1	1	0
Grenze der Sprachverständlichkeit	10	3,2	10
Ausreichende Musikqualität	1000	32	30
Ausreichende Fernsehqualität	10000	100	40
Einwandfreie Qualität bei zwei Gesprächen	1000000	1000	60

Lösung

Um möglichst einfache Formeln zu erhalten, wird die Vertikalantenne mit ihrem Spiegelbild in erster Näherung als Leitungssystem mit konstantem Wellenwiderstand behandelt. Obgleich diese Auffassung nur eine sehr grobe Näherung darstellt, liefert sie für die Praxis brauchbare Ergebnisse.
An der Spitze der Vertikalantenne fließt kein Strom. Es liegt somit ein leerlaufendes Leitungssystem vor, d. h., die Leitung ist mit einem unendlich großen Widerstand abgeschlossen. Für den Eingangswiderstand am Fußpunkt erhalten wir nach (4.4/14)

$$\mathfrak{R}_\mathrm{E} = \mathfrak{Z} \coth \gamma l. \tag{1}$$

γ berechnen wir nach (4.4./4) unter der Voraussetzung, daß die Ableitung G' verschwindet und daß auch der Widerstandsbelag R', in den der Strahlungswiderstand eingeht, nur kleine Werte annimmt. Es folgt

$$\gamma = \mathrm{i}\,\alpha + \beta = \sqrt{(R' + \mathrm{i}\,\omega L')\,\mathrm{i}\,\omega C'} \quad = \mathrm{i}\,\omega \sqrt{L'C'}\left(1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\,\frac{R'}{L'\omega}\right), \tag{2}$$

bzw.

$$\alpha = \omega \sqrt{L'C'} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \beta = \frac{R'}{2}\sqrt{\frac{C'}{L'}} = \frac{R'}{2Z}. \tag{3}$$

Darin bedeutet

$$Z = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \tag{4}$$

den Realteil des Wellenwiderstandes $\mathfrak{Z}$ der Vertikalantenne. Der imaginäre Anteil des Wellenwiderstandes wird vernachlässigt. Setzen wir (4) und (2) in (1) ein, so folgt für $\beta \ll \alpha$,

$$\mathfrak{R}_\mathrm{E} = Z \coth\left[(\mathrm{i}\,\alpha + \beta)\,l\right] = Z\,\frac{\cos\alpha l + \mathrm{i}\,\beta l \sin\alpha l}{\mathrm{i}\sin\alpha l},$$

d. h. in Verbindung mit (3)

$$\mathfrak{R}_\mathrm{E} = -\mathrm{i}Z\cot\alpha l + \frac{R'l}{2}. \tag{5}$$

Die Größe $R'\,\mathrm{d}l$ kennzeichnet den Strahlungswiderstand eines kleinen Leiterstücks der Länge $\mathrm{d}l$. Bei der geerdeten Vertikalantenne ist nach (5.1.2./3) der Strahlungswiderstand gleich

$$R_\mathrm{S} = \frac{4}{3}\,\pi Z_0\,\frac{l^2}{\lambda^2} \qquad \left(l < \frac{\lambda}{10}\right). \tag{6}$$

Daraus ergibt sich für die gesuchte Größe

$$\frac{R'l}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}R_\mathrm{S}}{\mathrm{d}l}\,l = \frac{4}{3}\,\pi Z_0\,\frac{l^2}{\lambda^2} = R_\mathrm{S}. \tag{7}$$

Bei Antennen, deren Länge oberhalb $\lambda/10$ liegt, ist die Stromverteilung zu berücksichtigen. Man schreibt daher anstelle von (7)

$$\frac{R'l}{2} = \frac{4}{3}\,\pi Z_0\,\frac{h^2}{\lambda^2}, \tag{8}$$

ersetzt also die geometrische Länge nach (5.2./9) durch die effektive Höhe h.
Den Wellenwiderstand Z der Vertikalantenne errechnen wir genähert aus der Kapazität. Nach 2.1.7. ist diese gleich

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{l}{\sqrt{3}\,r_0}}. \tag{9}$$

Die Antenne kann mit ihrem Spiegelbild in erster Näherung als Leitungssystem aufgefaßt werden, wenn man in (9) den Ausdruck $\ln l/r_0$ als langsam veränderlich gegen l ansieht. Für den Kapazitätsbelag folgt damit aus (9)

$$C' = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{l}{\sqrt{3}\,r_0}}. \tag{10}$$

Hieraus ergibt sich als Wellenwiderstand der geerdeten Vertikalantenne

$$Z = \frac{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{C'} = \frac{Z_0}{2\pi}\ln\frac{l}{\sqrt{3}\,r_0}. \tag{11}$$

Für den Eingangswiderstand am Fußpunkt der geerdeten Vertikalantenne folgt somit in erster Näherung

$$\Re_E = -\mathrm{i}\,Z\cot\frac{2\pi l}{\lambda} + R_S, \tag{12}$$

wobei Z aus (11), R_S aus (8) hervorgeht.
Mit den vorgegebenen Zahlen erhalten wir aus (11) und (12)

$$Z = 60\ln\frac{0{,}15}{\sqrt{3}\cdot 5\cdot 10^{-3}}\cot\frac{0{,}15}{3{,}00}\,360°\,\Omega = 171\cdot 3{,}08\,\Omega = 527\,\Omega.$$

Die effektive Antennenhöhe ist nach (5.2./9) gleich

$$h = \frac{3{,}00}{2\pi}\sin\frac{0{,}15}{3{,}00}\cdot 360°\ \mathrm{cm} = 14{,}8\ \mathrm{cm}.$$

Für den Strahlungswiderstand ergibt sich nach (8) $R_S = 3{,}8\,\Omega$. Somit folgt als Fußpunktwiderstand der Vertikalantenne $\Re_E = (3{,}8 - \mathrm{i}\,527)\,\Omega$.

5.2.2. Verkürzung und Verlängerung einer Vertikalantenne durch eingeschaltete Spulen und Kondensatoren

Eine Vertikalantenne der Länge $l = 15$ m mit dem Wellenwiderstand $Z = 300\,\Omega$ ist über eine Spule der Induktivität $L = 10\ \mu\text{H}$ an den Empfänger gekoppelt. Zur Abstimmung wird ein Drehkondensator eingeschaltet (vgl. Bild 5.12). Berechnen Sie die erforderliche Kapazität des Kondensators bei der Resonanzabstimmung auf eine Welle der Länge $\lambda = 75$ m. Welche effektive Höhe besitzt die Antenne bei Resonanz?

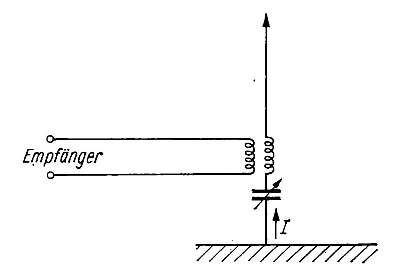


Bild 5.12. Schaltung zur induktiven Kopplung der Antenne an den Empfänger mit Drehkondensator zur Abstimmung

Lösung

Nach (5.2.1./12) ist der Eingangswiderstand der Vertikalantenne gleich

$$\mathfrak{R}_E = -\mathrm{i}\, Z \cot \frac{2\pi l}{\lambda} + R_S. \tag{1}$$

Der Kondensator und die Spule sind zur Antenne in Reihe geschaltet. Für den gesamten Widerstand erhalten wir somit

$$\mathfrak{R} = -\mathrm{i}\, Z \cot \frac{2\pi l}{\lambda} + \mathrm{i}\,\omega L - \mathrm{i}\,\frac{1}{\omega C} + R_S. \tag{2}$$

Resonanz liegt vor, wenn der Imaginärteil verschwindet, d. h. für $\mathfrak{R} = R_S$. Dafür muß die eingeschaltete Kapazität gleich

$$C = \frac{1}{\omega\left(\omega L - Z \cot \frac{2\pi l}{\lambda}\right)} \tag{3}$$

sein. Mit den vorgegebenen Zahlen folgt

$$C = \frac{1}{2\pi \cdot 4 \cdot 10^6 \left(4 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-6} - 300 \cot \frac{15}{75} \cdot 360^\circ\right)}\ \text{F} = 2{,}59 \cdot 10^{-10}\ \text{F}.$$

Durch die vorgegebene Spule und den Kondensator mit der berechneten Kapazität erfolgt scheinbar eine **Verlängerung** der Antenne auf $\lambda/4$. Eine im Fußpunkt eingeschaltete Spule wirkt nach (2) scheinbar als Verlängerung, ein Kondensator als **Verkürzung** der Antenne. Diese scheinbare

Längenveränderung Δl kann auf Grund der Gleichung

$$-Z \cot \frac{2\pi l}{\lambda} + \omega L - \frac{1}{\omega C} = -Z \cot \frac{2\pi(l + \Delta l)}{\lambda} \tag{4}$$

definiert werden.
Im allgemeinen interessiert der **Resonanzfall.** Für diesen verschwindet der Ausdruck (4), d. h., die eingeschalteten Spulen und Kondensatoren wirken im Resonanzfall gerade so, als sei die Länge der Antenne zusammen mit der Verlängerung gleich $\lambda/4$:

$$\Delta l + l = \frac{\lambda}{4}. \tag{5}$$

An der Spitze der Vertikalantenne muß sich ein Stromknoten befinden. Diese Stromverteilung ergibt sich nach (5.2./5), wenn man

$$a = \Delta l = \frac{\lambda}{4} - l \tag{6}$$

setzt. Bezüglich der Stromverteilung auf der vorgegebenen, auf Resonanz abgestimmten Vertikalantenne hat man also so zu rechnen, als befinde sich der Fußpunkt in der Höhe a, und die Antenne erstrecke sich von $z = a$ bis $z = \lambda/4$.

Im vorgegebenen Fall ist nach (6)

$$a = (18{,}75 - 15{,}00)\ \text{m} = 3{,}75\ \text{m}.$$

Daraus folgt nach (5.2./9) die effektive Höhe

$$h = \frac{75}{2\pi} \cdot \frac{1 - \sin \dfrac{2\pi \cdot 3{,}75}{75}}{\cos \dfrac{2\pi \cdot 3{,}75}{75}}\ \text{m} = 8{,}68\ \text{m}.$$

5.2.3. Schwingkreis mit induktiver Kopplung

Eine Vertikalantenne ist über einen Transformator an den Schwingkreis des Empfängers gekoppelt (vgl. Bild 5.13). Der Kopplungsfaktor ist $k = 0{,}04$. Als Antenne wird ein zylindrischer Stab der Länge $l = 3{,}50$ m verwendet, dessen Durchmesser $2r_0 = 5$ mm beträgt. Der Verlustwiderstand in der Antenne hat die Größe $3\,\Omega$, die Induktivität der Spule auf der Antennenseite

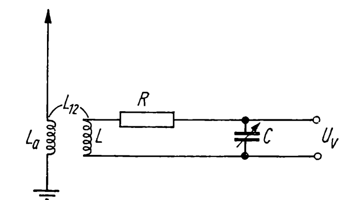


Bild 5.13. Empfangskreis mit induktiver Kopplung an die Antenne

ist gleich $L_a = 450\ \mu$H. Empfängerseitig beträgt die Induktivität der Spule $L = 250\ \mu$H, der ohmsche Widerstand $R = 30\,\Omega$. Es wird eine Sendung der Frequenz $f = 10^6$ Hz empfangen. Berechnen Sie die Spannungsüberhöhung.

Lösung

Wir fassen die Antenne mit ihrer Kopplungsspule als Primärschwingkreis (L_a, C_{Ant}, R_{Ant}) auf. R_{Ant} enthält sowohl den ohmschen Verlust- als auch den Strahlungswiderstand. Der Resonatorschwingkreis stellt den Sekundärschwingkreis (L, C, R) dar. Die Gegeninduktivität zwischen den beiden Spulen ist nach (4.3.2./6)

$$L_{12} = k\sqrt{LL_a}, \tag{1}$$

worin k den Kopplungsfaktor bezeichnet.
Entsprechend Bild 5.13 können wir den Kondensator als Abschlußwiderstand

$$\mathfrak{R}_A = -\frac{\mathrm{i}}{\omega C}$$

des Sekundärschwingkreises auffassen, während

$$\mathfrak{R}_2 = \mathrm{i}\,\omega L + R$$

den sekundärseitigen Widerstand bezeichnet (vgl. 4.2.5.). Zur abkürzenden Darstellung der Formeln legen wir fest

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_A = R + \mathrm{i}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right), \qquad \mathfrak{R}_a = R_{\mathrm{Ant}} + \mathrm{i}\left(\omega L_a - \frac{1}{\omega C_{\mathrm{Ant}}}\right).$$

Nach (4.2.5./22) erhalten wir für die sekundärseitige Spannung

$$U_V = -U_{\mathrm{Ant}}\,\frac{\mathrm{i}\,\omega L_{12}}{\mathfrak{R}_a\mathfrak{R} + \omega^2 L_{12}^2}\,\frac{1}{\mathrm{i}\,\omega C}, \tag{2}$$

wobei U_{Ant} die Spannung in der Antenne bezeichnet.
Durch Abstimmung des Sekundärkreises auf die Sendefrequenz ergibt sich

$$LC = \frac{1}{\omega^2}. \tag{3}$$

Als **Dämpfung** des Primär- bzw. des Sekundärkreises werden die Größen

$$d_a = \frac{R_{\mathrm{Ant}}}{\omega L_a} \quad \text{bzw.} \quad d = \frac{R}{\omega L}, \tag{4}$$

als **Verstimmung** des Primärkreises der Ausdruck

$$x_a = 1 - \frac{1}{\omega^2 L_a C_{\mathrm{Ant}}} = 1 - \frac{{\omega_a}^2}{\omega^2} \tag{5}$$

eingeführt.
Unter Verwendung dieser Definitionen folgt im Resonanzfall (3) aus (2)

$$U_{V,r} = -U_{\mathrm{Ant}}\sqrt{\frac{L}{L_a}}\,\frac{k}{(d_a + \mathrm{i}\,x_a)\,d + k^2}. \tag{6}$$

Die Primärdämpfung kann bei nicht zu großer Antennenhöhe im allgemeinen gegen die Verstimmung vernachlässigt werden. Ist außerdem die Kopplungsgröße k^2 klein gegen das Produkt aus Sekundärkreisdämpfung und Verstimmung, so vereinfacht sich (6) in

$$U_{\mathrm{V,r}} = \mathrm{i}\, U_{\mathrm{Ant}} \sqrt{\frac{L}{L_{\mathrm{a}}}}\, \frac{k}{x_{\mathrm{a}} d}. \tag{7}$$

Mit den vorgegebenen Zahlen erhalten wir nach (5.2.1./10) für die Antennenkapazität

$$C_{\mathrm{Ant}} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln \frac{l}{\sqrt{3}\, r_0}} = \frac{2\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 3{,}50}{\ln \frac{3{,}50}{\sqrt{3} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3}}}\ \mathrm{F} = 29{,}1\ \mathrm{pF}.$$

Die Resonanzfrequenz ω_{a} des Primärkreises ist daher

$$\omega_{\mathrm{a}} = \frac{1}{\sqrt{L_{\mathrm{a}} C_{\mathrm{Ant}}}} = \frac{1}{\sqrt{450 \cdot 10^{-6} \cdot 29{,}1 \cdot 10^{-12}}}\ \mathrm{s}^{-1} = 8{,}74 \cdot 10^6\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Für die Verstimmung folgt aus (5)

$$x_{\mathrm{a}} = 1 - \left(\frac{8{,}74 \cdot 10^6}{2\pi \cdot 10^6}\right)^2 = -0{,}94.$$

Die Dämpfung des Primärkreises ist

$$d_{\mathrm{a}} = \frac{R_{\mathrm{S}} + 3\Omega}{2\pi \cdot 10^6 \cdot 450 \cdot 10^{-6}\Omega}.$$

Der Strahlungswiderstand R_{S} liegt nach (5.1.2./4) unterhalb $1\ \Omega$. Für die Dämpfung des Primärkreises erhält man daher einen Wert unter 0,002. Dagegen ergibt sich für die Dämpfung des Sekundärkreises

$$d = \frac{30}{2\pi \cdot 10^6 \cdot 250 \cdot 10^{-6}} = 0{,}019.$$

Mit diesen Größen erhält man aus (9) für die Spannungsüberhöhung

$$v = \left|\frac{U_{\mathrm{V,r}}}{U_{\mathrm{Ant}}}\right| = \sqrt{\frac{250}{450}}\, \frac{0{,}04}{0{,}94 \cdot 0{,}019} = 1{,}67.$$

5.2.4. Modulationsgrad

Zur Amplitudenmodulation wird in einem Stromkreis die hochfrequente Wechselspannung

$$U = U_0 \sin \omega_{\mathrm{T}} t \qquad (\omega_{\mathrm{T}} = \omega) \tag{1}$$

als Trägerschwingung induziert (vgl. Bild 5.14). Die Übertragung der Modulationsschwingung erfolgt durch ein in den Stromkreis geschaltetes Mikrofon, das die elektrische Leitfähigkeit G im Takt der Modulationsfrequenz ändert:

$$G = G_0 + G_1 \sin \omega_{\mathrm{M}} t. \tag{2}$$

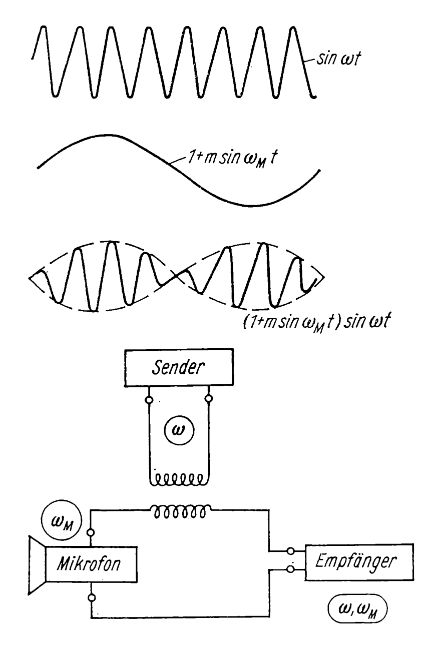


Bild 5.14. Überlagerung der Modulationsschwingung auf die Trägerschwingung bei der Amplitudenmodulation

Zur Messung des Modulationsgrades wird die Schwingung auf den Leuchtschirm eines Elektronenstrahloszillographen abgebildet. Dabei wird als Verhältnis des Amplitudenmaximums zum Minimum

$$\frac{a}{b} = 2{,}4$$

gemessen. Berechnen Sie daraus den Modulationsgrad.

Lösung

Aus (1) und (2) ergibt sich für den Strom

$$I = UG = U_0(G_0 + G_1 \sin \omega_{\mathrm{M}} t) \sin \omega_{\mathrm{T}} t. \tag{3}$$

Hierfür können wir in der Bezeichnung nach (5.2./10) mit $\omega = \omega_T$

$$I = I_0(1 + m \sin \omega_{\mathrm{M}} t) \sin \omega_{\mathrm{T}} t \tag{4}$$

schreiben. Darin ist

$$I_0 = U_0 G_0, \qquad m = \frac{G_1}{G_0}. \tag{5}$$

Der Modulationsgrad kennzeichnet also im vorliegenden Fall die maximale relative Schwankung des Leitwertes.
Ist die Trägerfrequenz groß gegen die Modulationsfrequenz, so kann die modulierte Schwingung (4) als harmonische Schwingung mit langsam veränderlicher Amplitude aufgefaßt werden. Für

$\sin \omega_M t = 1$ folgt als Amplitude die Größe $I_0(1 + m)$. Dagegen erhält man für $\sin \omega_M t = -1$ die Amplitude $I_0(1 - m)$. Das Verhältnis beider Größen ist gleich

$$\frac{a}{b} = \frac{1 + m}{1 - m}. \tag{6}$$

Hieraus ergibt sich für den Modulationsgrad

$$m = \frac{a - b}{a + b} = \frac{\frac{a}{b} - 1}{\frac{a}{b} + 1}. \tag{7}$$

Mit den vorgegebenen Zahlen folgt

$$m = \frac{2{,}4 - 1}{2{,}4 + 1} = 0{,}41.$$

5.2.5. Messung der Rauschzahl eines Verstärkers

Zur Messung der Rauschzahl eines Verstärkervierpols wird dieser an einen Prüfgenerator mit regelbarer Rauschleistung (Rauschgenerator) angeschlossen. Der Anschluß erfolgt derart über eine Leitung, daß Anpassung vorliegt. Bei ausgeschaltetem Nutzsignal mißt man am Ausgang des Verstärkers die Leistung P_0, die durch das thermische Rauschen des Prüfgenerators und des Transistorverstärkers im Meßgerät verursacht wird. Durch Veränderung der Rauschleistung des Generators wird ein Nutzsignal übertragen, das zusammen mit dem thermischen Rauschen im Meßgerät die Ausgangsleistung $2P_0$ anzeigt. Hierfür ist, bezogen auf 1 Hz Bandbreite, im Rauschgenerator die zusätzliche Nutzleistung $P_E' = 3{,}48 \cdot 10^{-20}$ W Hz^{-1} aufzubringen. Berechnen Sie daraus die Rauschzahl des Verstärkers. Die Temperatur betrage $T = 300$ K.

Lösung

Es liegt eine Spannungsquelle mit einem Außenwiderstand R_a vor, der an den Innenwiderstand R_i angepaßt ist. Von der angebotenen Spannung wird daher nach 4.1.2. die Hälfte, von der angebotenen Rauschleistung ein Viertel genutzt. Bei ausgeschaltetem Nutzsignal überträgt der angepaßte Rauschgenerator somit nach (5.2./15) die thermische Rauschleistung

$$p_E = kT\,\Delta f. \tag{1}$$

Sie wird durch den Verstärker auf $V_L p_E$ verstärkt, wobei V_L die Leistungsverstärkung

$$V_L = \frac{P_A}{P_E} \tag{2}$$

angibt. P_E und P_A bezeichnen die Nutzleistung am Eingang und am Ausgang des Verstärkers. Zur verstärkten Rauschleistung des Generators kommt die Eigenrauschleistung des Verstärkers hinzu, so daß das Meßgerät die Leistung

$$P_0 = V_L p_E + p_Z \tag{3}$$

anzeigt.

Mit dem vom Rauschgenerator aufgenommenen Nutzsignal P_E verdoppelt sich die Ausgangsleistung. Es gilt also

$$2P_0 = V_L P_E + V_L p_E + p_Z. \tag{4}$$

Hieraus erhalten wir

$$P_0 = V_L P_E = V_L p_E + p_Z. \tag{5}$$

Nach (5.2./20) und (5.2./19) ist die Rauschzahl F durch

$$F = \frac{p_A}{V_L p_E} = \frac{V_L p_E + p_Z}{V_L p_E} \tag{6}$$

bestimmt. Wir setzen (5) ein und erhalten

$$F = \frac{V_L P_E}{V_L p_E} = \frac{P_E}{p_E}. \tag{7}$$

Die zur Verdoppelung der Ausgangsleistung aufzuwendende Nutzleistung schreiben wir in der Form

$$P_E = P_E' \Delta f. \tag{8}$$

(8) und (1) in (7) eingesetzt, ergibt

$$F = \frac{P_E'}{kT}. \tag{9}$$

Mit den vorgegebenen Zahlen erhalten wir

$$F = \frac{3{,}48 \cdot 10^{-20}}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300} = 8{,}4.$$

Daraus folgt, in der Einheit dB gemessen,

$$\tilde{F} = 10 \lg F = 10 \lg 8{,}4 = 9{,}2 \text{ dB}.$$

5.2.6. Störabstand im Empfänger (Signal-Rausch-Verhältnis)

Ein Sender wird mit der Leistung $P = 0{,}1$ W auf der Wellenlänge $\lambda = 3{,}15$ m betrieben. Die Sendeantenne hat den Gewinn $g_S = 100$. Der Modulationsgrad beträgt $m = 0{,}65$. In der Entfernung $r = 30$ km befindet sich der Empfänger mit der Rauschzahl $\tilde{F} = 9$ dB, der Spannungsüberhöhung $v = 4{,}0$ und dem Resonanzwiderstand $R = 15\,\text{k}\Omega$. Durch die Atmosphäre erfolgt eine Dämpfung $b = 0{,}05$ dB km^{-1}. Wie groß muß der Gewinn der Empfangsantenne sein, wenn ein Störabstand $\tilde{\varrho} = 40$ dB gefordert wird? Die Bandbreite beträgt $\Delta f = 3 \cdot 10^5$ Hz. Bei der Rauschleistung ist nur der Empfänger ($T = 288$ K) zu berücksichtigen.

Lösung

Nach (5.1.4./6a) erzeugt ein Halbwellendipol im freien Raum die Feldstärke

$$(\mathfrak{E}_{\text{eff}})_{\lambda/2} = \sqrt{\frac{P}{R_S}}\,\frac{Z_0}{2\pi r} \qquad (R_S = 73{,}2\,\Omega).$$

Hat der Strahler den Gewinn g_S, so folgt unter Berücksichtigung der Dämpfung

$$\mathfrak{E}_{\text{eff}} = \sqrt{g_S} \sqrt{\frac{P}{R_S}} \frac{Z_0}{2\pi r} e^{-\beta r}. \tag{1}$$

Für die Spannung in der Empfangsantenne erhält man bei einem $\lambda/2$-Dipol nach (5.2./9b)

$$(U_{\text{Ant}})_{\lambda/2} = \mathfrak{E}_{\text{eff}} h_{\lambda/2} = \mathfrak{E}_{\text{eff}} \frac{\lambda}{\pi}.$$

In der Antenne mit dem Gewinn g_E wird also die Spannung

$$U_{\text{Ant}} = \sqrt{g_E}\, \mathfrak{E}_{\text{eff}} h_{\lambda/2} = \sqrt{g_S g_E} \sqrt{\frac{P}{R_S}} \frac{Z_0 \lambda}{2\pi^2 r} e^{-\beta r} \tag{2}$$

erzeugt. Unter Berücksichtigung der Spannungsüberhöhung v und des Modulationsgrades m erhalten wir nach (5.2./14) für die Nutzspannung

$$U_N = \sqrt{g_S g_E}\, vm \sqrt{\frac{P}{R_S}} \frac{Z_0 \lambda}{2\pi^2 r} e^{-\beta r}. \tag{3}$$

Die Rauschspannung ist nach (5.2./23)

$$U_F = \sqrt{4FkT\,\Delta f R}, \tag{4}$$

wobei R den Resonanzwiderstand angibt. Für den Störabstand folgt

$$\varrho = \frac{U_N^2}{U_F^2} = \frac{g_S g_E v^2 m^2 P Z_0^2 \lambda^2}{16\pi^4 FkT\,\Delta f R R_S r^2} e^{-2\beta r}. \tag{5}$$

Die Größe β ist über b bekannt. Wir können

$$e^{-2\beta r} = 10^{-br}$$

verwenden und für b die vorgegebene Größe einsetzen. Damit erhalten wir aus (5)

$$\tilde{\varrho} = 10 \lg \varrho = 10 \lg \frac{g_S v^2 m^2 P Z_0^2 \lambda^2}{16\pi^4 kT\,\Delta f R R_S r^2} + 10 \lg g_E - \tilde{F} - 10br. \tag{6}$$

Wir lösen diese Gleichung nach $\lg g_E$ auf:

$$\lg g_E = \frac{\tilde{\varrho}}{10} - \lg \frac{g_S v^2 m^2 P Z_0^2 \lambda^2}{16\pi^4 kT\,\Delta f R R_S r^2} + br + \frac{\tilde{F}}{10}. \tag{7}$$

Mit den vorgegebenen Zahlen folgt

$$\lg g_E = \frac{40}{10} - \lg \frac{100 \cdot 4{,}0^2 \cdot 0{,}65^2 \cdot 0{,}1 \cdot 120^2\pi^2 \cdot 3{,}15^2}{16\pi^4 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 288 \cdot 3 \cdot 10^5 \cdot 15 \cdot 10^3 \cdot 73{,}2 \cdot (30 \cdot 10^3)^2}$$

$$+ 0{,}05 \cdot 30 + 0{,}9 = 1{,}685, \qquad g_E = 48{,}5 \approx 50.$$

Die Empfangsantenne muß den Gewinn fünfzig besitzen, damit der geforderte Störabstand eingehalten wird.



Aufgaben

A 5.2.1. Berechnen Sie die Dämpfung in dB für eine Mittelwelle ($\lambda = 400$ m) und für eine Ultrakurzwelle ($\lambda = 4$ m) bei lehmigem Boden ($B = 10^{-4}$ Np m$^{-1/2}$), wenn die Ausbreitung über $r = 20$ km erfolgt.

A 5.2.2. Wie groß ist die Spannung in einer Vertikalantenne der Höhe $h = 8{,}50$ m? Die Sendeantenne hat die effektive Höhe $h = 70$ m. Der Sendestrom im Maximum beträgt $I_{\mathrm{eff}} = 15$ A. Als Wellenlänge ist $\lambda = 450$ m zu setzen. Die Ausbreitung erfolgt über trockenen Boden ($B = 8{,}8 \cdot 10^{-4}$ Np m$^{-1/2}$). Für den Abstand zwischen Sender und Empfänger ist $r = 100$ km zu setzen. Welche elektrische Feldstärke besteht am Empfangsort?

A 5.2.3. Berechnen Sie zur vorangegangenen Aufgabe die Feldstärke unter Vernachlässigung der Dämpfung.

A 5.2.4. Welche Leerlaufspannung tritt in einer Antenne der Länge $l = 10$ cm auf, wenn die Empfangsfeldstärke $\mathfrak{E}_{\mathrm{eff}} = 0{,}1 \cdot 10^{-3}$ V m^{-1} beträgt? Die Wellenlänge ist $\lambda = 5$ m.

A 5.2.5. Berechnen Sie die an einer Antenne der Länge $l = 2{,}50$ m liegende Leerlaufspannung, wenn die Feldstärke $\mathfrak{E}_{\mathrm{eff}} = 0{,}1 \cdot 10^{-3}$ V m^{-1} und die Wellenlänge $\lambda = 10$ m beträgt.

A 5.2.6. Wie groß ist die effektive Höhe einer Vertikalantenne der Länge $l = 6{,}50$ m mit dem Fußpunkt bei $a = 1{,}50$ m für die Wellenlänge $\lambda = 40$ m?

A 5.2.7. Berechnen Sie den Widerstand einer geerdeten Vertikalantenne der Länge $l = 20$ cm mit dem Durchmesser $2r_0 = 1{,}5$ cm. Die Wellenlänge beträgt $\lambda = 3$ m, der ohmsche Widerstand $8\,\Omega$.

A 5.2.8. Wie groß ist der Wellenwiderstand einer Vertikalantenne der Länge $l = 60$ cm mit dem Durchmesser $2r_0 = 4{,}5$ cm?

A 5.2.9. In einer Empfangsantenne beträgt der Resonanzwiderstand $R = 50\,\mathrm{k}\Omega$, der äquivalente Rauschwiderstand des Verstärkers $R_{\ddot{\mathrm{a}}} = 150\,\mathrm{k}\Omega$. Die Bandbreite ist gleich 9 kHz, die Spannungsüberhöhung beträgt $v = 3{,}5$, der Modulationsgrad $m = 0{,}6$. Gefordert wird ein Störabstand von 40 dB. Wie groß muß die Empfangsfeldstärke sein, wenn die Empfangshöhe 4 m beträgt ($T = 300$ K)?

A 5.2.10. Eine Rahmenantenne mit der Empfangsfläche $A = 30$ cm^2 enthält $n = 50$ Windungen. Die Wellenlänge beträgt $\lambda = 1{,}50$ m. Am Empfangsort wird die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}_{\mathrm{eff}} = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ A m^{-1} gemessen. Wie groß ist die induzierte Spannung?

A 5.2.11. Berechnen Sie die Dämpfung des Primär- und des Sekundärkreises sowie die Verstimmung des Primärkreises für eine Empfangsschaltung nach Bild 5.13 mit folgenden Werten: $L = 50$ mH, $R = 15\,\mathrm{k}\Omega$, $L_a = 500\,\mu$H, $C_{\mathrm{Ant}} = 80$ pF, $R_{\mathrm{Ant}} = 40\,\Omega$. Die Frequenz beträgt $f = 10$ MHz.

A 5.2.12. Es wird eine amplitudenmodulierte Schwingung mit dem Elektronenstrahloszillographen überprüft. Welche Bedingung ergibt sich für das Verhältnis zwischen dem maximalen und dem minimalen Ausschlag, wenn der Modulationsgrad größer als 0,3 sein soll?

A 5.2.13. Zerlegen Sie die amplitudenmodulierte Schwingung $(1 + m \sin \omega_{\mathrm{M}} t) \sin \omega_{\mathrm{T}} t$ in die Trägerwelle mit der Kreisfrequenz ω_{T} und die beiden Seitenbänder mit den Frequenzen $\omega_{\mathrm{T}} + \omega_{\mathrm{M}}$ und $\omega_{\mathrm{T}} - \omega_{\mathrm{M}}$ (**Seitenbandzerlegung**).

A 5.2.14. Wie groß ist die Rauschspannung in einem Kurzwellenempfänger mit dem Ersatzwiderstand der Röhren $R_{\ddot{\mathrm{a}}} = 1{,}2\,\mathrm{k}\Omega$ und dem Resonanzwiderstand $R = 4{,}8\,\mathrm{k}\Omega$, wenn die Bandbreite $\Delta f = 10$ kHz beträgt ($T = 288$ K)?

A 5.2.15. Wie groß ist die Rauschspannung in einem Empfänger mit dem Resonanzwiderstand $R = 15\ \text{k}\Omega$ und der Rauschzahl $F = 8{,}5$ dB, wenn die Bandbreite 9 kHz beträgt ($T = 288$ K)?

A 5.2.16. Welche Rauschzahl hat ein Verstärker der Bandbreite 10^6 Hz bei Zimmertemperatur $T = 288$ K, wenn bei Anpassung eine zusätzliche Nutzleistung von $5{,}2 \cdot 10^{-14}$ W erforderlich ist, um eine Verdoppelung der empfangenen Nutzleistung gegenüber dem thermischen Rauschen zu erzielen?

A 5.2.17. Ein Empfangsgerät mit dem Resonanzwiderstand $R = 15\ \text{k}\Omega$ und der Rauschzahl $F = 12$ dB soll bei $T = 288$ K höchstens die Rauschspannung 1 μV besitzen. Welche Grenze ergibt sich daraus für die Bandbreite?

A 5.2.18. In einer Empfangsanlage beträgt der Resonanzwiderstand des Schwingkreises $R = 15\ \text{k}\Omega$, der Ersatzwiderstand des Verstärkers $R_{\ddot{a}} = 50\ \text{k}\Omega$. Die Bandbreite ist $\Delta f = 9$ kHz, die Spannungsüberhöhung $v = 3{,}5$. Berechnen Sie die Rauschspannung am Verstärker. Welche Eingangsfeldstärke ist erforderlich, um bei 60% Modulation einen Störabstand von 40 dB zu erhalten? Die effektive Antennenhöhe beträgt $h = 4$ m. Für die Temperatur ist $T = 300$ K zu setzen.

A 5.2.19. Ein Empfänger mit der Rauschzahl $F = 9{,}5$ dB, dem Resonanzwiderstand $R = 300\ \Omega$ und der Bandbreite $\Delta f = 100$ kHz ist an die Empfangsantenne angepaßt. Der Modulationsgrad ist gleich eins. Gefordert wird ein Störabstand von 40 dB. Als Empfangsantenne wird eine Rahmenantenne mit der Empfangsfläche $A = 400\ \text{cm}^2$ verwendet, die Windungszahl beträgt $n = 100$. Empfangen werden Schwingungen der Wellenlänge $\lambda = 5$ m. Wie groß muß die Feldstärke für einwandfreien Empfang sein ($T = 288$ K)?

A 5.2.20. Um wieviel dB erhöht sich der Störabstand in einer Empfangsanlage, wenn a) die Sendefeldstärke, b) der Gewinn verdoppelt werden?

5.3. Elektromagnetische Wellen an leitenden Medien (Wellenleiter und Resonatoren)

E Einführung

Zur Berechnung des Feldes bei der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen an leitenden Medien, z. B. an Drähten, an metallischen Ebenen sowie in rechteckigen oder runden Hohlleitern, führt man die transversalen auf die longitudinalen Komponenten zurück. Dabei ist die elektrische Leitfähigkeit der Medien zu berücksichtigen.

Aus den ersten beiden MAXWELLschen Gleichungen ergeben sich unter Berücksichtigung der linearen Verknüpfungen mit den Materialkonstanten die Beziehungen

$$\mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -\text{rot}\ \mathfrak{E}, \qquad \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \gamma \mathfrak{E} = \text{rot}\ \mathfrak{H}. \tag{1}$$

Es werden periodische Vorgänge betrachtet, bei denen die **zeitliche Abhängigkeit** in der Form $\exp(-\text{i}\,\omega t)$ gegeben ist. Die zeitliche Ableitung einer Feldgröße kann daher durch die Multiplikation mit $-\text{i}\,\omega$ ersetzt werden:

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\text{i}\,\omega, \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\omega^2. \tag{2}$$

Aus (1) folgt

$$-\mathrm{i}\,\omega\mu\mathfrak{H} = -\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}, \qquad (-\mathrm{i}\,\omega\varepsilon + \gamma)\,\mathfrak{E} = \mathrm{rot}\,\mathfrak{H}. \tag{3}$$

Diese beiden Gleichungen können als System zur Bestimmung der Feldvektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ aufgefaßt werden. Zur Eliminierung von $\mathfrak{H}$ dividiert man die erste Gleichung (3) durch $-\mathrm{i}\,\omega\mu$ und wendet anschließend die Operation rot an. Durch Vergleich mit der zweiten Gleichung (3) ergibt sich

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} = (\varepsilon\mu\omega^2 + \mathrm{i}\,\gamma\mu\omega)\,\mathfrak{E}. \tag{4}$$

Die Größe

$$\boxed{\varepsilon' = \varepsilon + \mathrm{i}\,\frac{\gamma}{\omega}} \tag{5}$$

wird als **komplexe Dielektrizitätskonstante,** die Größe

$$\boxed{k' = \sqrt{\varepsilon\mu\omega^2 + \mathrm{i}\,\gamma\mu\omega} = \sqrt{\varepsilon'\mu\omega^2}} \tag{6}$$

als **komplexe Wellenzahl** definiert. Für nichtabsorbierende Stoffe ist die Wellenzahl

$$k = \sqrt{\varepsilon\mu\omega^2} = \frac{2\pi n}{\lambda_0}. \tag{6a}$$

Mit der komplexen Wellenzahl geht (4) über in

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} = k'^2\mathfrak{E}. \tag{7}$$

Anstelle der Operation rot rot kann nach A 1.3.6. auch die Operation grad div $-\triangle$ angewandt werden. Beschränkt man die Untersuchungen auf **ladungsfreie, homogene Medien,** so gilt div $\mathfrak{E} = 0$. Gleichung (7) geht dann in die zeitfreie Wellengleichung

$$\triangle\mathfrak{E} + k'^2\mathfrak{E} = 0 \tag{8}$$

über.

Die **Ausbreitungsrichtung** der Welle wird als **z-Achse** gewählt. Bei periodischen Vorgängen ist der Schwingungszustand für einen bestimmten Zeitpunkt t daher durch eine Gleichung der Form

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}hz}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(hz-\omega t)} \tag{9}$$

gegeben.

Ähnlich der zeitlichen Ableitung kann die Ableitung nach der **longitudinalen Koordinate z** durch eine Multiplikation ersetzt werden:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \mathrm{i}\,h, \qquad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = -h^2. \tag{10}$$

Die **transversalen Koordinaten** werden zunächst allgemein mit u und v bezeichnet. u und v definieren in der Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung ein **orthogonales Koordinatensystem.** In Cartesischen Koordinaten sind u und v identisch mit x und y, in Zylinderkoordinaten identisch mit r und φ. $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}z$ bilden in dieser Folge ein Rechtssystem.
In (9) wird die Abhängigkeit von den transversalen Koordinaten durch $\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}_0(u,v)$ erfaßt. Die betrachteten Wellen haben also die Form

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0(u, v)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(hz-\omega t)}. \tag{11}$$

Das **Bogenelement einer Raumkurve** hat im u,v,z-System die Länge

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\frac{\mathrm{d}u^2}{U^2} + \frac{\mathrm{d}v^2}{V^2} + \mathrm{d}z^2}. \tag{12}$$

U und V sind hier

$$U = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2}}, \qquad V = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2}}. \tag{13}$$

Für Cartesische Koordinaten $u = x$, $v = y$ gilt $U = 1$, $V = 1$. Bei Verwendung von Zylinderkoordinaten $u = r$, $v = \varphi$ erhält man

$$U = 1, \qquad V = \frac{1}{r}. \tag{13a}$$

Der **Laplace-Operator** $\triangle$ kann in einen nur von der longitudinalen Komponente z und in einen nur von den transversalen Komponenten u und v abhängigen Anteil aufgespalten werden:

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \triangle_{u,v}. \tag{14}$$

In Cartesischen Koordinaten ist

$$\triangle_{x,y} = \triangle_{u,v} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{15}$$

in Zylinderkoordinaten nach (1.3./29)

$$\triangle_{r,\varphi} = \triangle_{u,v} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \tag{16}$$

Werden (14) und (10) in die Schwingungsgleichung (8) eingesetzt, so folgt als Differentialgleichung des elektrischen Feldes (11)

$$\triangle_{u,v}\mathfrak{E} + (k'^2 - h^2)\,\mathfrak{E} = 0. \tag{17}$$

Dieselbe Gleichung gilt für die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - hz)}$.

Kennt man als Lösung der Gleichung (17) und ihrer Randbedingungen die Longitudinalkomponenten $\mathfrak{E}_z$ und $\mathfrak{H}_z$, so lassen sich daraus die **Transversalkomponenten** bestimmen. Die Transversalkomponenten der Rotation sind allgemein durch die Formeln

$$\operatorname{rot}_u \mathfrak{E} = V \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial v} - \frac{\partial \mathfrak{E}_v}{\partial z}, \quad \operatorname{rot}_v \mathfrak{E} = \frac{\partial \mathfrak{E}_u}{\partial z} - U \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial u}$$

gegeben. Für Cartesische Koordinaten erhält man daraus (1.3./5), für Zylinderkoordinaten (1.3./9) bis (1.3./11).
Mit den beiden Formeln für die Rotation ergeben sich aus (3) unter Beachtung von (5) und (6) für die Komponenten im u,v,z-Koordinatensystem die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{i}\,\omega\mu\mathfrak{H}_v &= \operatorname{rot}_v \mathfrak{E} = \mathrm{i}\,h\mathfrak{E}_u - U \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial u}, \\ -\mathrm{i}\,\omega\varepsilon'\mathfrak{E}_u &= \operatorname{rot}_u \mathfrak{H} = -\mathrm{i}\,h\mathfrak{H}_v + V \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial v}; \\ \mathrm{i}\,\omega\mu\mathfrak{H}_u &= \operatorname{rot}_u \mathfrak{E} = -\mathrm{i}\,h\mathfrak{E}_v + V \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial v}, \\ -\mathrm{i}\,\omega\varepsilon'\mathfrak{E}_v &= \operatorname{rot}_v \mathfrak{H} = \mathrm{i}\,h\mathfrak{H}_u - U \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial u}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Die ersten beiden Gleichungen (18) liefern

$$\mathfrak{E}_u = \frac{\mathrm{i}}{k'^2 - h^2}\left(hU \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial u} + k'V \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial v}\right), \tag{19}$$

$$\mathfrak{H}_v = \frac{\mathrm{i}}{k'^2 - h^2}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu}}\, k'U \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial u} + hV \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial v}\right), \tag{20}$$

die letzten beiden

$$\mathfrak{E}_v = \frac{\mathrm{i}}{k'^2 - h^2}\left(hV \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial v} - k'U \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial u}\right), \tag{21}$$

$$\mathfrak{H}_u = -\frac{\mathrm{i}}{k'^2 - h^2}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu}}\, k'V \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial v} - hU \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial u}\right). \tag{22}$$

Damit sind die Transversal- auf die Longitudinalkomponenten zurückgeführt.

Bei der **Lösung zylindersymmetrischer Probleme** gelangt man aus der Gleichung (8) bzw. aus (17) zu einer Differentialgleichung der Form

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 Z(\varrho)}{\mathrm{d}\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}Z(\varrho)}{\mathrm{d}\varrho} + \left(1 - \frac{n^2}{\varrho^2}\right) Z(\varrho) = 0.} \tag{23}$$

Sie wird als **Besselsche Differentialgleichung**, ihre Lösungen werden als **Zylinderfunktionen** bezeichnet. Die Zylinderfunktionen sind so normiert, daß die folgenden Rekursionsformeln gelten:

$$Z_{n-1}(\varrho) + Z_{n+1}(\varrho) = \frac{2n}{\varrho} Z_n(\varrho), \tag{24}$$

$$Z_{n-1}(\varrho) - Z_{n+1}(\varrho) = 2 \frac{\mathrm{d}Z_n(\varrho)}{\mathrm{d}\varrho}. \tag{25}$$

Im folgenden wird mit ganzzahligen Werten n gerechnet.
Spezielle Lösungen der BESSELschen Differentialgleichung (23) sind die **Bessel-Funktionen n-ter Ordnung**

$$J_n(\varrho) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2l+n}}{l!\,(n+l)!}. \tag{26}$$

Für ganzzahlige negative Werte $n = -1, -2, \ldots$ sind sie durch die Beziehung

$$J_{-n}(\varrho) = (-1)^n J_n(\varrho) \tag{27}$$

mit den BESSEL-Funktionen für positive Parameter n verknüpft. $J_n(\varrho)$ und $J_{-n}(\varrho)$ sind also linear abhängig.
Das Verhalten für $\varrho = 0$ wird durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} J_0(0) &= 1, \\ J_n(0) &= 0 \qquad \text{für} \qquad n > 0, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

wiedergegeben.
Bei reellen Werten ϱ gilt ferner

$$\lim_{\varrho \to \infty} J_n(\varrho) = 0. \tag{29}$$

Die **Neumannschen Funktionen** sind ebenfalls Lösungen der BESSELschen Differentialgleichung (23). Sie sind für nichtganzzahlige Werte n durch die Gleichung

$$N_n(\varrho) = \frac{J_n(\varrho) \cos n\pi - J_{-n}(\varrho)}{\sin n\pi} \tag{30}$$

gegeben.
Im Falle ganzzahliger Parameter n ergeben sich aus (30) für die NEUMANNschen Funktionen Grenzwerte, die nach der L'HOSPITALschen Regel berechnet werden können.
Für $\varrho \to 0$ wird die NEUMANNsche Funktion logarithmisch unendlich. N_n strebt ebenso wie J_n gegen Null, wenn die reelle Variable ϱ über alle Grenzen wächst.
Bild 5.15 zeigt die Kurven $J_0(\varrho)$ und $J_1(\varrho)$ sowie $N_0(\varrho)$ und $N_1(\varrho)$.

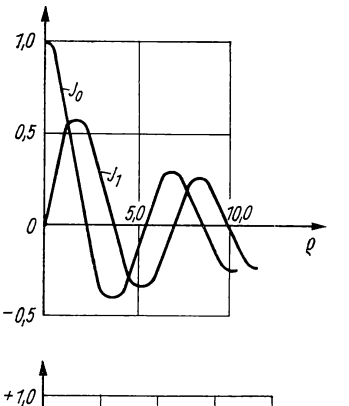


Bild 5.15. a) Die BESSEL-Funktionen $J_0(\varrho)$ und $J_1(\varrho)$

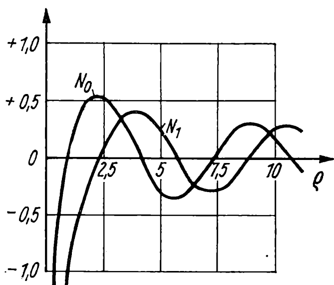


Bild 5.15. b) Die NEUMANNschen Funktionen $N_0(\varrho)$ und $N_1(\varrho)$

Linear unabhängige Lösungen der BESSELschen Differentialgleichung sind die BESSELschen und die NEUMANNschen Funktionen. Die **allgemeine Lösung** der Gleichung (23) lautet daher

$$Z_n(\varrho) = AJ_n(\varrho) + BN_n(\varrho). \tag{31}$$

Ein weiteres Paar linear unabhängiger Lösungen wird durch die HANKELschen Funktionen geliefert.
Die **Hankelschen Funktionen** erster und zweiter Art sind durch die Gleichungen

$$H_n^{(1)}(\varrho) = J_n(\varrho) + \mathrm{i}\, N_n(\varrho), \tag{32}$$

$$H_n^{(2)}(\varrho) = J_n(\varrho) - \mathrm{i}\, N_n(\varrho) \tag{33}$$

definiert. Nur für reelle Argumente ϱ sind $H_n^{(1)}$ und $H_n^{(2)}$ zueinander konjugiert komplex.
Am Nullpunkt gilt

$$\lim_{\varrho \to 0} |H_n^{(1)}(\varrho)| = \infty, \qquad \lim_{\varrho \to 0} |H_n^{(2)}(\varrho)| = \infty. \tag{34}$$

Speziell besteht für kleine Werte $|\varrho|$ die Entwicklung

$$H_0^{(1,2)} = 1 \pm \frac{2\mathrm{i}}{\pi} \ln \frac{\gamma_0 \varrho}{2} + \cdots \tag{35}$$

mit

$$\gamma_0 = \exp\left[\lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} - \ln k\right)\right] = 1{,}781\ldots \qquad (35\text{a})$$

Bei komplexen Werten ϱ sind die HANKELschen Funktionen in der ϱ-Ebene verzweigt. Sie werden eindeutig, wenn man $\varrho = |\varrho|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{arc}\,\varrho}$ setzt und $\mathrm{arc}\,\varrho$ auf $-\pi \leqq \mathrm{arc}\,\varrho < \pi$ beschränkt.
Das Verhalten der HANKELschen Funktionen vom Index n für $\varrho \to 0$ ist durch die asymptotischen Gleichungen

$$\lim_{\varrho\to 0} H_n^{(1)}(\varrho) = \lim_{\varrho\to 0} \frac{(n-1)!}{\mathrm{i}\,\pi}\left(\frac{2}{\varrho}\right)^n, \qquad \lim_{\varrho\to 0} H_n^{(2)}(\varrho) = \lim_{\varrho\to 0} \frac{(n-1)!}{-\mathrm{i}\,\pi}\left(\frac{2}{\varrho}\right)^n$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (36)$$

bestimmt. Für $\varrho \to \infty$ gelten die asymptotischen Gleichungen

$$\lim_{\varrho\to\infty} H_n^{(1)}(\varrho) = \lim_{\varrho\to\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi\varrho}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[\varrho - \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]}, \qquad (37)$$

$$\lim_{\varrho\to\infty} H_n^{(2)}(\varrho) = \lim_{\varrho\to\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi\varrho}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left[\varrho - \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]}. \qquad (38)$$

P **Probleme**

5.3.1. Skineffekt

Ein System aus mehreren metallischen Schichten (vgl. Bild 5.16) enthält Kupfer als oberste Schicht. Die Länge des Schichtsystems beträgt $l = 20$ cm, die Breite $b = 5$ mm, die Dicke der Kupferschicht $a = 1$ mm. An das Schichtsystem wird über die gesamte Länge l eine Wechselspannung der Frequenz $f = 3 \cdot 10^5$ Hz angelegt. Berechnen Sie für die Kupferschicht das elektromagnetische Feld, bestimmen Sie die Eindringtiefe d des elektrischen Stromes und berechnen Sie den Wechselstromwiderstand. Randstörungen sind zu vernachlässigen ($\gamma = 57{,}5 \cdot 10^6\,\Omega^{-1}\,\mathrm{m}^{-1}$).

Lösung

Wir betrachten das Feld in einem metallischen Halbraum, der durch die Ebene $x = 0$ begrenzt wird. Die x-Achse weise in den leeren Raum. In die Richtung der sich fortpflanzenden Welle legen wir die z-Achse (vgl. Bild 5.16). Werden Randstörungen vernachlässigt, so besteht nur eine Abhängigkeit von den Koordinaten z und x. Daher kann allgemein

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0 \qquad (1)$$

gesetzt werden.

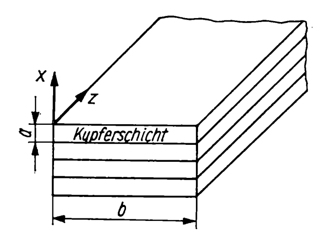


Bild 5.16. Mehrschichtsystem mit Kupfer als oberster Schicht

Die longitudinale Komponente $\mathfrak{H}_z$ nehmen wir gleich Null an. Bei Benutzung Cartesischer Koordinaten ist in (5.3./19) bis (5.3./22) $u = x$, $v = y$ zu setzen. Wegen (1) folgt daher für $\mathfrak{H}_z = 0$ aus (5.3./21) und (5.3./22)

$$\mathfrak{E}_y = 0, \qquad \mathfrak{H}_x = 0. \tag{2}$$

Die longitudinale Komponente $\mathfrak{E}_z$ muß der Gleichung (5.3./17) genügen. Schreiben wir

$$\mathfrak{E}_z = A(x)\, e^{i(hz-\omega t)}, \tag{3}$$

so verbleibt für $A(x)$ die Differentialgleichung

$$\frac{d^2A(x)}{dx^2} + (k'^2 - h^2)\, A(x) = 0. \tag{4}$$

Ihre Lösung lautet

$$A(x) = A_1\, e^{i\sqrt{k'^2-h^2}\,x} + A_2\, e^{-i\sqrt{k'^2-h^2}\,x}. \tag{5}$$

Das Wurzelvorzeichen legen wir derart fest, daß der Imaginärteil stets positiv ist.
Wir betrachten zunächst die Lösung für Luft, d. h. im Halbraum $x > 0$, und nehmen dabei eine von Null verschiedene Leitfähigkeit an. Der imaginäre Anteil der Größe $\sqrt{k'^2 - h^2}$ bewirkt, daß für $x \to +\infty$ $A(x)$ über alle Grenzen wächst, wenn nicht

$$A_2 = 0 \qquad \text{für} \qquad x > 0 \tag{6a}$$

gilt. Dagegen führt im Halbraum $x < 0$ die Leitfähigkeit dazu, daß der erste Summand in (6) über alle Grenzen wächst. Es muß daher

$$A_1 = 0 \qquad \text{für} \qquad x < 0 \tag{6b}$$

gelten. Somit folgt

$$A(x) = A_1\, e^{i\sqrt{k_0^2-h^2}\,x} \qquad \text{für} \qquad x > 0, \tag{7}$$

$$A(x) = A_2\, e^{-i\sqrt{k_M'^2-h^2}\,x} \qquad \text{für} \qquad x \leqq 0. \tag{8}$$

An der Trennebene $x = 0$ müssen die **Tangentialkomponenten** des elektrischen Feldes übereinstimmen. Das bedeutet in (7) und (8)

$$A_1 = A_2 = A. \tag{9}$$

Die transversalen Komponenten schreiben wir

$$\mathfrak{E}_x = B(x)\, e^{i(hz-\omega t)}, \tag{10}$$

$$\mathfrak{H}_y = C(x)\, e^{i(hz-\omega t)}. \tag{11}$$

Wenden wir (5.3./19) und (5.3./20) an, so folgt

$$B(x) = -\frac{hA}{\sqrt{k_0^2 - h^2}}\, e^{i\sqrt{k_0^2-h^2}\,x} \qquad \text{für} \qquad x > 0, \tag{12}$$

$$B(x) = \frac{hA}{\sqrt{k_M'^2 - h^2}}\, e^{-i\sqrt{k_M'^2-h^2}\,x} \qquad \text{für} \qquad x \leqq 0; \tag{13}$$

$$C(x) = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\frac{k_0 A}{\sqrt{k_0^2 - h^2}}\, e^{i\sqrt{k_0^2-h^2}\,x} \qquad \text{für} \qquad x > 0, \tag{14}$$

$$C(x) = \sqrt{\frac{\varepsilon_M' + i\,\dfrac{\sigma}{\omega}}{\mu_M}}\,\frac{k_M' A}{\sqrt{k_M'^2 - h_2}}\, e^{-i\sqrt{k_M'^2-h^2}\,x} \qquad \text{für} \qquad x \leqq 0. \tag{15}$$

Die **Normalkomponenten** von $\mathfrak{H}$ müssen für $x = 0$ **stetig** übergehen. Das erfordert nach (14) und (15)

$$\frac{k_0^2}{\mu_0\sqrt{k_0^2 - h^2}} = -\frac{k_M'^2}{\mu_M\sqrt{k_M'^2 - h^2}}. \tag{16}$$

Wir können $\mu_M = \mu_0$ setzen und nach $1/h^2$ auflösen. Damit ergibt sich

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{k_0^2} + \frac{1}{k_M'^2}. \tag{17}$$

Im Falle eines gut leitenden Mediums überwiegt die Leitungsstromdichte $\gamma\mathfrak{E}$ die Verschiebungsstromdichte $\omega\varepsilon\mathfrak{E}$. Daher können wir mit

$$k_M' = \sqrt{i\,\mu_0\gamma\omega} = (1 + i)\sqrt{\frac{\mu_0\gamma\omega}{2}} \tag{18}$$

rechnen. Gleichzeitig gilt $|k_M'| \gg k_0$, so daß wir für gute Leiter

$$h^2 = k_0'^2 \tag{19}$$

setzen können.

Aus den Amplituden (12) und (13) entnehmen wir

$$|\mathfrak{E}_z| \ll |\mathfrak{E}_x| \quad \text{für} \quad x > 0, \qquad |\mathfrak{E}_z| \gg |\mathfrak{E}_x| \quad \text{für} \quad x < 0.$$

Im Vakuum hat das elektrische Feld die Richtung normal zur Leiteroberfläche, im Leiter dagegen die Richtung der fortschreitenden Welle.

Wir betrachten das Feld im Leiterinneren. Es ist nach (13) und wegen $|k_M'| \gg k_0$ durch

$$\mathfrak{E}_z = A\, e^{-ik_M' x}\, e^{-i\omega t} = A\, e^{\sqrt{\frac{\mu\gamma\omega}{2}}\,x}\, e^{-i\left(\omega t + \sqrt{\frac{\mu\gamma\omega}{2}}\,x\right)} \tag{20}$$

gegeben. Mit zunehmender Eindringtiefe nimmt hiernach die elektrische Feldstärke und ebenso die **Stromdichte** $J = \gamma\mathfrak{E}$ rasch ab. Der Wechselstrom nutzt scheinbar nur eine dünne Schicht aus. Ihre Stärke folgt aus (20) gemäß

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha}. \tag{21}$$

Man kann demnach bei hinreichender Dicke des Mediums so rechnen, als wäre der Strom mit der an der Leiteroberfläche bestehenden Stromdichte γA auf eine Schicht der Stärke

$$\boxed{d = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}} \tag{22}$$

gleichmäßig verteilt, der übrige Leiter dagegen völlig stromfrei. Im vorliegenden Fall folgt als Eindringtiefe

$$d = \sqrt{\frac{2}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 57{,}5 \cdot 10^{6} \cdot 2\pi \cdot 3 \cdot 10^{5}}}\ \mathrm{m} = 0{,}12\ \mathrm{mm}.$$

Es gilt also $d = 0{,}12\ \mathrm{mm} \ll a = 1\ \mathrm{mm}$.
Als Widerstand der Kupferschicht und des Schichtsystems ergibt sich daher

$$R = \frac{l}{\gamma d b} = \frac{0{,}20}{57{,}5 \cdot 10^{6} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^{-3}}\ \Omega = 5{,}7 \cdot 10^{-3}\ \Omega.$$

5.3.2. Zylindrischer Leiter

Bestimmen Sie das elektromagnetische Feld im Innen- und im Außenraum eines zylindrischen Leiters. Welche Phasengeschwindigkeit und welche Dämpfungskonstante hat eine Schwingung der Frequenz $f = 3 \cdot 10^{8}$ Hz, wenn die Wellenausbreitung längs eines Stahldrahtes mit dem spezifischen Widerstand $\frac{1}{\gamma} = 0{,}2\ \Omega\ \mathrm{mm^2/m}$ erfolgt? Der Durchmesser des Drahtes sei $2R_0 = 0{,}02$ mm.

Lösung

a) **Die Feldkomponenten**

Wir führen Zylinderkoordinaten r, φ, z ein und machen für die longitudinale Komponente des Magnetfeldes den Ansatz

$$\mathfrak{H}_z = 0. \tag{1}$$

Die Zylindersymmetrie bedingt

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0. \tag{2}$$

Daraus ergibt sich nach (5.3./21) und (5.3./22)

$$\mathfrak{E}_\varphi = 0, \qquad \mathfrak{H}_r = 0. \tag{3}$$

Für die longitudinale Komponente des elektrischen Feldes schreiben wir

$$\mathfrak{E}_z = A(\varrho)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(hz - \omega t)} \tag{4}$$

mit

$$\varrho = \sqrt{k'^2 - h^2}\, r. \tag{5}$$

Zur Bestimmung der Funktion $A(\varrho)$ erhalten wir nach (5.3./17) die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 A}{\mathrm{d}\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\varrho} + A = 0. \tag{6}$$

Sie ist ein Spezialfall der BESSELschen Gleichung (5.3./23) für $n = 0$. Ihre allgemeine Lösung für das Innere des zylindrischen Leiters schreiben wir nach (5.3./31)

$$A(\varrho) = CJ_0(\varrho) + DN_0(\varrho). \tag{7}$$

Für $r \to 0$ bzw. $\varrho \to 0$ wächst N_0 über alle Grenzen. Damit würde das Feld in der Drahtachse unendlich groß werden. Das läßt sich mittels

$$D = 0 \tag{8}$$

verhindern. Man erhält somit für das **metallische Medium** $r \leqq R_0$

$$\mathfrak{E}_z = CJ_0\left(\sqrt{k_\mathrm{M}'^2 - h^2}\, r\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(hz-\omega t)} \qquad \text{für} \qquad r \leqq R_0. \tag{9}$$

Die transversalen Komponenten werden nach (5.3./19) und (5.3./20)

$$\mathfrak{E}_r = \frac{\mathrm{i}h}{\sqrt{k_\mathrm{M}'^2 - h^2}}\, CJ_0'\left(\sqrt{k_\mathrm{M}'^2 - h^2}\, r\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(hz-\omega t)}, \tag{10}$$

$$\mathfrak{H}_\varphi = \frac{\mathrm{i}k_\mathrm{M}'}{\sqrt{k_\mathrm{M}'^2 - h^2}} \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu}}\, CJ_0'\left(\sqrt{k_\mathrm{M}'^2 - h^2}\, r\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(hz-\omega t)}. \tag{11}$$

J_0' bedeutet die Ableitung der BESSEL-Funktion nach dem Argument

$$\varrho = \sqrt{k_\mathrm{M}'^2 - h^2}\, r.$$

Im **Außenraum** $r \geqq R_0$ wird das Feld am zweckmäßigsten durch die beiden HANKELschen Funktionen dargestellt:

$$\mathfrak{E}_z = \left[AH_0^{(1)}\left(\sqrt{k_0^2 - h^2}\, r\right) + BH_0^{(2)}\left(\sqrt{k_0^2 - h^2}\, r\right)\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}(hz-\omega t)} \qquad \text{für} \qquad r \geqq R_0. \tag{12}$$

ϱ ist im allgemeinen komplex. Beachtet man die asymptotischen Gleichungen nach (5.3./37)

$$H_n^{(1)}(\varrho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\varrho}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[\varrho - \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]}, \qquad H_n^{(2)}(\varrho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\varrho}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left[\varrho - \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]}, \tag{13}$$

so ergibt sich wegen der Vorzeichenfestsetzung (Imaginärteil positiv), daß für $r \to \infty$ die Funktion $H_n^{(1)}$ gegen Null, dagegen $H_n^{(2)}$ gegen Unendlich strebt. Um das Auftreten einer unendlich großen Feldstärke zu verhindern, muß man in (12) daher

$$B = 0 \tag{14}$$

setzen. Es verbleibt somit für den Außenraum

$$\mathfrak{E}_z = AH_0^{(1)}\left(\sqrt{k_0^2 - h^2}\, r\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(hz-\omega t)} \qquad \text{für} \qquad r \geqq R_0. \tag{15}$$

Nach (5.3./19) und (5.3./20) ergeben sich die Transversalkomponenten

$$\mathfrak{E}_r = \frac{\mathrm{i}\,h}{\sqrt{k_0^2 - h^2}}\, A H_0^{(1)\prime}\left(\sqrt{k_0^2 - h^2}\, r\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(hz-\omega t)}, \tag{16}$$

$$\mathfrak{H}_\varphi = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, \frac{\mathrm{i}\,k_0}{\sqrt{k_0^2 - h^2}}\, A H_0^{(1)\prime}\left(\sqrt{k_0^2 - h^2}\, r\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(hz-\omega t)}. \tag{17}$$

b) **Grenzbedingungen für $r = R_0$**

Auf der Oberfläche des Drahtes müssen die Tangentialkomponenten $\mathfrak{E}_z$ und $\mathfrak{H}_\varphi$ stetig sein. Das bedingt nach (9) und (15) die Gleichung

$$C J_0\left(\sqrt{k_M'^2 - h^2}\, R_0\right) - A H_0^{(1)}\left(\sqrt{k_0^2 - h^2}\, R_0\right) = 0. \tag{18}$$

Nach (11) und (17) folgt

$$C \frac{k_M' \sqrt{\varepsilon'}}{\sqrt{k_M'^2 - h^2}}\, J_0'\left(\sqrt{k_M'^2 - h^2}\, R_0\right) - A \frac{k_0 \sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{k_0^2 - h^2}}\, H_0^{(1)\prime}\left(\sqrt{k_0^2 - h^2}\, R_0\right) = 0. \tag{19}$$

Das aus (18) und (19) gebildete Gleichungssystem ist nur lösbar, wenn seine Koeffizientendeterminante verschwindet, d. h., wenn

$$\frac{H_0^{(1)}\left(\sqrt{k_0^2 - h^2}\, R_0\right)}{J_0\left(\sqrt{k_M^{2\prime} - h^2}\, R_0\right)} = \frac{k_0 \sqrt{k_M'^2 - h^2}}{k_M' \sqrt{k_0^2 - h^2}} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_M'}}\, \frac{H_0^{(1)\prime}\left(\sqrt{k_0^2 - h^2}\, R_0\right)}{J_0'\left(\sqrt{k_M'^2 - h^2}\, R_0\right)} \tag{20}$$

gilt. Hierin ist nur h unbekannt.
Die transzendente Gleichung läßt sich unter Ausnutzung der Eigenschaften von J_1 und $H_n^{(1)}$ vereinfachen. Für gute Leiter kann die komplexe Wellenzahl k_M' nach (5.3./6) gleich

$$k_M' = \sqrt{\mathrm{i}\,\gamma\mu\omega} = (1 + \mathrm{i}) \sqrt{\frac{\gamma\mu\omega}{2}}, \tag{21}$$

die komplexe Dielektrizitätskonstante nach (5.3./5) gleich

$$\varepsilon' = \mathrm{i}\,\frac{\gamma}{\omega} \tag{22}$$

gesetzt werden. Geht man davon aus, daß h wie beim ebenen Problem in der Größenordnung von k_0 liegt, so gelten die Ungleichungen

$$|k_M'| \gg k_0, \qquad |k_M'| \gg h. \tag{23}$$

Wir können daher im Argument der Bessel-Funktionen $\sqrt{k_M'^2 - h^2}\, R_0$ durch $k_M' R_0$ ersetzen. Die Bessel-Funktion ist nach den Definitionsgleichungen (5.3./32) und (5.3./33) gleich

$$J_n(k_M' R_0) = \frac{1}{2}\, [H_n^{(1)}(k_M' R_0) + H_n^{(2)}(k_M' R_0)]. \tag{24}$$

ω und R_0 werden als so groß vorausgesetzt, daß für metallische Leiter $|k_M' R_0| \gg 1$ gilt. Auf Grund der asymptotischen Gleichungen (5.3./37) und (5.3./38) folgt aus (24)

$$\frac{J_n(k_M' R_0)}{J_n'(k_M' R_0)} = \mathrm{i}. \tag{25}$$

Mittels (5.3./35) ergibt sich wegen $k_0 \approx h$

$$\frac{H_0^{(1)}\left(\sqrt{k_0^2 - h^2}\, R_0\right)}{H_0^{(1)\prime}\left(\sqrt{k_0^2 - h^2}\, R_0\right)} = \left(-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2} + \ln\frac{\gamma_0 \sqrt{k_0^2 - h^2}\, R_0}{2}\right) \sqrt{k_0^2 - h^2}\, R_0. \tag{26}$$

Mit diesen Näherungen erhalten wir aus (20) die Gleichung

$$u \ln u = v. \tag{27}$$

Darin haben u und v die Bedeutung

$$u = \frac{-\gamma_0^2(k_0^2 - h^2)\, R_0^2}{4}, \qquad v = -\frac{\mathrm{i}\,\gamma_0^2}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon'}}\, k_0 R_0 \tag{28}$$

mit $\gamma_0 = 1{,}781$ nach (5.3./35a).

c) Kettenbruchverfahren zur numerischen Berechnung von *h*

Wir gehen davon aus, daß $\ln u$ gegen u langsam veränderlich ist. Bezeichnet daher u_n die n-te Näherung, so kann für die $(n+1)$-te Näherung

$$u_{n+1} \ln u_n = v \tag{29}$$

geschrieben werden. Geht man von $u_0 = v$ aus, so folgt

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{v}{\ln v}, \\ u_2 &= \frac{v}{\ln u_1} = \frac{v}{\ln \dfrac{v}{\ln v}}, \\ u_3 &= \frac{v}{\ln u_2} = \frac{v}{\ln \dfrac{v}{\ln \dfrac{v}{\ln v}}}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Mit den vorgegebenen Zahlen folgt nach (5.3./6b)

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{1}\ \mathrm{m}^{-1} = 6{,}28\ \mathrm{m}^{-1}.$$

Für v erhalten wir aus (28) in Verbindung mit (22)

$$\begin{aligned} v &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\, 1{,}781^2 \sqrt{-\mathrm{i}\, 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-6} \cdot 2\pi \cdot 3 \cdot 10^8}\; 6{,}28 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-3} \\ &= (1 + \mathrm{i})\, 4{,}07 \cdot 10^{-9}. \end{aligned}$$

Aus (30) folgt damit

$$u_1 = 3 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}0,66}, \qquad u_2 = 2{,}6 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}0,76},$$

$$u_3 = 2{,}60 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}0,75} = 2{,}60 \cdot 10^{-10}(\cos 43^\circ + \mathrm{i}\sin 43^\circ).$$

Der letzte Wert kann bereits als ausreichende Näherung angesehen werden. Damit ergibt sich aus (28)

$$h^2 = k_0{}^2 + \frac{4u}{\gamma_0{}^2 R_0{}^2} \tag{31}$$

bzw. mit den vorgegebenen Zahlen und dem errechneten Näherungswert

$$h^2 = \left[6{,}28^2 + \frac{4 \cdot 2{,}60 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}0,75}}{(1{,}781 \cdot 10^{-5})^2}\right]\mathrm{m}^{-2} = (41{,}84 + \mathrm{i}\,2{,}23)\,\mathrm{m}^{-2}.$$

Daraus erhalten wir

$$h = 6{,}47\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}0,027} = (6{,}47 + \mathrm{i}\,0{,}17)\,\mathrm{m}^{-1}.$$

Für die Abhängigkeit der Welle von z und t folgt damit nach (12)

$$\mathfrak{E}_z = \mathfrak{E}_0(r)\,\mathrm{e}^{-0,017z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(6,47z-\omega t)}. \tag{32}$$

Um die Phasengeschwindigkeit c_{Ph} der Welle bei der Ausbreitung längs des zylindrischen Leiters zu erhalten, gehen wir von

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c_0}, \qquad \mathrm{Re}\,h = \frac{\omega}{c_{\mathrm{Ph}}} \tag{33}$$

aus. Danach können wir schreiben

$$c_{\mathrm{Ph}} = \frac{6{,}28}{6{,}47}\,c_0 = 0{,}97 c_0.$$

5.3.3. Rechteckiger Hohlleiter

In einem rechteckigen Hohlleiter mit den Abmessungen $a = 30$ mm, $b = 50$ mm wird durch eine Schleife eine elektromagnetische Welle erzeugt. Sie soll durch den Hohlleiter im Wellenlängenbereich 7,7 ··· 9,1 cm übertragen werden. Untersuchen Sie, welche Wellentypen durch den Hohlleiter weitergeleitet werden. Wie groß ist der Abstand zweier Schwingungsknoten für $\lambda = 8{,}4$ cm bei stehenden Hohlleiterwellen?

Lösung

Die Ausbreitungsrichtung wird als z-Achse gewählt. x- und y-Achse sind durch zwei zueinander senkrecht stehende Kanten des Hohlleiters bestimmt (vgl. Bild 5.17).
Wir gehen vom Ansatz

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - hz)}, \qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - hz)} \tag{1}$$

aus und berechnen die Transversal- aus den Longitudinalkomponenten. Für $\mathfrak{E}_z$ besteht nach (5.3./17) die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_z}{\partial y^2} + (k^2 - h^2)\,\mathfrak{E}_z = 0 \tag{2}$$

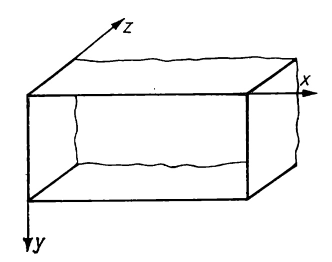


Bild 5.17. Koordinatensystem zur Darstellung der Hohlleiterwellen

mit

$$k = k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\, \omega . \tag{3}$$

$\mathfrak{H}_z$ erfüllt dieselbe Differentialgleichung wie $\mathfrak{E}_z$.
Die Gleichung (2) wird durch den Ansatz

$$\mathfrak{E}_z = f(x)\, g(y) \tag{4}$$

gelöst. Setzen wir diesen in (2) ein, so folgt

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\, g(y) + \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2}\, f(x) + (k^2 - h^2)\, f(x)\, g(y) = 0 . \tag{5}$$

Diese Gleichung läßt sich separieren:

$$\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}}{f(x)} + k^2 - h^2 = - \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2}}{g(y)} . \tag{6}$$

Links tritt nur x, rechts nur y als unabhängige Variable auf. Diese beiden Variablen können willkürlich geändert werden. Das kann nur dann mit der bestehenden Gleichung (6) verträglich sein, wenn hier sowohl die linke als auch die rechte Seite konstant sind. Anstelle von (6) ergeben sich damit die beiden gewöhnlichen Gleichungen

$$\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}}{f(x)} = -\varkappa^2, \qquad \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2}}{g(y)} = -\mu^2 . \tag{7}$$

$\varkappa$ und μ sind Konstanten. Sie sind mit $k^2 - h^2$ durch die Beziehung

$$\varkappa^2 + \mu^2 = k^2 - h^2 \tag{8}$$

verknüpft, wie man sich durch Addition beider Gleichungen (7) und Vergleich mit (6) überzeugt. Die Gleichungen (7) sind homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Sie haben die allgemeine Lösung

$$f(x) = A \cos \varkappa x + B \sin \varkappa x, \qquad g(y) = C \cos \mu y + D \sin \mu y . \tag{9}$$

Wir können somit für die Longitudinalkomponenten schreiben

$$\mathfrak{E}_z = (A_1 \cos \varkappa x + B_1 \sin \varkappa x)\,(C_1 \cos \mu x + D_1 \sin \mu y)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(hz - \omega t)}, \tag{10}$$

$$\mathfrak{H}_z = (A_2 \cos \varkappa x + B_2 \sin \varkappa x)\,(C_2 \cos \mu y + D_2 \sin \mu y)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(hz - \omega t)} . \tag{11}$$

Man unterscheidet in der Hohlleitertechnik zwischen den **TM-Wellen** (auch ***E*-Wellen**), für die $\mathfrak{H}_z = 0$ ist (transversales Magnetfeld), und den **TE-Wellen** (auch ***H*-Wellen**), für die $\mathfrak{E}_z = 0$ gilt (transversales elektrisches Feld).

Es werden zunächst **TM-Wellen** betrachtet. Am Rand des Hohlleiters müssen die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes stetig sein. Setzen wir voraus, daß der Hohlraum von idealleitendem Material umgeben ist, so muß also

$$(\mathfrak{E}_z)_{\text{Rand}} = 0 \tag{12}$$

sein. Das bedeutet: Es ist

$$\mathfrak{E}_z = 0 \quad \text{für} \quad x = 0 \quad \text{und} \quad x = a;\ y = 0 \quad \text{und} \quad y = b. \tag{13}$$

Die Bedingungen (13) werden erfüllt für

$$A_1 = C_1 = 0; \tag{14a}$$

$$\varkappa a = n_x \pi \quad \text{mit} \quad n_x = 1, 2, 3, \ldots; \tag{14b}$$

$$\mu b = n_y \pi \quad \text{mit} \quad n_y = 1, 2, 3, \ldots \tag{14c}$$

Das Produkt der Konstanten $B_1 \cdot D_1$ können wir zu einer einheitlichen Konstanten zusammenfassen. Wir schreiben diese im Hinblick auf die Transversalkomponenten

$$\mathrm{i}\, E_{n_x n_y} (k_0^2 - h^2).$$

Damit folgt aus (10)

$$\mathfrak{E}_z = \mathrm{i}\, E_{n_x n_y} (k_0^2 - h^2) \sin \frac{n_x \pi x}{a} \sin \frac{n_y \pi y}{b} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(hz - \omega t)}. \tag{15}$$

Die Transversalkomponenten ergeben sich auf Grund der Formeln (5.3./19) bis (5.3./23). Man erhält

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{E}_x &= -E_{n_x n_y} \frac{n_x \pi h}{a} \cos \frac{n_x \pi x}{a} \sin \frac{n_y \pi y}{b} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(hz - \omega t)}, \\
\mathfrak{E}_y &= -E_{n_x n_y} \frac{n_y \pi h}{b} \sin \frac{n_x \pi x}{a} \cos \frac{n_y \pi y}{b} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(hz - \omega t)}, \\
\mathfrak{H}_x &= E_{n_x n_y} \varepsilon_0 \omega \frac{n_y \pi}{b} \sin \frac{n_x \pi x}{a} \cos \frac{n_y \pi y}{b} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(hz - \omega t)}, \\
\mathfrak{H}_y &= -E_{n_x n_y} \varepsilon_0 \omega \frac{n_x \pi}{a} \cos \frac{n_x \pi x}{a} \sin \frac{n_y \pi y}{b} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(hz - \omega t)}.
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Die noch unbestimmte Größe h folgt aus (8), wenn man darin (14b) und (14c) einsetzt. Wir erhalten

$$h^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} - \frac{n_x^2 \pi^2}{a^2} - \frac{n_y^2 \pi^2}{b^2}. \tag{17}$$

Soll die Welle nicht abklingen, so muß h^2 positiv, h also reell sein. Das bedeutet: Es muß

$$\boxed{\lambda \leqq \lambda_g = \frac{2}{\sqrt{\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2}}}} \tag{18}$$

erfüllt sein. λ_g wird als **Grenzwellenlänge** bezeichnet. Die Weiterleitung von elektromagnetischen Wellen in einem Hohlraum ist somit auf kleine Wellenlängen (Größenordnung: Hohlleiterabmessung) beschränkt. Wir setzen λ_g in (17) ein und erhalten

$$h = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_g^2}}\,. \tag{19}$$

Die Fortpflanzung längs der z-Achse ist also nicht durch $\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{\lambda}\,z\right)$ bestimmt, sondern durch $\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{\Lambda}\,z\right)$, mit der scheinbaren Wellenlänge

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_g^2}}}\,. \tag{20}$$

Diese Formel ist allgemein gültig, unabhängig von der Form des Hohlleiters.
Bei den **TE- bzw. H-Wellen** gilt im gesamten Hohlraum $\mathfrak{E}_z = 0$.
Die **Randbedingungen** erfordern, daß die Normalkomponente der magnetischen Flußdichte stetig übergeht. An der Oberfläche des idealen Leiters gilt daher

$$\mathfrak{B}_n = \mu \mathfrak{H}_n = 0\,.$$

Um eine Randbedingung für $\mathfrak{H}_z$ zu erhalten, gehen wir davon aus, daß diese Longitudinalkomponente für die H-Wellen die Bedeutung eines Potentials besitzt: Die Transversalkomponenten $\mathfrak{H}_x$ bzw. $\mathfrak{H}_y$ ergeben sich nach (5.3./20) und (5.3./22) bis auf einen konstanten Faktor durch partielle Ableitung nach x bzw. y. $\mathfrak{H}_x$ und $\mathfrak{H}_y$ haben somit die Bedeutung von Feldkomponenten, die aus dem »Potential« $\mathfrak{H}_z$ abgeleitet werden können. Der aus den Komponenten $\mathfrak{H}_x$ und $\mathfrak{H}_y$ gebildete Vektor steht wegen $\mathfrak{H}_n = 0$ an der Leiterfläche zu dieser parallel. Andererseits muß die Äquipotentialfläche $\mathfrak{H}_z = \text{const}$ von den Feldlinien des Vektorfeldes $\mathfrak{H}_x\,\mathfrak{i} + \mathfrak{H}_y\,\mathfrak{j}$ senkrecht durchsetzt werden. Die Äquipotentialflächen $\mathfrak{H} = \text{const}$ stehen daher auf der Leiterfläche senkrecht. Es gilt also

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial n}\right)_{\text{Rand}} = 0\,. \tag{21}$$

Die Lösung der Differentialgleichung und die Erfüllung der Randbedingungen geht bei den **TE-Wellen** in gleicher Weise wie bei den TM-Wellen vor sich. Es ergibt sich analog (15) aus (11)

$$\mathfrak{H}_z = \frac{k_0^2 - h^2}{k_0^2}\, H_{n_x n_y} \cos\frac{n_x \pi x}{a} \cos\frac{n_y \pi y}{b}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(hz - \omega t)}\,. \tag{22}$$

Diese Lösung erfüllt die aus (21) folgenden Randbedingungen

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} = 0 \qquad \text{für} \qquad x = 0 \quad \text{und} \quad x = a \tag{23}$$

und

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} = 0 \qquad \text{für} \qquad y = 0 \quad \text{und} \quad y = b. \tag{24}$$

Die Fortpflanzungskonstante h stimmt mit dem aus (17) hervorgehenden Wert überein. Man erhält also auch für die Grenzwellenlänge und für die scheinbare Wellenlänge Λ die nach (18) und (20) sich ergebenden Ausdrücke.
Aus (22) gelangt man zu den Transversalkomponenten

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{E}_x &= -\mathrm{i}\, Z_0 \frac{n_y \pi}{k_0 b} H_{n_x n_y} \cos \frac{n_x \pi x}{a} \sin \frac{n_y \pi y}{b}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(hz-\omega t)}, \\
\mathfrak{E}_y &= \mathrm{i}\, Z_0 \frac{n_x \pi}{k_0 a} H_{n_x n_y} \sin \frac{n_x \pi x}{a} \cos \frac{n_y \pi y}{b}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(hz-\omega t)}, \\
\mathfrak{H}_x &= -\mathrm{i} \frac{h}{k_0^2} \frac{n_x \pi}{a} H_{n_x n_y} \sin \frac{n_x \pi x}{a} \cos \frac{n_y \pi y}{b}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(hz-\omega t)}, \\
\mathfrak{H}_y &= -\frac{\mathrm{i}\, h}{k_0^2} \frac{n_y \pi}{b} H_{n_x n_y} \cos \frac{n_x \pi x}{a} \sin \frac{n_y \pi y}{b}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(hz-\omega t)}.
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Darin steht Z_0 für den Wellenwiderstand des Vakuums.

Wie man aus (15) und (16) für die TM-Wellen entnimmt, bedeutet $n_x = 0$ oder $n_y = 0$, daß das gesamte elektromagnetische Feld verschwindet. Einfachste Welle bei den TM- bzw. E-Wellen ist daher die E_{11}-Welle, d. h. die TM-Welle mit $n_x = 1$, $n_y = 1$.
Aus (18) erhält man mit den vorgegebenen Abmessungen für die Grenzwellenlänge der E_{11}-Welle

$$\lambda_g = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{3{,}0}\right)^2 + \left(\frac{1}{5{,}0}\right)^2}} \text{ cm} = 5{,}15 \text{ cm}.$$

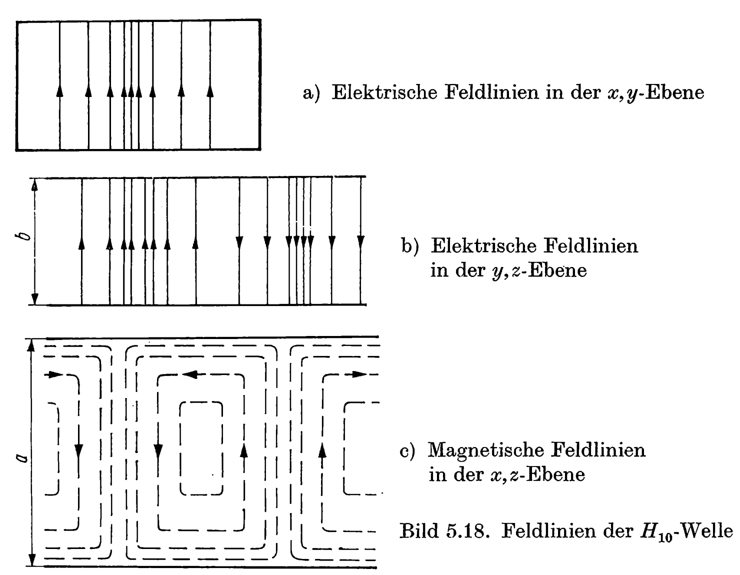
Im vorgegebenen Hohlleiter kann daher keine E_{11}-Welle im Wellenlängenbereich zwischen 7,7 und 9,1 cm übertragen werden. Da sich mit zunehmender Ordnung die Grenzwellenlänge verringert, ist mit dem vorgegebenen Hohlleiter überhaupt keine Übertragung von E-Wellen möglich.
Für die H_{10}-Welle ergibt sich aus (18) die Grenzwellenlänge $\lambda_g = 2a = 6$ cm. Auch diese Welle kann nicht übertragen werden, wenn der Wellenlängenbereich zwischen 7,7 und 9,1 cm liegt. Dagegen folgt für die H_{01}-Welle $\lambda_g = 10$ cm, für die H_{20}-Welle $\lambda_g = 5$ cm. Im vorliegenden Hohlleiter mit rechteckigem Querschnitt kann sich innerhalb des festgelegten Wellenlängenbereiches $\lambda = 7{,}7 \cdots 9{,}1$ cm nur die **H_{01}-Welle** ausbilden. Sie wird durch keine andere Welle gestört.
Der Abstand zweier Schwingungsknoten bei einem System stehender Wellen ist gleich $\Lambda/2$, d. h. nach (20) für $\lambda = 8{,}4$ cm:

$$\frac{\Lambda}{2} = \frac{8{,}4}{2\sqrt{1 - \left(\frac{8{,}4}{10}\right)^2}} \text{ cm} = 7{,}7 \text{ cm}.$$

Er ist also bei der gleichen Frequenz im Hohlleiter größer als im freien Raum. Für die Transversalkomponenten des Feldes erhalten wir

$$\mathfrak{E}_x \sim \sin \frac{\pi y}{b}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(hz-\omega t)}, \qquad \mathfrak{H}_y \sim \sin \frac{\pi y}{b}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(hz-\omega t)}. \tag{26}$$

Die Komponenten $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{H}_x$, $\mathfrak{H}_z$ sind gleich Null. Es ergeben sich damit die in Bild 5.18 dargestellten Feldlinien.



a) Elektrische Feldlinien in der x,y-Ebene

b) Elektrische Feldlinien in der y,z-Ebene

c) Magnetische Feldlinien in der x,z-Ebene

Bild 5.18. Feldlinien der H_{10}-Welle

5.3.4. Kreiszylindrischer Hohlleiter

Ein kreiszylindrischer Hohlleiter hat den Kreisradius $R = 4$ cm. Untersuchen Sie die auftretenden Hohlleiterwellen. Für welche Wellenlängen tritt nur eine Hohlleiterwelle auf?

Lösung

Es werden Zylinderkoordinaten eingeführt. Unter Berücksichtigung von (5.3./16) und des Exponentialansatzes (5.3./11) ergibt sich aus (5.3./17) für den Hohlraum

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_z}{\partial \varphi^2} + \left(\frac{4\pi}{\lambda^2} - h^2\right) \mathfrak{E}_z = 0. \tag{1}$$

Hierin setzen wir analog (5.3.4./19)

$$h = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_g{}^2}}. \tag{2}$$

Die Separation der Gleichung (1) erfolgt durch den Ansatz

$$\mathfrak{E}_z = f(r) \cos m\varphi. \tag{3}$$

Darin muß m ganzzahlig

$$m = 0, 1, 2, \ldots$$

sein, um bezüglich φ die Periodizität 2π der Lösung zu gewährleisten.

(3) in (1) eingesetzt, führt auf die modifizierte BESSELsche Differentialgleichung

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr} + \left(\frac{4\pi^2}{\lambda_g^2} - \frac{m^2}{r^2}\right) f(r) = 0, \tag{4}$$

die mit Hilfe der Transformation

$$y = f, \qquad \varrho = \frac{2\pi}{\lambda_g} r \tag{5}$$

in die BESSELsche Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{\varrho} y' + \left(1 - \frac{m^2}{\varrho^2}\right) y = 0 \tag{6}$$

übergeht. Der Strich ′ bedeutet die Ableitung nach dem Argument ϱ der Zylinderfunktion.
Die allgemeine Lösung der BESSELschen Differentialgleichung (6) im Falle ganzzahliger Werte m lautet

$$y = C_1 J_m(\varrho) + C_2 N_m(\varrho). \tag{7}$$

Für $\varrho = 0$ bzw. $r = 0$ wächst die NEUMANNsche Funktion nach Bild 5.15 über alle Grenzen. Um diese Singularität zu beseitigen, muß $C_2 = 0$ gesetzt werden. Für die Longitudinalkomponente der E-Wellen im Hohlzylinder ergibt sich damit

$$\mathfrak{E}_z = C_1 J_m \left(\frac{2\pi r}{\lambda_g}\right) \cos m\varphi. \tag{8}$$

Am Rande des Hohlleiters muß die Bedingung

$$\mathfrak{E}_z = 0 \qquad \text{für} \qquad r = R, \qquad \text{d. h.} \qquad J_m\left(\frac{2\pi R}{\lambda_g}\right) = 0 \tag{9}$$

erfüllt sein. Das geschieht durch geeignete Wahl von λ_g. Tabelle 15 enthält die Nullstellen der BESSEL-Funktionen J_0, J_1, J_2. Ferner sind die Ableitungen J_0' und J_1' tabelliert. Zur Erfüllung der Randbedingung (9) ist es erforderlich, daß das Argument der BESSEL-Funktion für $r = R$ gleich einer Nullstelle ist:

$$\frac{2\pi R}{\lambda_g} = \varrho_{mn}. \tag{10}$$

ϱ_{mn} bedeutet die n-te Nullstelle der BESSEL-Funktion m-ter Ordnung. Die Grenzwellenlänge λ_g der E-Wellen hängt also gemäß

$$\boxed{\lambda_{mn} = (\lambda_g^{E})_{mn} = \frac{2\pi R}{\varrho_{mn}}} \tag{11}$$

von der Nullstelle ϱ_{mn} ab.
Zur vereinfachten Darstellung der Transversalkomponenten setzen wir

$$C_1 = -\mathrm{i}\,\frac{k_0^2 - h^2}{k_0^2}\,E_{mn}. \tag{12}$$

Bei der Ableitung benutzen wir die Kettenregel und schreiben

$$\frac{\mathrm{d}J_m\left(\frac{2\pi r}{\lambda_{mn}}\right)}{\mathrm{d}r} = \frac{2\pi}{\lambda_{mn}}\,\frac{\mathrm{d}J_m(\varrho)}{\mathrm{d}\varrho} = \frac{2\pi J_m{}'}{\lambda_{mn}}. \tag{13}$$

Für die Transversalkomponenten der E-Welle erhalten wir aus (5.3./19) bis (5.3./23) mit (8), (11), (12)

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{E}_r &= E_{mn}\,\frac{h}{k_0{}^2}\,\frac{2\pi}{\lambda_{mn}}\,J_m{}'\left(\frac{2\pi r}{\lambda_{mn}}\right)\cos m\varphi\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}(hz-\omega t)},\\
\mathfrak{H}_\varphi &= \frac{E_{mn}}{Z_0}\,\frac{2\pi}{k\lambda_{mn}}\,J_m{}'\left(\frac{2\pi r}{\lambda_{mn}}\right)\cos m\varphi\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}(hz-\omega t)},\\
\mathfrak{E}_\varphi &= -\frac{E_{mn}}{k_0{}^2 r}\,hmJ_m\left(\frac{2\pi r}{\lambda_{mn}}\right)\sin m\varphi\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}(hz-\omega t)},\\
\mathfrak{H}_r &= \frac{E_{mn}}{Z_0}\,\frac{m}{k_0 r}\,J_m\left(\frac{2\pi r}{\lambda_{mn}}\right)\sin m\varphi\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}(hz-\omega t)}.
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Im Falle der Grundwelle $m = 0$ sind sämtliche Komponenten von der Winkelvariablen φ unabhängig und die beiden Transversalkomponenten $\mathfrak{E}_\varphi$ und $\mathfrak{H}_r$ gleich Null. Aus (5.3./24) und (5.3./25) folgt als Ableitung der Bessel-Funktion nullter Ordnung

$$J_0{}'(\varrho) = \frac{\mathrm{d}J_0(\varrho)}{\mathrm{d}\varrho} = -J_1(\varrho). \tag{15}$$

Die Longitudinalkomponente der ***H*-Wellen** lautet

$$\mathfrak{H}_z = C_0 J_m\left(\frac{2\pi r}{\lambda_g}\right)\cos m\varphi\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}(hz-\omega t)}. \tag{16}$$

Sie muß wie in 5.3.3. der Randbedingung

$$\frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial n} = 0 \tag{17}$$

genügen. Das bedeutet im vorliegenden Fall

$$\frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial r} = 0 \quad \text{für} \quad r = R. \tag{18}$$

Wir setzen (16) in (18) ein und erhalten

$$J_m{}'\left(\frac{2\pi R}{\lambda_g}\right) = 0 \tag{19}$$

als Gleichung zur Bestimmung der Grenzwellenlängen λ_g. Bezeichnet ϱ'_{mn} die Nullstellen der Funktion $J_m{}'(\varrho)$, so ergibt sich für die Grenzwellenlängen der H-Wellen

$$\boxed{\lambda'_{mn} = (\lambda_g{}^H)_{mn} = \frac{2\pi R}{\varrho'_{mn}}}\,. \tag{20}$$

Für die Transversalkomponenten folgt aus (5.3./19) bis (5.3./23)

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{E}_r &= H_{mn} Z_0 \frac{m}{k_0 r} J_m \left(\frac{2\pi r}{\lambda'_{mn}}\right) \sin m\varphi \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(hz-\omega t)}, \\
\mathfrak{H}_\varphi &= H_{mn} \frac{h}{k_0^2} \frac{m}{r} J_m \left(\frac{2\pi r}{\lambda'_{mn}}\right) \sin m\varphi \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(hz-\omega t)}, \\
\mathfrak{E}_\varphi &= H_{mn} Z_0 \frac{2\pi}{k_0 \lambda'_{mn}} J_m' \left(\frac{2\pi r}{\lambda'_{mn}}\right) \cos m\varphi \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(hz-\omega t)}, \\
\mathfrak{H}_r &= -H_{mn} \frac{h}{k_0^2} \frac{2\pi}{\lambda'_{mn}} J_m' \left(\frac{2\pi r}{\lambda'_{mn}}\right) \cos m\varphi \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(hz-\omega t)}.
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

H_{mn} hängt mit der Konstanten C_0 in (16) gemäß

$$C_0 = \mathrm{i} \frac{k_0^2 - h^2}{k_0^2} H_{mn} \tag{22}$$

zusammen. Im Falle $m = 0$ besteht wie bei den E-Wellen keine Abhängigkeit von der Variablen φ, und die Transversalkomponenten $\mathfrak{E}_r$ und $\mathfrak{H}_\varphi$ verschwinden.
Die Fortpflanzungskonstante h und die scheinbare Wellenlänge erhält man auf Grund der Beziehungen (5.3.3./19) und (5.3.3./20).
Für die H_{01}-Welle ergibt sich aus (20) wegen $\varrho'_{01} = 0$

$$\lambda'_{01} = \frac{2\pi R}{\varrho'_{01}} = \infty. \tag{23}$$

Das bedeutet, daß das Argument der Funktion J_0' gleich Null ist. Nach (15) folgt

$$J_0'(0) = -J_1(0) = 0.$$

Aus (21) erhalten wir somit, daß sämtliche Transversalkomponenten verschwinden. Wegen $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$ verschwinden auch die Longitudinalkomponenten. Es liegt also überhaupt keine Welle vor.

Tabelle 15. Nullstellen der BESSEL-Funktionen und ihrer Ableitungen

	J_m			J_m'		
m n	1	2	3	1	2	3
0	2,405	5,520	8,654	0,00	3,832	7,016
1	3,832	7,016	10,177	1,84	5,33	8,54
2	5,135	8,417	11,620	3,054	6,706	9,969

Wie wir aus Tabelle 15 entnehmen, ist die Grenzwellenlänge am größten für die H_{11}-Welle. Nach (20) ergibt sich

$$\lambda'_{11} = \frac{2\pi}{1{,}84} 4 \text{ cm} = 13{,}7 \text{ cm}.$$

Die nächstkleinere Grenzwellenlänge kommt der E_{01}-Welle mit

$$\lambda_{01} = \frac{2\pi}{2{,}405}\, 4 \text{ cm} = 10{,}45 \text{ cm}$$

zu. Zwischen $\lambda = 10{,}45$ cm und $\lambda = 13{,}7$ cm tritt somit im Hohlzylinder nur eine Hohlleiterwelle, die H_{11}-Welle, auf.

5.3.5. Rechteckiger Hohlraumresonator

Ein Hohlraumresonator entsteht aus einer Hohlleitung, indem jedes der beiden Leiterenden durch eine Metallplatte abgeschlossen wird. Berechnen Sie die längste Resonanzwellenlänge für einen rechteckigen Hohlraumresonator. Seine Länge betrage $l = 30$ cm. Die rechteckige Grundfläche habe die Abmessungen $a = 3$ cm, $b = 5$ cm.

Lösung

Die Reflexion der Wellen an den metallischen Begrenzungsflächen führt zu stehenden Wellen. Am metallischen Abschluß vorn und hinten darf das elektrische Feld nur eine Komponente orthogonal zur Begrenzungsebene haben. Um diese Randbedingung erfüllen zu können, muß die Hohlleiterlänge l ein ganzzahliges Vielfaches der halben Hohlleiterwellenlänge Λ sein:

$$l = n_z \frac{\Lambda}{2} \quad (n_z = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Nach (5.3.3./20) ist die Hohlleiterwellenlänge von der Grenzwellenlänge λ_g abhängig. Wir setzen in diese Formel die Verknüpfung (5.3.3./18) mit den Hohlleiterabmessungen ein. Aufgelöst nach der Vakuumwellenlänge folgt

$$\lambda = \lambda^{n_x n_y n_z} = \frac{2}{\sqrt{\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2}}}, \qquad (n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Diese Größe wird als **Resonanzwellenlänge** bezeichnet.
Um zu entscheiden, welcher der Parameter n_x, n_y, n_z Null werden kann, ist es erforderlich, das elektromagnetische Feld der stehenden Welle zu bestimmen. Dazu machen wir nach (5.3.3./1) den Ansatz der Überlagerung einer hin- und einer rücklaufenden Welle. Wir schreiben für die Longitudinalkomponenten der beiden TM-Wellen nach (5.3.4./15)

$$\mathfrak{E}_z^{(h)} = E(k_0^2 - h^2) \sin \frac{n_x \pi x}{a} \sin \frac{n_y \pi y}{b}\, e^{i(hz - \omega t)}, \tag{3}$$

$$\mathfrak{E}_z^{(r)} = E\,(k_0^2 - h^2) \sin \frac{n_x \pi x}{a} \sin \frac{n_y \pi y}{b}\, e^{-i(hz + \omega t)}. \tag{4}$$

Die Fortpflanzungskonstante h kann durch die Hohlleiterwellenlänge Λ ausgedrückt werden. Berücksichtigt man (1), so folgt

$$h = \frac{2\pi}{\Lambda} = \frac{n_z \pi}{l}. \tag{5}$$

Zur Berechnung der Transversalkomponenten wenden wir die Gleichungen (5.3./19) bis (5.3./23) an. Sie gelten nach (5.3./11) unter der Voraussetzung einer fortschreitenden Welle der Form $\exp\,[i\,(hz - \omega t)]$, also zunächst nur für die hinlaufenden Wellen der Form (3). Die rücklaufenden

Wellen (4) können zur Ableitung ihrer Transversalkomponenten auf die Form (5.3./11) zurückgeführt werden, wenn man in (5.3./11) und damit ebenso in (5.3./19) bis (5.3./23) h durch $-h$ ersetzt. Im einzelnen ergeben sich aus der Überlagerung von (3) und (4) für die Transversalkomponenten der stehenden Welle des TM-Feldes

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{E}_x &= -2E\,\frac{n_x n_z \pi^2}{al}\cos\frac{n_x\pi x}{a}\sin\frac{n_y\pi y}{b}\sin\frac{n_z\pi z}{l}\,e^{-i\omega t},\\
\mathfrak{E}_y &= -2E\,\frac{n_y n_z \pi^2}{bl}\sin\frac{n_x\pi x}{a}\cos\frac{n_y\pi y}{b}\sin\frac{n_z\pi z}{l}\,e^{-i\omega t},\\
\mathfrak{H}_x &= -4i\,E\,\frac{n_y\pi^2}{Z_0 b\lambda^{n_x n_y n_z}}\sin\frac{n_x\pi x}{a}\cos\frac{n_y\pi y}{b}\cos\frac{n_z\pi z}{l}\,e^{-i\omega t},\\
\mathfrak{H}_y &= 4i\,E\,\frac{n_x\pi^2}{Z_0 a\lambda^{n_x n_y n_z}}\cos\frac{n_x\pi x}{a}\sin\frac{n_y\pi y}{b}\cos\frac{n_z\pi z}{l}\,e^{-i\omega t}.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Wie wir hieraus entnehmen, kann bei den stehenden TM-Wellen die Größe n_z gleich Null werden, ohne daß sämtliche Feldkomponenten verschwinden. Als größte Resonanzwellenlänge ergibt sich bei den TM-Wellen nach (2) die 1,1,0-Welle:

$$\lambda^{1,1,0} = \frac{2}{\sqrt{\dfrac{n_x^2}{a^2} + \dfrac{n_y^2}{b^2}}}. \tag{7}$$

Nach (6) sind nur die Amplituden der magnetischen Transversalkomponenten räumlich veränderlich. Als größte Wellenlänge der TM-Wellen erhalten wir mit den vorgegebenen Zahlen

$$\lambda^{1,1,0} = \frac{2}{\sqrt{\dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2}}}\,\text{cm} = 5{,}1\ \text{cm}.$$

Für die stehenden Wellen der **TE-Wellen** folgt mit dem Ansatz

$$\mathfrak{H}_z^{(h)} = \frac{k_0^2 - h^2}{k_0^2}\,H\cos\frac{n_x\pi x}{a}\cos\frac{n_y\pi y}{b}\,e^{i(hz-\omega t)}, \tag{8}$$

$$\mathfrak{H}_z^{(r)} = -\frac{k_0^2 - h^2}{k_0^2}\,H\cos\frac{n_x\pi x}{a}\cos\frac{n_y\pi y}{b}\,e^{-i(hz+\omega t)}, \tag{9}$$

für die Transversalkomponenten

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{E}_x &= 2HZ_0\,\frac{n_y\pi}{bk_0}\cos\frac{n_x\pi x}{a}\sin\frac{n_y\pi y}{b}\sin\frac{n_z\pi z}{l}\,e^{-i\omega t},\\
\mathfrak{E}_y &= -2HZ_0\,\frac{n_x\pi}{ak_0}\sin\frac{n_x\pi x}{a}\cos\frac{n_y\pi y}{b}\sin\frac{n_z\pi z}{l}\,e^{-i\omega t},\\
\mathfrak{H}_x &= -i\,H\,\frac{n_x n_z\pi\lambda}{lak_0}\sin\frac{n_x\pi x}{a}\cos\frac{n_y\pi y}{b}\cos\frac{n_z\pi z}{l}\,e^{-i\omega t},\\
\mathfrak{H}_y &= -i\,H\,\frac{n_y n_z\pi\lambda}{lbk_0}\cos\frac{n_x\pi x}{a}\sin\frac{n_y\pi y}{b}\cos\frac{n_z\pi z}{l}\,e^{-i\omega t}.
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Im Gegensatz zu den TM-Wellen darf nach (10) bei den TE-Wellen n_z nicht Null werden, wenn nicht das gesamte Feld verschwinden soll. Dagegen muß nur entweder n_x oder n_y von Null verschieden sein. Im Falle $b > a$ erhält man somit bei TE-Wellen als längste Grenzwellenlänge des rechteckigen Hohlraumresonators

$$\lambda^{0,1,1} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{1}{l^2}}}, \tag{11}$$

mit den vorgegebenen Zahlen

$$\lambda^{0,1,1} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{30}\right)^2}} \text{ cm} = 9{,}9 \text{ cm}.$$

5.3.6. Gütefaktor und Verlustfaktor eines Hohlraumresonators

Der Gütefaktor Q gibt das Verhältnis zwischen dem 2π-fachen des Energieinhaltes W und der während einer Periode verlorenen Energie

$$W_V = \frac{P_V}{f}$$

an:

$$Q = \frac{2\pi W}{\frac{P_V}{f}} = \frac{\omega W}{P_V}. \tag{1}$$

P_V bezeichnet die Verlustleistung. Den Kehrwert des Gütefaktors definiert man als Verlustfaktor.
Bestimmen Sie den Gütefaktor eines Hohlraumresonators aus Kupfer mit den Abmessungen $a = 3$ cm, $b = 5$ cm, $l = 30$ cm für die E_{110}-Resonatorwelle. Es ist mit $\gamma = 57{,}5 \cdot 10^6\,\Omega^{-1}\,\text{m}^{-1}$ zu rechnen.

Lösung

Wir nehmen an, das Medium zwischen den Metallwänden sei Vakuum, so daß Verluste durch das dielektrische Zwischenmedium nicht auftreten. Die metallischen Verluste entstehen durch die endliche Leitfähigkeit der Hohlleiterwände. Um diese Verluste zu berechnen, bestimmen wir den Strom in den Wänden bei Abstimmung auf Resonanz. Wir setzen voraus, daß der Krümmungsradius an der Leiteroberfläche groß gegen die Eindringtiefe d ist.
Aus der MAXWELLschen Gleichung (1.4./1) folgt bei vernachlässigbarem Verschiebungsstrom auf Grund des STOKESschen Satzes nach (1.4.3./7)

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{n} \times \mathfrak{H}. \tag{2}$$

Darin bezeichnet $\mathfrak{K}$ (Einheit A m^{-1}) die Oberflächenstromdichte, $\mathfrak{H}$ die magnetische Feldstärke an der Hohlleiterwand. $\mathfrak{n}$ gibt die in das Vakuum gerichtete Flächennormale an. $\mathfrak{K}$ hängt mit der Stromdichte $\mathfrak{J}$ bzw. mit der Stromdichte $\mathfrak{J}_0$ an der Oberfläche des Leiters gemäß

$$\mathfrak{K} = \int_0^\infty \mathfrak{J}\,\mathrm{d}z = \int_0^\infty \mathfrak{J}_0\,\mathrm{e}^{-\frac{z}{d}}\,\mathrm{d}z = \mathfrak{J}_0 d \tag{3}$$

zusammen (vgl. 5.3.1.).

Die Verlustleistung in einem Stromkreis mit der Stromstärke I und dem Widerstand R errechnet sich aus

$$P_V = RI_{\text{eff}}^2. \tag{4}$$

In einem Leiterstück mit der Eindringtiefe d, der in Stromrichtung gemessenen Länge ds_1 und der senkrecht zur Normalen- und senkrecht zur Stromrichtung gemessenen Breite ds_2 beträgt die Verlustleistung nach (5)

$$dP_V = \frac{ds_1}{\gamma d\, ds} (\mathfrak{J}_{0\,\text{eff}}\, d\, ds_2)^2. \tag{5}$$

Hieraus ergibt sich mittels (3)

$$dP_V = \frac{\mathfrak{K}_{\text{eff}}^2\, ds_1\, ds_2}{\gamma d}. \tag{6}$$

Die gesamte Verlustleistung des Hohlleiters folgt hieraus durch Integration:

$$P_V = \frac{1}{\gamma d} \iint \mathfrak{K}_{\text{eff}}^2\, ds_1\, ds_2. \tag{7}$$

Das Doppelintegral ist über die gesamte Oberfläche des Hohlleiters zu erstrecken.
Aus (5.3.5./6) erhalten wir für die E_{110}-Welle

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{H}_x &= -\frac{4\mathrm{i}\,E}{Z_0} \frac{\pi^2}{b\lambda} \sin\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{b}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},\\
\mathfrak{H}_y &= \frac{4\mathrm{i}\,E}{Z_0} \frac{\pi^2}{a\lambda} \cos\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},\\
\mathfrak{E}_x &= 0, \qquad \mathfrak{E}_y = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Für die z-Komponente des elektrischen Feldes folgt nach (5.3.5./3) und (5.3.5./4) durch Addition

$$\mathfrak{E}_z = 2E\,(k_0^2 - h^2) \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}. \tag{9}$$

Die z-Komponente des magnetischen Feldes ist gleich Null.
Als Fortpflanzungskonstante ergibt sich nach (5.3.5./5) für $n_z = 0$:

$$h = 0. \tag{10}$$

Die Resonatorwellenlänge ist nach (5.3.5./7) gleich

$$\lambda^{1,1,0} = \frac{2}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}}}. \tag{11}$$

Aus (8) und (9) erhalten wir nach (7) durch Integration über alle sechs rechteckigen Leiterflächen

$$\begin{aligned}
P_V = \frac{16}{\gamma d} \frac{E^2}{Z_0^2} \frac{\pi^4}{\lambda^2} \Bigg\{ &\frac{1}{a^2} \int_0^l \int_0^b \sin^2\frac{\pi y}{b}\, dy\, dz + \frac{1}{b^2} \int_0^l \int_0^a \sin^2\frac{\pi x}{a}\, dx\, dz \\
&+ \int_0^b \int_0^a \left(\frac{1}{b^2} \sin^2\frac{\pi x}{a} \cos^2\frac{\pi y}{b} + \frac{1}{a^2} \cos^2\frac{\pi x}{a} \sin^2\frac{\pi y}{b} \right) dx\, dy \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Die Auswertung der Integrale liefert

$$P_V = \frac{\pi^4 E^2 (a^2 + b^2)}{\gamma d Z_0 a^4 b^4} (2la^3 + 2lb^3 + ab^3 + a^3 b). \tag{13}$$

Um die Gesamtenergie W des Hohlraumresonators zu berechnen, berücksichtigen wir, daß nach (8) und (9) $\mathfrak{E}$ sein Maximum annimmt, wenn $\mathfrak{H}$ verschwindet. Für die Gesamtenergie können wir daher schreiben

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \iiint (\mathfrak{E})^2_{\mathfrak{H}=0} \, \mathrm{d}V. \tag{14}$$

Hier setzen wir (9) bis (11) ein:

$$W = 2\varepsilon_0 k_0^4 E^2 \int_0^l \int_0^b \int_0^a \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \frac{\pi^4 \varepsilon_0 E^2 l (a^2 + b^2)^2}{2a^3 b^3}. \tag{15}$$

Zu dem gleichen Ergebnis gelangt man aus den $\mathfrak{H}$-Komponenten nach (8). Wir setzen (15) und (13) in (1) ein und erhalten

$$Q = \frac{\omega W}{P_V} = \frac{\pi \gamma Z_0 d \sqrt{a^2 + b^2}^3 \, l}{2[2l(a^3 + b^3) + (a^2 + b^2) \, ab]}. \tag{16}$$

Anstelle des Gütefaktors wird häufig der Verlustfaktor verwendet:

$$\frac{1}{Q} = \frac{4}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \, \pi \gamma Z_0 d} \left(\frac{\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} + \frac{1}{2l} \right). \tag{17}$$

Die Eindringtiefe ist nach (5.3.1./22) sowie (5.3.5./2) durch

$$d = \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma Z_0 \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}} \tag{18}$$

gegeben.
Mit den vorliegenden Zahlen folgt

$$d = \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot 57{,}5 \cdot 10^6 \cdot 120\pi \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{25}} \cdot 10^2}} \; \mathrm{m} = 8{,}7 \cdot 10^{-7} \; \mathrm{m}.$$

Daraus ergibt sich für den Gütefaktor

$$Q = \frac{\pi \cdot 57{,}5 \cdot 10^6 \cdot 120\pi \cdot 8{,}7 \cdot 10^{-7} \sqrt{9 + 25}^3 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}30}{2[0{,}60(27 + 125) \, 10^{-6} + (9 + 25) \, 3 \cdot 5 \cdot 10^{-8}]} = 1{,}83 \cdot 10^4.$$



Aufgaben

A 5.3.1.* Welche Formel ergibt sich für die Fortpflanzungskonstante h, wenn der metallische Halbraum die Permeabilität $\mu_M \neq \mu_0$ hat?

A 5.3.2. Berechnen Sie die Eindringtiefe d elektromagnetischer Wellen der Frequenz $f = 1000$ Hz in Kupfer ($\gamma = 57{,}5\ 10^6 \Omega^{-1}\,m^{-1}$).

A 5.3.3. Wie groß ist der Widerstand für Wechselstrom der Frequenz $f = 1000$ Hz in einer Kupferplatte der Länge $l = 1{,}50$ m und der Breite $b = 5$ cm? Die Dicke sei groß gegen die Eindringtiefe.

A 5.3.4. Berechnen Sie den Wechselstromwiderstand einer zylindrischen Leitung aus Kupfer mit der Länge $l = 2$ km und dem Durchmesser $2R_0 = 2$ mm, wenn durch die Leitung Wechselstrom der Frequenz $f = 3 \cdot 10^5$ Hz fließt.

A 5.3.5. Eine Rechteckhohlleitung hat die Abmessungen $a = 5$ cm, $b = 3$ cm. Es soll der Wellenlängenbereich zwischen 10,1 und 11,4 cm übertragen werden. Welche Hohlleiterwellen sind für die Übertragung möglich?

A 5.3.6. Berechnen Sie die Grenzwellenlänge der E_{11}-Welle für einen Rechteckhohlleiter mit den Abmessungen $a = 8$ cm, $b = 5$ cm. Welche Wellentypen sind für $\lambda = 7{,}9$ cm in diesem Hohlleiter außerdem möglich?

A 5.3.7. Geben Sie zur vorhergehenden Aufgabe den Wellenlängenbereich an, für den im vorgegebenen Rechteckhohlleiter allein die H_{10}-Welle übertragen wird.

A 5.3.8. Geben Sie die Dämpfung der E_{01}-Welle in einem kreiszylindrischen Hohlleiter mit dem Durchmesser $2R = 8$ cm an, wenn die Wellenlänge $\lambda = 12$ cm beträgt. Die durchlaufene Strecke ist gleich 6 cm.

A 5.3.9. In einem als Grenzwellendämpfer gebauten Hohlleiter mit Mikroschrauben zur Verstellung von a soll die H_{10}-Welle nach Durchlaufen der Strecke 10 cm die Dämpfung 40 dB besitzen. Wie groß ist a einzustellen für $\lambda = 5{,}0$ cm?

A 5.3.10. Berechnen Sie die in einem Rechteckhohlleiter mit den Abmessungen $a = 3$ cm, $b = 5$ cm durch die H_{01}-Welle übertragene Leistung, wenn die Wellenlänge $\lambda = 8$ cm beträgt. Die effektive elektrische Feldstärke hat im Hohlleiter den Maximalwert $1\ V\,m^{-1}$.

A 5.3.11. Wie groß sind die längsten Eigenwellen bzw. Resonatorwellen für einen kastenförmigen Hohlraumresonator mit den Abmessungen $a = 2$ cm, $b = 3$ cm, $l = 10$ cm?

A 5.3.12.* Leiten Sie die Formel für die Eindringtiefe der H_{011}-Resonatorwelle ab.

A 5.3.13.* Bestimmen Sie den Verlustfaktor der H_{011}-Resonatorwelle.

A 5.3.14.* Stellen Sie die allgemeine Formel für den Verlustfaktor der E-Resonatorwellen in einem kastenförmigen Resonator auf.

A 5.3.15.* Stellen Sie die allgemeine Formel für den Verlustfaktor der H-Resonatorwellen in einem kastenförmigen Resonator auf.

A 5.3.16.* Der Gütefaktor eines Hohlraumresonators für eine spezielle Resonatorwelle beträgt $Q = 10^5$. Sämtliche Abmessungen sowie die Wellenlänge werden vervierfacht. Wie verändert sich Q?

Lösung der Aufgaben

A 1.1.1. $D = 1{,}27 \text{ As m}^{-2}, \quad E = 1{,}44 \cdot 10^{11} \text{ V m}^{-1}$

A 1.1.2. $F = 2{,}30 \cdot 10^{-8} \text{ N} = 2{,}30 \cdot 10^{-3} \text{ dyn}$

A 1.1.3. $\mathfrak{D} = -3{,}13 \cdot 10^{-7} \frac{\mathfrak{r}}{r} \text{ A s m}^{-2}, \quad E = -2{,}40 \cdot 10^{4} \text{ V m}^{-1}$

A 1.1.4. E = Spannung U/Abstand $a = 22000 \text{ V m}^{-1}$

A 1.1.5. $U = \frac{mv^2}{2e} = 285 \text{ V}$

A 1.1.6. $F = 1{,}6 \cdot 10^{-13} \text{ N}$

A 1.1.7. $\frac{QU}{\alpha} = \frac{4}{3} \pi r^3 \varrho g, \qquad Q = 2{,}3 \cdot 10^{-16} \text{ As}$

A 1.1.8. $0{,}707 \, |\dot{\mathfrak{D}}| \, A = 983 \text{ A}$

A 1.1.9. $H = 40000 \text{ A m}^{-1}$

A 1.1.10. $R = 14{,}95\,\Omega, \quad I = 14{,}7 \text{ A}, \quad H = 1{,}03 \cdot 10^{6} \text{ A m}^{-1}$

A 1.1.11. $U_{\text{ind}} = 0{,}12 \text{ V}$

A 1.1.12. $B = 1{,}5 \text{ Vs m}^{-2}$

A 1.1.13. $U_{\text{M}} = nI = 20$ kA im Innenraum, $U_{\text{M}} = 0$ im Außenraum

A 1.2.1. $\Phi = \Phi_0 - (10x + 20y - 15z) \text{ V m}^{-1} - (10x^2 - 5y^2) \text{ V m}^{-2}$

A 1.2.2. $\Phi = C_1 \frac{z}{r}$

A 1.2.3. $\operatorname{grad} \frac{1}{r^n} = -\frac{n}{r^{n+1}} \frac{\mathfrak{r}}{r}, \qquad \operatorname{grad} \mathrm{e}^r = \mathrm{e}^r \frac{\mathfrak{r}}{r},$

$\operatorname{grad} z \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} r = z \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \mathfrak{e}_r + \mathrm{i} \, z \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \mathfrak{e}_\varphi + r \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \mathfrak{e}_z$

A 1.2.4. $U = 0$, Spannung ist wegunabhängig

A 1.2.5. $U = 76700 \text{ V}$

A 1.2.6. $U = 200 \text{ V}$

A 1.2.7. $W = 1000\,\text{eV} = 1{,}60 \cdot 10^{-16}\,\text{J}, \quad v = 1{,}9 \cdot 10^7\,\text{m s}^{-1} \ll c_0$

A 1.2.8. $\Phi = \frac{-10^{-6}}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2}}\right] \text{V}$

A 1.2.9. $\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2}} = \frac{4}{3}$

A 1.2.10. $U = U_0 + 220 \frac{x}{l}\,\text{V}$, U_0 Potential gegen Masse

A 1.2.11. $W_\text{D} = -2 \cdot 10^{-8}\,\text{J}, \quad |\mathfrak{m}_\text{e}| = 10^{-9}\,\text{Asm}, \quad |\mathfrak{M}| = 2 \cdot 10^{-8}\,\text{J}$

A 1.2.12. $|\mathfrak{m}_\text{e}| = 3{,}14 \cdot 10^{-7}\,\text{Vsm}$

A 1.2.13. $|\mathfrak{M}| = 3{,}14 \cdot 10^{-4}\,\text{J}$

A 1.2.14. $|\mathfrak{m}_\text{m}| = \frac{\mu_0 e \hbar}{2m} = 1{,}165 \cdot 10^{-29}\,\text{Vsm}, \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi}$

A 1.2.15. $m_\text{m} = 6{,}01 \cdot 10^{-5}\,\text{Vsm}$

A 1.2.16. $m_\text{m} = 4{,}2 \cdot 10^{-5}\,\text{Vsm}$

A 1.2.17. $H = 0{,}299\,\text{A m}^{-1}$

A 1.2.18. $H = 0{,}019\,\text{A m}^{-1}$

A 1.3.1. $\text{rot}\,\mathfrak{E} = 2C(y - z, z - x, x - y)$

A 1.3.2. $\mathfrak{E}_\varphi = 0, \quad \mathfrak{E}_\vartheta = 0, \quad \mathfrak{E}_r = f(r)\,r, \quad \text{rot}\,\mathfrak{E} = 0.$ Das Feld hat ein Potential.

A 1.3.3. Das Feld muß die Form $\mathfrak{E}_z = C_1 + C_2 + C_3 z^{n_3}$ haben.

A 1.3.4. $\text{div}\,\mathfrak{r} = 3, \quad \text{div}\,\frac{\mathfrak{r}}{r} = \frac{2}{r}, \qquad \text{div}\,z\,e^{i\varphi}\mathfrak{r} = 2z\,e^{i\varphi}$

A 1.3.5. $\text{div}\,\mathfrak{E} \times \mathfrak{H} = \nabla \cdot \mathfrak{E} \times \mathfrak{H} = \mathfrak{H} \cdot \text{rot}\,\mathfrak{E} - \mathfrak{E} \cdot \text{rot}\,\mathfrak{H}$

A 1.3.6. Aus $\nabla \times (\nabla \times \mathfrak{E}) = \nabla\nabla \cdot \mathfrak{E} - \nabla \cdot \nabla\mathfrak{E}$ folgt $\text{rot rot}\,\mathfrak{E} = \text{grad div}\,\mathfrak{E} - \triangle\mathfrak{E}$

A 1.3.7. $\text{grad}\,\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cdot \nabla\mathfrak{B} + \mathfrak{B} \cdot \nabla\mathfrak{A} + \mathfrak{A} \times \text{rot}\,\mathfrak{B} + \mathfrak{B} \times \text{rot}\,\mathfrak{A},$
$\text{rot}\,\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \mathfrak{A}\,\text{div}\,\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\,\text{div}\,\mathfrak{A}$

A 1.3.8. $\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \varphi} = r \frac{\partial \mathfrak{E}_\varphi}{\partial z}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial r}, \qquad \frac{\partial (r\mathfrak{E}_\varphi)}{\partial r} = \frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial r}$

A 1.3.9. $\text{rot grad}\,\varphi = \nabla \times \nabla\varphi = 0,$
$\text{div rot}\,\mathfrak{A} = \nabla \cdot \nabla \times \mathfrak{A} = \nabla \times \mathfrak{A} \cdot \nabla = \nabla \times \nabla \cdot \mathfrak{A} = 0$

A 1.3.10. $(U_\text{ind})_\text{eff} = 70{,}1\,\text{V}$

A 1.3.11. $(\mathfrak{E}_\varphi)_\text{eff} = 558\,\text{V m}^{-1}$

A 1.3.12. Rotor in Richtung der Feldspulenachse, Effektivwert 3,16 V m^{-2}

A 1.3.13. Für die geschlossene Fläche ist $\oiint \mathfrak{B} \cdot d\mathfrak{A} = \text{const}$. Aus der Geschlossenheit der magnetischen Feldlinien folgt $\iiint \operatorname{div} \mathfrak{B} \, dV = 0$ bzw. $\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$.

A 1.3.14. a) $\mathfrak{H}_\varphi = \dfrac{Ir}{2\pi R_i^2}$ für $r \leqq R_i$, $\mathfrak{H}_\varphi = 7{,}96 \text{ A m}^{-1}$,

b) $\mathfrak{H}_\varphi = \dfrac{I}{2\pi r}$ für $R_i \leqq r \leqq R_a$, $\mathfrak{H}_\varphi = 3{,}98 \text{ A m}^{-1}$,

c) $\mathfrak{H}_\varphi = \dfrac{I}{2\pi r} \dfrac{R_{aa}^2 - r^2}{R_{aa}^2 - R_a^2}$ für $R_a \leqq r \leqq R_{aa}$, $\mathfrak{H}_\varphi = 1{,}44 \text{ A m}^{-1}$,

d) $\mathfrak{H}_\varphi = 0$

A 1.3.15. $E = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r} = 3000 \text{ V m}^{-1}$

A 1.3.16. a) $\mathfrak{H}_\varphi = 15{,}9 \text{ A m}^{-1}$, b) $\mathfrak{H}_\varphi = 3{,}2 \text{ A m}^{-1}$, c) $\mathfrak{H} = 0$

A 1.3.17. a) $\mathfrak{E}_r = 1130 \text{ V m}^{-1}$, b) $\mathfrak{E}_r = 2825 \text{ V m}^{-1}$, c) $\mathfrak{E}_r = 1410 \text{ V m}^{-1}$

A 1.3.18. $\varrho = 5{,}3 \cdot 10^{-8} \text{ As m}^{-3}$

A 1.4.1. $Q = 1{,}27 \cdot 10^{-4} \text{ As}$

A 1.4.2. $m_{\text{ind}} = -3{,}2 \cdot 10^{-6} \text{ m}$

A 1.4.3. $\tau = 2{,}3 \cdot 10^5 \text{ s}$

A 1.4.4. $\tau > 1{,}5 \cdot 10^{-16} \text{ s}$

A 1.4.5. Aus $\varepsilon\dot{\mathfrak{E}} = \operatorname{rot} \mathfrak{H}$ und $\operatorname{div} \varepsilon\dot{\mathfrak{E}} = \dot{\varrho}$ folgt $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \dot{\varrho}$, d. h. $\dot{\varrho} = 0$

A 1.4.6. $\mathfrak{E}_{\text{Itang}} = \mathfrak{E}_{\text{IItang}}$, $\varepsilon_{\text{I}}\mathfrak{E}_{\text{Inorm}} = \varepsilon_{\text{II}}\mathfrak{E}_{\text{IInorm}}$;
$\mathfrak{E}_{i\text{tang}} = \mathfrak{E}_i \sin \varphi_i$, $\mathfrak{E}_{i\text{norm}} = \mathfrak{E}_i \cos \varphi_i$ $(i = \text{I, II})$. Daraus folgt

$$\frac{\tan \varphi_{\text{I}}}{\tan \varphi_{\text{II}}} = \frac{\varepsilon_{\text{I}}}{\varepsilon_{\text{II}}}$$

A 1.4.7. $\dfrac{\tan \varphi_{\text{I}}}{\tan \varphi_{\text{II}}} = \dfrac{\mu_{\text{I}}}{\mu_{\text{II}}}$

A 1.4.8. $P = 84 \text{ kW}$

A 1.4.9. $\dfrac{1}{2} \varepsilon_0 \mathfrak{E}^2 = 4{,}4 \cdot 10^{-18} \text{ J m}^{-3}$, $\dfrac{1}{2} \mu_0 \mathfrak{H}^2 = 4{,}4 \cdot 10^{-18} \text{ J m}^{-3}$,

$|\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}| = 2{,}65 \cdot 10^{-9} \text{ J m}^{-2}$

A 1.4.10. $E = 1{,}25 \cdot 10^4 \text{ V m}^{-1}$

A 1.4.11. Druck $p = \dfrac{\mathfrak{D}^2}{2\varepsilon_0} = \dfrac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4}$, d. h. $5{,}73 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2} = 5{,}85 \text{ at}$

A 1.4.12. $W = 0{,}64 \text{ J}$, $p = 0{,}081 \text{ at}$

A 1.4.13. $W = 1{,}93 \text{ J}$

A 1.4.14. Aus $p = \frac{1}{2}\varepsilon_0\mathfrak{E}^2$ und $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ ergibt sich als gesamte wirksame Kraft

$F = 4\pi R^2 p = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2}$. Somit folgt als potentielle Energie

$W_{\text{pot}} = -\int_R^\infty F\,\mathrm{d}r = \frac{-Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$, d. h. $W_{\text{pot}} = -450$ J.

A 2.1.1. $C = 5{,}09 \cdot 10^{-10}$ F

A 2.1.2. $W = 3{,}98 \cdot 10^{-3}$ J

A 2.1.3. $C = 4\pi\varepsilon \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2}$, $\mathfrak{E}_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$, $U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}$

A 2.1.4. $C = 4\pi\varepsilon R$

A 2.1.5. $R = 9 \cdot 10^9$ m

A 2.1.6. $\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)$, $\mathfrak{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + (z - z_0)\mathfrak{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}} - \frac{x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + (z + z_0)\mathfrak{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + z_0)^2}}\right]$,

wenn die Metallplatte als x,y-Ebene, die Verbindungslinie $\overline{Q'Q}$ als z-Achse gewählt wird. $\mathfrak{E}_z = 2{,}6$ V m^{-1}, $\mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}_y = 0$

A 2.1.7. $\Delta\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2h}\right)$, $\Delta\Phi = 217$ V

A 2.1.8. a) $\Phi = -E_0 x\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)$, b) $\Phi = -E_0 x\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

A 2.1.9. $m = 1{,}0 \cdot 10^{-14}$ Asm, $E_{\text{i}} = 13{,}6$ V m^{-1}

A 2.1.10. $\mathfrak{E}_x = \frac{-q'}{\pi\varepsilon_0 a} = -7{,}2$ V m^{-1}, $\mathfrak{E}_y = 0$

A 2.1.11. $(x^2 + y^2 + a^2) - 4a^2x^2 = C$

A 2.1.12. $q' = 1{,}36 \cdot 10^{-9}$ Asm^{-1}

A 2.1.13. $\Phi = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{(x - a)^2 + y^2}{\left(x - \frac{R_0^2}{a}\right)^2 + y^2}$; auf der Oberfläche der zylindrischen Leitung ist

Φ gleich $U_0 = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a - R_0}{R_0 - d}$, $U_0 = 91{,}1$ V.

A 2.1.14. $$\Phi = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{[(x - a)^2 + y^2]\left[\left(x + \frac{R_0^2}{a}\right)^2 + y^2\right]}{[(x + a)^2 + y^2]\left[\left(x - \frac{R_0^2}{a}\right)^2 + y^2\right]}$$

A 2.1.15. $\Phi_0 = -E_0 x - \frac{\mathfrak{m}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\operatorname{grad}\ln\frac{1}{r}$

A 2.2.1. $u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$; $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$ sind Kreise durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems, die die x- bzw. die y-Achse berühren. Das Feld entspricht dem des Liniendipols (sehr nahe benachbarte entgegengesetzte Ladungen auf zwei dünnen Drähten beiderseits der Achse).

A 2.2.2. $x = u^2 - \frac{y^2}{4u^2} = \frac{y^2}{4v^2} - v^2, \quad y = 2uv$

Zwei Scharen konfokaler Parabeln als Äquipotentiallinien. Eine Gerade kann durch eine der langgestreckten Parabeln genähert und damit das Feldproblem einer Kante gegenüber einer Ebene gelöst werden.

A 2.2.3. $x = c \cosh u \cos v, \quad y = c \sinh u \sin v$
$u = \text{const}$ wird in Ellipse überführt, Brennweite f, $v = \text{const}$ wird in Hyperbel überführt. Spezialfall ergibt Kante gegenüber leitender Ebene.

A 2.2.4. Einheitskreis wird a) in Strecke zwischen -1 und $+1$, b) in Strecke zwischen $-\mathrm{i}$ und $+\mathrm{i}$ abgebildet.

A 2.2.5. $u = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos\varphi, \quad v = \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin\varphi$

a) Für konstante r folgt $\frac{u^2}{\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = 1$, d. h., Kreise werden in konfokale Ellipsen abgebildet, im Falle $r = 1$ in Strecke $-2 \cdots +2$.

b) Für konstantes φ folgt $\frac{u^2}{4\cos^2\varphi} - \frac{v^2}{4\sin^2\varphi} = 1$, d. h., Geraden gehen in konfokale Hyperbeln über.

A 2.2.6. Im Falle $r = \text{const}$ werden die Kreise $x^2 + y^2 = r^2$ in der z-Ebene zu Ellipsen $\frac{u^2}{\left(r + \frac{c^2}{r}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(r - \frac{c^2}{r}\right)^2} = 1$, $r = c$ ergibt Strecke $-2c \cdots +2c$. Gerade durch den Ursprungspunkt, unter dem Winkel φ gegen die reelle Achse geneigt, wird in Hyperbel $\frac{u^2}{4c^2\cos^2\varphi} - \frac{v^2}{4c^2\sin^2\varphi} = 1$ transformiert.

A 2.2.7. $z = A(\mathrm{e}^w - w) + B$

A 2.2.8. $\ln z = A_2 \int\limits_0^\zeta \frac{\sqrt{(s - a_{21})(s - a_{22})}\, \mathrm{d}s}{\sqrt{(s - a_1)(s + 1)\, s(s - a_3)}} + B_2, \quad w = A_3 \int\limits_0^\zeta \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{s(s + 1)(s - a_3)}} + B_3$

A 2.2.9. $w = A_3 \int\limits_0^\zeta \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(s - a_1)(s + 1)\, s(s - a_3)}} + B_3$

A 2.3.1. $\varkappa = 5{,}9 \cdot 10^{-4}$

A 2.3.2. $H = 2{,}1 \cdot 10^6 \text{ A m}^{-1}$

A 2.3.3. $h = \dfrac{(\varepsilon_r - 1)\,\varepsilon_0 \mathfrak{E}^2}{\varrho g}$

A 2.3.4. $\varkappa = 1{,}25 \cdot 10^{-3}$

A 2.3.5. $\mathfrak{M} = N\mathfrak{m}_m, \quad N = \dfrac{N_A \varrho}{A_r \text{ kg kmol}^{-1}} = 8{,}4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}, \quad |\mathfrak{m}_m| = 2{,}6 \cdot 10^{-29} \text{ Vs m}$

A 2.3.6. $|\mathfrak{m}_B| = 1{,}15 \cdot 10^{-29} \text{ Vsm}, \quad \dfrac{|\mathfrak{m}|}{|\mathfrak{m}_B|} = 2{,}3$

A 2.3.7. $W = \dfrac{4H_c M_S m}{\varrho} = 2{,}7 \text{ J}$

A 2.3.8. $W_W = 3kT = 4{,}32 \cdot 10^{-20} \text{ J}, \quad W_m = \mathfrak{m}_m \cdot \mathfrak{H}; \quad |\mathfrak{m}_m| = 2{,}6 \cdot 10^{-29} \text{ Vsm},$
$H = 1{,}66 \cdot 10^9 \text{ A m}^{-1}$. Derartige Felder existieren nur zwischen den Elementarteilchen; sie sind technisch nicht zu realisieren.

A 2.4.1. $N = 0{,}333\ldots, \quad H_i = 60 \text{ A m}^{-1}$

A 2.4.2. $H_i = 999{,}66 \text{ A m}^{-1}$

A 2.4.3. $N = 0{,}5$

A 2.4.4. $H_i = 19998 \text{ A m}^{-1}$

A 2.4.5. Senkrecht zur Plattenebene $N = 1$, parallel $N = 0$

A 2.4.6. $H_i = 20000 \text{ A m}^{-1}, \quad H_i = 19{,}98 \text{ A m}^{-1}$

A 2.4.7. $\varepsilon = 0{,}85, \quad N = 0{,}18$

A 2.4.8. $H = 3{,}3 \text{ A m}^{-1}$ in der Massivkugel, $H = 5{,}0 \text{ A m}^{-1}$ im kleinen Innenraum der Massivkugel

A 2.4.9. $H_i = \dfrac{H_a}{1 + \dfrac{2}{9}\left[1 - \left(\dfrac{R_i}{R_a}\right)^3\right]\left(\dfrac{1}{\mu_r} + \mu_r - 2\right)}, \quad H_i = 1{,}5 \text{ A m}^{-1}$

A 2.4.10. Resultierende Kraft $\mathfrak{F} = \mathfrak{m} \cdot \nabla\mathfrak{H} = \mathfrak{m}_x \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} H_0$. Diamagnetische Stoffe werden aus dem Gebiet maximaler Feldstärke heraus-, paramagnetische Stoffe ($\mathfrak{m}_x > 0$) hineinbewegt.

A 2.4.11. $\mathfrak{H} = \dfrac{1}{4\pi\mu_0 r^3}\left(-\mathfrak{m}_m + \dfrac{3\mathfrak{m}_m \cdot \mathfrak{r}}{r^2}\,\mathfrak{r}\right),$

$\tan i = \dfrac{\mathfrak{H}_r}{\mathfrak{H}_\vartheta} = 2 \tan \vartheta', \quad \vartheta'$ geographische Breite

A 3.1.1.
$$\mathfrak{A}_z = \mu \frac{I}{4\pi} \ln \frac{\left(\frac{l}{2} - z_0 + \sqrt{\left(\frac{l}{2} - z_0\right)^2 + r_1^2}\right)\left(-\frac{l}{2} - z_0 + \sqrt{\left(\frac{l}{2} + z_0\right)^2 + r_2^2}\right)}{\left(\frac{l}{2} - z_0 + \sqrt{\left(\frac{l}{2} - z_0\right)^2 + r_2^2}\right)\left(-\frac{l}{2} - z_0 + \sqrt{\left(\frac{l}{2} + z_0\right)^2 + r_1^2}\right)}$$

A 3.1.2. $\mathfrak{A}_z = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$

A 3.1.3. $-\mathfrak{H}_y \,\mathrm{d}x + \mathfrak{H}_x \,\mathrm{d}y = 0$ bzw. $\mathrm{d}\mathfrak{A}_z = \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} \mathrm{d}y = 0$

Die magnetischen Feldlinien fallen mit den Kurven $\mathfrak{A}_z = \text{const}$ zusammen. Man erhält Kreise.

A 3.1.4. $\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R_a}{R_i}$, $\Phi = 1{,}99 \cdot 10^{-10}$ Vs

A 3.1.5. $\mathfrak{H}$ senkrecht zur Stromrichtung, $H = \frac{I}{b}$, $H = 5\ \mathrm{A\,m^{-1}}$

A 3.1.6. $H = 2{,}26 \cdot 10^4\ \mathrm{A\,m^{-1}}$

A 3.1.7. $H_a = \frac{nI}{\frac{\mu_a}{\mu_i} l + a}$ für $\mu_i a \gg \mu_a l$, d. h. $H_a = \frac{nI}{a}$

A 3.1.8. $H_a = 1{,}21 \cdot 10^5\ \mathrm{A\,m^{-1}}$

A 3.1.9. $H = 16\ \mathrm{A\,m^{-1}}$

A 3.1.10. Mitte: $H = 1000\ \mathrm{A\,m^{-1}}$, Abstand 4 m: $H = 1{,}9\ \mathrm{A\,m^{-1}}$

A 3.1.11. a) 1. $H = 3900\ \mathrm{A\,m^{-1}}$, a) 2. $H = 2320\ \mathrm{A\,m^{-1}}$,
b) 1. $H = 2320\ \mathrm{A\,m^{-1}}$, b) 2. $H = 1220\ \mathrm{A\,m^{-1}}$

A 3.2.1. $I = 2{,}4 \cdot 10^{-10}$ A

A 3.2.2. $F = 1$ N

A 3.2.3. $F = 0{,}2$ N

A 3.2.4. $M = 1{,}06 \cdot 10^{-3}$ Nm

A 3.2.5. $M = 1{,}6$ Nm

A 3.2.6. $I = 2{,}6 \cdot 10^{-10}$ A

A 3.2.7. $\varphi = \frac{\Phi_F I}{D} \left[1 - \mathrm{e}^{-\frac{bt}{2J}} \left(1 + \frac{bt}{2J}\right)\right]$

A 3.2.8. $\mathrm{e}^{-x}(1 + x) = 0{,}01$ mit $x = \frac{bt}{2J} = 6{,}64$, $t = 1{,}44$ s

A 3.2.9. $\dot{\varphi}(0) = 0{,}031\ \mathrm{s^{-1}} = 1{,}8°\ \mathrm{s^{-1}}$

A 3.2.10. $\varphi_M = 3{,}0°$, $t_M = 2{,}6$ s

A 3.2.11. $\varphi = \dot{\varphi}(0)\, t\, \mathrm{e}^{-\frac{bt}{2J}}$, $\varphi_M = \frac{Q\Phi_F}{e\sqrt{JD}}$,

$t_M = \sqrt{\frac{J}{D}}$

A 3.2.12. $\varphi = \frac{I\Phi_F}{D}\left[1 - e^{-\frac{bt}{2J}}\left(\cos\frac{\sqrt{4JD-b^2}}{2J}t + \frac{b}{\sqrt{4JD-b^2}}\sin\frac{\sqrt{4JD-b^2}}{2J}t\right)\right]$,

$\varphi = 0{,}9864\varphi_M$

A 3.2.13. $t_M = 3{,}6$ s, $\varphi_M = 3{,}1°$

A 3.2.14. $b\,\frac{d\varphi}{dt} = \Phi_F I, \quad \varphi(t) = \frac{\Phi_F}{b}\int_0^t I\,dt$

Meßausschlag $\varphi_M = 1{,}6°$ wird praktisch sofort angenommen. Beim Rückstellen kriecht das Gerät gemäß $\varphi = \varphi_M\,e^{-\frac{D}{b}t} = \varphi_{max}\,e^{-0{,}002t}$

A 3.2.15. $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \frac{\mu_0 R I_0 I}{x_0 - x}$, Endauslenkung $x_M = \frac{x_0}{2} - \sqrt{\frac{x_0^2}{4} - \frac{\mu_0 R I_0 I}{k}}$,

$x_M = 1{,}7$ mm

A 3.2.16. $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \mu_0 lHI$, Endauslenkung $x_M = \frac{\mu_0 lHI}{k} = 6{,}3$ mm

A 3.3.1. $R_{sh} \leqq 15{,}15\,\Omega$

A 3.3.2. $I = I_1 + I_2 < 3{,}9$ A

A 3.3.3. $R_V = 90{,}5$ kΩ

A 3.3.4. $R_x = 101{,}1\,\Omega$

A 3.3.5. $R = 49{,}9\,\Omega$

A 3.4.1. $q = -6{,}25 \cdot 10^{-17}$ As

A 3.4.2. $E = \frac{4}{3}\pi\frac{r^3\varrho g}{e} = 2{,}3 \cdot 10^5$ V m^{-1}

A 3.4.3. $v_1 = 1{,}101$ cm s^{-1}, $v_2 = 1{,}092$ cm s^{-1}

A 3.4.4. $v_1 = 1{,}106$ cm s^{-1}, $v_2 = 1{,}087$ cm s^{-1}

A 3.4.5. $v_z = 5{,}86 \cdot 10^5$ m s^{-1}, $\alpha = 11{,}0°$

A 3.4.6. $r_e = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 m_e c^2} = 1{,}4 \cdot 10^{-15}$ m

A 3.4.7. $y^2 = Cx$ mit $C = 0{,}0833$ m^{-1} bzw. $C = 0{,}0788$ m^{-1}; $\Delta y = 1{,}7$ mm

A 3.5.1. $k_{Al} = 0{,}0932$ mg A^{-1} s^{-1}, $k_H = 0{,}01045$ mg A^{-1} s^{-1}

A 3.5.2. $F = 9{,}648 \cdot 10^7$ As kmol^{-1}

A 3.5.3. $t = 170$ s

A 3.5.4. $\sigma = 1{,}30$ m^2 kmol^{-1} F^{-1}

A 3.5.5. $v = 0{,}51$ mm s^{-1}

A 3.5.6. $v = 0{,}33 \text{ mm s}^{-1}$

A 3.5.7. $\frac{c_2}{c_1} = \frac{b_{+2}(b_{+1} + b_-)}{b_{+1}(b_{+2} + b_-)}, \quad c_2 = 0{,}01064$

A 3.5.8. $v = 0{,}054 \text{ mm s}^{-1}$

A 3.5.9. $n = 5{,}9 \cdot 10^{28}, \quad b = 6{,}5 \text{ mm/s V m}^{-1}$

A 3.5.10. $U_\text{H} = 4{,}2 \cdot 10^{-5}$ V

A 3.5.11. $v = 0{,}38 \text{ mm s}^{-1}$

A 3.5.12. $N = 1{,}8 \cdot 10^{29}$

A 4.1.1. $L = 12{,}6\,\Omega, \quad |\mathfrak{R}| = 19{,}6\,\Omega, \quad I_\text{eff} = 11{,}2 \text{ A}, \quad \varphi = 40°$

A 4.1.2. a) $\omega L - \frac{1}{\omega C} = -3{,}1 \text{ k}\Omega, \quad |\mathfrak{R}| = 3{,}1 \text{ k}\Omega$; b) $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 467\,\Omega, \quad |\mathfrak{R}| = 478\,\Omega$

A 4.1.3. $C = 101 \text{ pF}, \quad C = 38{,}6 \text{ pF}$

A 4.1.4. $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f_0 = 1{,}6 \text{ MHz}$

für beide Schaltungen

A 4.1.5. $P = 1{,}89$ kW

A 4.1.6. $R \ll \omega L, \quad |\mathfrak{R}| = \omega L = 471 \text{ k}\Omega, \quad \cos\varphi = 1{,}06 \cdot 10^{-5}, \quad P = 2{,}2 \text{ mW}$

A 4.1.7. $f_0 = 1{,}13 \cdot 10^6 \text{ Hz}, \quad \Delta f = 5500 \text{ Hz}$

A 4.1.8. $\tau = 14{,}3$ s

A 4.1.9. $t_{0,999} = 0{,}35$ s

A 4.1.10. $I = I_0 \, e^{-\frac{R}{L}t}$

A 4.1.11. $t_{0,01} = 23$ ms

A 4.1.12. $t = RC = 2 \cdot 10^{-8}$ s

A 4.1.13. Mit zunehmender Stärke des Magnetfeldes nimmt die Permeabilität ab. Daher verringert sich die Selbstinduktion der Spule mit Eisenkern, wenn die Stromstärke ansteigt. Der Schwingkreis stellt ein anharmonisches System dar. Seine Resonanzfrequenz hängt von der effektiven Stromstärke ab.

A 4.1.14. $b = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ Js

A 4.1.15. Bei Anpassung folgt $U_\text{eff} = \frac{\sqrt{2}}{4} U_0$

A 4.1.16. $R_\text{a} = R_\text{i}, \quad \varphi_\text{a} = \varphi_\text{i}$ bzw. $\mathfrak{R}_\text{a} = \mathfrak{R}_\text{i}$

A 4.2.1. $b = 10 \lg \frac{P_1}{P_2} = 27 \text{ dB}, \quad \beta = \frac{1}{2} \ln \frac{P_1}{P_2} = 3{,}11 \text{ Np}$

A 4.2.2. $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{Z} \coth g$, d. h. $\mathfrak{R}_1 = \infty$

A 4.2.3. $b = 27$ dB, $\beta = 3{,}11$ Np

A 4.2.4. $P_1 : P_2 = 3{,}2 \cdot 10^3$, $U_1 : U_2 = 56$

A 4.2.5. $Z = 219\,\Omega$, $\gamma = \beta = 3{,}09$

A 4.2.6. $R = 229\,\Omega$, $1/G = 84{,}7\,\Omega$

A 4.2.7.
$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\gamma & \mathfrak{Z}\sinh\gamma \\ \frac{1}{\mathfrak{Z}}\sinh\gamma & \cosh\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\gamma & \mathfrak{Z}\sinh\gamma \\ \frac{1}{\mathfrak{Z}}\sinh\gamma & \cosh\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cosh 2\gamma & \mathfrak{Z}\sinh 2\gamma \\ \frac{1}{\mathfrak{Z}}\sinh 2\gamma & \cosh 2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

A 4.2.8. $f_g = 3{,}2 \cdot 10^7$ Hz

A 4.2.9. Durchlaßbereich $\omega > \omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}}$, $\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$

Sperrbereich $\omega < \omega_0$, $\mathfrak{Z} = \mathrm{i}\sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1}$

A 4.2.10. Durchlaßbereich $\omega < \omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}}$, $\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}$

Sperrbereich $\omega > \omega_0$, $\mathfrak{Z} = \mathrm{i}\sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2}}$

A 4.2.11. $f_{\mathrm{I}} = 1{,}34 \cdot 10^5 \text{ Hz} < f < 1{,}65 \cdot 10^5 \text{ Hz} = f_{\mathrm{II}}$

A 4.2.12. $R_x = 90{,}9\,\Omega$, $L_x = 225$ mH

A 4.2.13. $R_x = \frac{R_1 R_2}{R_3}$, $C_x = \frac{C_2 R_3}{R_1}$

A 4.2.14. $\ddot{u} = 1000$, $\mathfrak{R}_E = \mathrm{i}\,471\,\Omega$

A 4.2.15. $U_{2\,\mathrm{eff}} = 0{,}22$ V, $I_{2\,\mathrm{eff}} = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ A, $P = 3{,}3 \cdot 10^{-6}$ W

A 4.2.16. $\mathfrak{R}_E = \mathfrak{R}_A \ddot{u}^2 = \mathfrak{R}_A \frac{n_1^2}{n_2^2}$

A 4.3.1. $\mathrm{i}\,\omega L = \mathrm{i}\,15{,}5\,\Omega$

A 4.3.2. a) $n = 892$, b) $n = 28$

A 4.3.3. $L = 444$ mH, $\omega L - \frac{1}{\omega C} = -178\,\Omega$, $|\mathfrak{R}| = 184\,\Omega$, $\mathfrak{R} = (44{,}9 - \mathrm{i}\,178)\,\Omega$,
$\varphi = -75°50'$

A 4.3.4. $L = 88{,}8\,\mu$H, $R = 319$ mΩ, $\omega_0 = 3{,}36 \cdot 10^7\,\mathrm{s}^{-1}$, $f_0 = 5{,}34$ MHz, $\lambda_0 = 56{,}1$ m,
$\frac{2L}{R} = 0{,}557$ ms

A 4.3.5. $L_{12} = 7{,}9\ \mathrm{mH}$

A 4.3.6. $Z = 96{,}6\,\Omega$

A 4.3.7. $2R_\mathrm{i} = 3{,}07\ \mathrm{cm}$

A 4.3.8. $L' = 2{,}5 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{H\,m^{-1}}, \quad C' = 1{,}2 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{F\,m^{-1}}, \quad Z = 4{,}6\,\Omega$

A 4.3.9. $Z = Z_0\,\mathrm{e}^{cz}, \quad Z_0 = 10\,\Omega, \quad c = 2{,}77\ \mathrm{m^{-1}}, \quad z = 0 : a = 1{,}3\ \mathrm{mm},$
$z = l = 0{,}5\ \mathrm{m} : a = 5{,}3\ \mathrm{mm}$

A 4.3.10. $L' = 4{,}8 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{H\,m^{-1}}, \quad Z = 14{,}4\,\Omega$

A 4.3.11. $L' = 2{,}59 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{H\,m^{-1}}$

A 4.3.12. $L_{11} = 2{,}75\ \mathrm{mH}$ für 1 km, $L_{11} = 5{,}78\ \mathrm{mH}$ für 2 km

A 4.3.13. $L = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{2h}{r_0}, \quad C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln \frac{2h}{r_0}}; \quad L = 5{,}6 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{H}$

A 4.3.14. $Z = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln \frac{2h}{r_0}, \quad Z = 497{,}6\,\Omega$

A 4.4.1. $d = 1{,}6\ \mathrm{cm}, \quad d = 0{,}66\ \mu\mathrm{m}$

A 4.4.2. $R' = \frac{1}{2\pi\gamma d}\left(\frac{1}{R_\mathrm{a}} + \frac{1}{R_\mathrm{i}}\right), \quad R' = 2{,}1\,\Omega$

A 4.4.3. $\frac{\mathfrak{R}_\mathrm{E}}{z} = \mathrm{i}\,0{,}50$ für $\mathfrak{R}_\mathrm{A} = 0; \quad \tan \frac{2\pi l}{\lambda} = 0{,}5,$
$l = 0{,}074\lambda + n \cdot 0{,}5\lambda \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$

A 4.4.4. $\frac{l}{\lambda} = 0{,}311 + n \cdot 0{,}5$, wenn $\frac{\mathfrak{R}_\mathrm{E}}{Z} = -\mathrm{i}\,2{,}5$ sein soll; die Transformation wird durch $l = 0{,}385\lambda + n \cdot 0{,}5\lambda$ realisiert.

A 4.4.5. $\mathfrak{R}_\mathrm{E} = 0$ für $l = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2}$

A 4.4.6. Spannungsmaximum: $l = n\frac{\lambda}{2}$; Spannungsminimum $l = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2}$

A 4.4.7. $Z = 20\,\Omega, \quad \frac{l}{\lambda} = 0{,}1, \quad \mathfrak{R}_\mathrm{E} = \mathrm{i}\,9{,}2\,\Omega$

A 4.4.8. $m = 0{,}67$

A 4.4.9. $m = 0{,}56, \quad \frac{l}{\lambda} = 0{,}296$

A 4.4.10. $Z = 360\,\Omega, \quad \frac{l}{\lambda} = 0{,}075, \quad \frac{\mathfrak{R}_\mathrm{E}}{Z} = 1{,}2 - \mathrm{i}\,0{,}4, \quad \mathfrak{R}_\mathrm{E} = (430 - \mathrm{i}\,140)\,\Omega$

A 4.4.11. $\mathfrak{R}_\mathrm{E} = (42 - \mathrm{i}\,45)\,\Omega$

A 4.4.12. $\mathfrak{R}_\mathrm{A} = (49 - \mathrm{i}\,21)\,\Omega$

A 4.4.13. $m = 0{,}50$, $\frac{l'}{\lambda} = 0{,}105$; $(\mathfrak{R}_E)_{min} = 30\,\Omega$ für $l = 7{,}9$ cm,

$(\mathfrak{R}_E)_{max} = 120\,\Omega$ für $l = 2{,}9$ cm

A 4.4.14. $\frac{1}{m} = 2{,}5$, $m = 0{,}40$, $(\mathfrak{R}_E)_{min} = 28\,\Omega$, $l = \frac{\lambda}{4}$

A 4.4.15. $\mathfrak{G}_E Z = \frac{\mathfrak{G}_A Z + \mathrm{i}\tan\alpha l}{1 + \mathrm{i}\,\mathfrak{G}_A Z \tan\alpha l}$

A 4.4.16. $\mathfrak{G}_E Z = \mathrm{i}\tan\alpha l$, $\frac{\mathfrak{R}_E}{Z} = -\mathrm{i}\cot\alpha l$

A 4.4.17. Der Anpassungskreis m bleibt unverändert. Zum Parameter des Phasenkreises ist 0,25 zu addieren.

$m = 0{,}675$, $\frac{l}{\lambda} = 0{,}06 + 0{,}25 = 0{,}31$, $\mathfrak{G}_E Z = 1{,}26 - \mathrm{i}0{,}35$

A 4.4.18. $m = 0{,}5$; $l_0 = 0{,}125\lambda$, $Z_1 = 84{,}8\,\Omega$, $l_1 = 0{,}25\lambda$

A 4.4.19. $\frac{\lambda}{4}: \frac{\mathfrak{R}_E}{Z_I} = \frac{4Z_I}{\mathfrak{R}_A}$, $\frac{\lambda}{2}: \frac{\mathfrak{R}_E}{Z_I} = 0$

A 4.4.20. Für $l = 0$ folgt $p = \frac{U_1}{U_2} = \frac{\mathfrak{R}_A - \mathfrak{Z}}{\mathfrak{R}_A + \mathfrak{Z}}$

A 4.4.21. $\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}\left[1 - \frac{\mathrm{i}}{\omega}\left(\frac{R'}{2L'} - \frac{G'}{2C'}\right)\right]$,

$\gamma = \mathrm{i}\,\omega\sqrt{L'C'}\left[1 - \frac{\mathrm{i}}{\omega}\left(\frac{R'}{2L'} + \frac{G'}{2C'}\right)\right]$

A 4.5.1. Emitterschaltung: $U_{EB} = 0{,}3$ V, $U_{EC} = 4{,}8$ V
Kollektorschaltung: $U_{EC} = 4{,}8$ V, $U_{BC} = 4{,}5$ V

A 4.5.2. $\alpha = 99{,}55\% \cdots 99{,}82\%$

A 4.5.3. $\mathfrak{R}_{1B} = 65{,}2\,\Omega$

A 4.5.4. $\alpha = 0{,}928$, $\beta = 13$, $\gamma = 14$

A 4.5.5. $\frac{I_1}{I_2} = 69{,}5$

A 4.5.6. $\mathfrak{R}_1 = 457\,\Omega$

A 4.5.7. $\mathfrak{R}_2 = \frac{h_{11} + \mathfrak{R}_G}{\Delta h + h_{22}\mathfrak{R}_G}$

A 4.5.8. $\mathfrak{R}_1 = R_G = \sqrt{\frac{h_{11}\,\Delta h}{h_{22}}}$, $\mathfrak{R}_2 = R_L = \sqrt{\frac{h_{11}}{h_{22}\,\Delta h}}$

$\left(\frac{P_2}{P_1}\right)_{opt} = \frac{I_2{}^2 R_L}{I_1{}^2 R_G} = \frac{h_{21}^2}{\left(\sqrt{\Delta h} + \sqrt{h_{11}h_{22}}\right)^2}$

A 4.5.9. $h_{11b} = \frac{h_{11e}}{1 + h_{21e} - h_{12e} + \Delta h_e}, \quad h_{12b} = \frac{\Delta h_e - h_{12e}}{1 + h_{21e} - h_{12e} + \Delta h_e}$

$h_{21b} = \frac{-h_{21e} - \Delta h_e}{1 + h_{21e} - h_{12e} + \Delta h_e}, \quad h_{22b} = \frac{h_{22e}}{1 + h_{21e} - h_{12e} + \Delta h_e};$

$h_{11c} = h_{11e}, \quad h_{12c} = 1 - h_{12e}, \quad h_{21c} = -1 - h_{21e}, \quad h_{22c} = h_{22e}$

A 4.5.10. $\left(\frac{I_2}{I_1}\right)_B = 0{,}989, \quad \left(\frac{I_2}{I_1}\right)_C = 73{,}3$

A 4.5.11. $\beta = 100$

A 4.5.12. $U_B = 10$ V

A 4.5.13. $I_B = 60\ \mu$A, $I_E = 3{,}06$ mA, $U_{BE} = 610$ mV, $U_{CB} = 3{,}39$ V

A 4.5.14. $U_B = 9{,}2$ V, $R_V = \frac{U_B - U_{BE}}{I_B} = 122{,}5\ \mathrm{k\Omega}$ mit $U_{BE} = 625$ mV

A 4.5.15. $\frac{P_2}{P_1} = \frac{R_L I_C}{R_V I_B^2} = 29{,}4$

A 4.5.16. $U_{BE} = 590$ mV, $R_I = 20{,}1\ \mathrm{k\Omega}$, $R_{II} = 5{,}9\ \mathrm{k\Omega}$, $U_B = 3{,}2$ V

A 4.5.17. $R_{i0} = 16{,}5\ \mathrm{M\Omega}$, $R_{iL} = 5\ \Omega$

A 4.5.18. $P_N = 4{,}5$ W, $P_0 = 0{,}12$ mW, $P_L = 150$ mW

A 4.5.19. $C = 0{,}455\ \mu$F

A 4.5.20. $U_{EC} = U_B \leqq 10$ V

A 4.5.21. $R_V = \frac{U_B - U_{BE}}{I_B} - R_E \left(\frac{I_C}{I_B} + 1\right)$

A 4.5.22. $\frac{R_I}{R_{II}} = \frac{U_B - U_{BE} - R_E(I_C + I_B)}{U_{BE} + I_B R_{II} + R_E(I_C + I_B)}$

A 4.5.23. $h_{11}' = h_{11} + h_{22} R' \frac{(1 + h_{21})(1 - h_{12})}{h_{22}(1 + h_{22} R')}$

$h_{12}' = \frac{h_{12} + h_{22} R'}{1 + h_{22} R'}, \quad h_{21}' = \frac{h_{21} - h_{22} R'}{1 + h_{22} R'}, \quad h_{22}' = \frac{h_{22}}{1 + h_{22} R'}$

A 5.1.1. $R_S = 12{,}3\ \Omega$

A 5.1.2. $\mathfrak{E}_{\mathrm{eff}} = 0{,}25\ \mathrm{V\,m^{-1}}$

A 5.1.3. $I_{\mathrm{eff}} = 13{,}2$ A

A 5.1.4. $P = 6{,}3$ kW

A 5.1.5. Die entgegengesetzten Ladungen bewegen sich oben und unten in gleicher Richtung. Sind sie unmittelbar benachbart, so heben sich ihre Felder auf. Ein Feld ist jedoch bereits bei sehr kleinen Abständen nachzuweisen.

A 5.1.6. $(\mathfrak{E}_\vartheta)_{\mathrm{eff}} = \frac{Z_0}{2\pi r_0} I_{\mathrm{eff}} \frac{\sin(\pi \sin\vartheta)}{\sin\vartheta}$

A 5.1.7. a) $n = 1, 3, 5, \ldots \quad (\mathfrak{E}_\vartheta)_{\text{eff}} = \dfrac{Z_0}{2\pi r_0} \dfrac{\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\cos\vartheta\right)}{\sin\vartheta}$,

b) $n = 2, 4, 6, \ldots \quad (\mathfrak{E}_\vartheta)_{\text{eff}} = \dfrac{Z_0}{2\pi r_0} \dfrac{\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\cos\vartheta\right)}{\sin\vartheta}$

A 5.1.8. $R_S = 36{,}6\,\Omega$

A 5.1.9. $R_S = 73{,}2\,\Omega$

A 5.1.10. $b = 0{,}42$ dB

A 5.1.11. $\vartheta = \arccos \dfrac{2\nu}{n} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$;

$\vartheta = 70{,}5°$ und $109{,}5°$; $\vartheta = 48{,}2°$ und $131{,}8°$ sowie $\vartheta = 0°$ und $180°$

A 5.1.12. $b = (0{,}42 + 0{,}44)$ dB $= 0{,}86$ dB

A 5.1.13. $\dfrac{h}{\lambda} = 0{,}071, \quad \mathfrak{E}_{\text{eff}} = 8{,}0 \cdot 10^{-4}$ V m^{-1}, $\mathfrak{H}_{\text{eff}} = 2{,}1 \cdot 10^{-6}$ A m^{-1}

A 5.1.14. $R_S = 0{,}0237\,\Omega, \quad P = 0{,}38$ W

A 5.1.15. $V_L = 20{,}8$ dB, $\quad \dfrac{P}{P_{\lambda/2}} = 120, \quad \dfrac{U}{U_{\lambda/2}} = 11{,}0$

A 5.1.16. $g = 389$

A 5.2.1. $b = 0{,}87$ dB, $\quad b = 8{,}7$ dB

A 5.2.2. $(\mathfrak{E}_\vartheta)_{\text{eff}} = 139 \cdot 10^{-6}$ V m^{-1}

A 5.2.3. $(\mathfrak{E}_\vartheta)_{\text{ff}} = 88 \cdot 10^{-3}$ V m^{-1}

A 5.2.4. $U_0 = 10\,\mu$V

A 5.2.5. $U_0 = 0{,}16$ mV

A 5.2.6. $h = 4{,}70$ m

A 5.2.7. $\mathfrak{R}_E = (15 - 368)\,\Omega$

A 5.2.8. $Z = 164\,\Omega$

A 5.2.9. $\mathfrak{E}_{\text{eff}} = 6{,}5 \cdot 10^{-3}$ V m^{-1}

A 5.2.10. $\mathfrak{E}_{\text{eff}} = Z_0 \mathfrak{H}_{\text{eff}} = 5{,}65 \cdot 10^{-3}$ V m^{-1}, $\quad U_{\text{Ant}} = \dfrac{2\pi A}{\lambda} n_i \mathfrak{E}_{\text{eff}} = 3{,}5 \cdot 10^{-3}$ V

A 5.2.11. $d_a = 1{,}27\%, \quad d = 4{,}78\%, \quad x_a = 0{,}367$

A 5.2.12. $\dfrac{a}{b} > 1{,}86$

A 5.2.13. $(1 + m \sin \omega_M t) \sin \omega_T t = \sin \omega_T t + \dfrac{m}{2} \cos(\omega_T - \omega_M)\, t - \dfrac{m}{2} \cos(\omega_T + \omega_M)\, t$

A 5.2.14. $U_R = 1{,}0\ \mu\mathrm{V}$

A 5.2.15. $F = 7{,}1, \quad U_R = 1{,}2\ \mu\mathrm{V}$

A 5.2.16. $F = 12{,}9, \quad \tilde{F} = 11{,}2\ \mathrm{dB}$

A 5.2.17. $\Delta f < 260\ \mathrm{Hz}$

A 5.2.18. $U_R = 3{,}1 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{V}, \quad \mathfrak{E}_{\mathrm{eff}} = 37 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{V\ m^{-1}}$

A 5.2.19. $U_R = 2{,}06 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{V}, \quad \mathfrak{E}_{\mathrm{eff}} = 82 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{V\ m^{-1}}$

A 5.2.20. a) $\Delta\tilde{\varrho} = 20 \lg 2\ \mathrm{dB} = 6{,}0\ \mathrm{dB}$, b) $\Delta\tilde{\varrho} = 10 \lg 2\ \mathrm{dB} = 3{,}0\ \mathrm{dB}$

A 5.3.1. $$h = \sqrt{\frac{\mu_0^2 k_M'^2 - \mu_M^2 k_0'^2}{\mu_0^2 \dfrac{k_M'^2}{k_0^2} - \mu_M^2 \dfrac{k_0'^2}{k_M'^2}}}$$

A 5.3.2. $d = 2{,}1\ \mathrm{mm}$

A 5.3.3. $R = 2{,}5 \cdot 10^{-4}\ \Omega$

A 5.3.4. $R = 45{,}7\ \Omega$

A 5.3.5. keine

A 5.3.6. $\lambda_g = 8{,}48\ \mathrm{cm}$; $H_{01}, H_{10}, H_{11}, H_{20}$

A 5.3.7. $10\ \mathrm{cm} < \lambda < 16\ \mathrm{cm}$

A 5.3.8. 1,77 Np bzw. 15,4 dB

A 5.3.9. Die Welle klingt gemäß $e^{-2\pi\sqrt{\frac{1}{\lambda_g^2} - \frac{1}{\lambda^2}}\,z}$ ab. $\lambda_g = 2a, \quad a = 2{,}35\ \mathrm{cm}$

A 5.3.10. $P = \dfrac{(\mathfrak{E}_{\mathrm{eff}})^2_{\max}}{2Z_0} \left(\dfrac{\lambda}{\Lambda}\right)^2 ab; \quad P = 0{,}716 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{W}$

A 5.3.11. TM : $\lambda^{1,1,0} = 3{,}3\ \mathrm{cm}$, TE : $\lambda^{0,1,1} = 5{,}7\ \mathrm{cm}$

A 5.3.12. $$d = \sqrt{\frac{2}{\pi Z_0 \gamma \sqrt{\dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{l^2}}}}$$

A 5.3.13. $$\frac{1}{Q} = \frac{2\lambda}{\pi\gamma Z_0 d}\left(\frac{l^3 + b^3}{bl^3 + lb^3} + \frac{1}{a}\right)$$

A 5.3.14. $$\frac{1}{Q} = \frac{2\lambda}{\pi\gamma Z_0 d}\left(\frac{\dfrac{n_x^2}{a^3} + \dfrac{n_y^2}{b^3}}{\dfrac{n_x^2}{a^2} + \dfrac{n_y^2}{b^2}} + \frac{1}{l}\right)$$

A 5.3.15. $$\frac{1}{Q} = \frac{2\lambda}{\pi\gamma Z_0 d}\left(\frac{\dfrac{n_x^2}{a^3} + \dfrac{n_y^2}{b^3} + \dfrac{n_z^2}{l^3}}{\dfrac{n_x^2}{a^2} + \dfrac{n_y^2}{b^2} + \dfrac{n_z^2}{l^2}} + \frac{\dfrac{n_x^2}{a^2 b} + \dfrac{n_y^2}{b^2 a}}{\dfrac{n_x^2}{a^2} + \dfrac{n_y^2}{b^2}}\right)$$

A 5.3.16. Q ist proportional der Gesamtenergie, d. h. dem Volumen, entgegengesetzt proportional der Oberfläche und der Eindringtiefe:

$$Q \sim \frac{V}{P_V d} \sim \frac{\lambda^3}{\lambda^2 \sqrt{\lambda}} = \sqrt{\lambda}\,.$$

Der Gütefaktor verändert sich also proportional $\sqrt{\lambda}$, d. h. $Q = 2 \cdot 10^5$.

Tafeln

Tafel 1. Dielektrizitätszahlen

Stoff	$\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$	Bemerkung
Hartporzellan	5···6,5	20 °C
	7···8	90 °C
Spezialporzellan	40···80	
Glas	3···12	
Quarzglas	4	
Glimmer	5···8	
Hartpapier	5···7	
Kabel- und Zellulosepapier (ölimprägniert)	4···4,3	
Gummi	2,5···3,5	
Kolophonium	2,5	
Paraffin	2···2,5	
Polystyrol (Trolitul)	2,5	
Nitrobenzol	36	
Wasser (statisch, bei Sättigungsdruck)	87,69	0 °C
	80,08	20 °C
	55,15	100 °C
	9,74	370 °C
Flußsand	2,5	trocken
	9	15% Wassergehalt
Gartenerde	1,9	trocken
	8	19% Wassergehalt
Ferrite	$10^4 \cdots 10^6$	

Tafel 2. Elektrische Leitfähigkeit der Stoffe

Stoff	γ in $\Omega^{-1}\,m^{-1}$
Aluminium	$33 \cdots 35{,}5 \cdot 10^6$
Eisen rein	$10{,}4 \cdot 10^6$
weicher Stahl	$>6{,}7 \cdot 10^6$

Fortsetzung Tafel 2

Stoff	γ in $\Omega^{-1}\,m^{-1}$
Kupfer weich	$>57 \cdot 10^6$
hart	$>55 \cdot 10^6$
Silber	$61,3 \cdot 10^6$
Manganin (86% Cu, 12% Mn, 2% Ni)	$2,32 \cdot 10^6$
Konstantan (54% Cu, 45% Ni, 1% Mn)	$2,00 \cdot 10^6$
Hartkohle, Graphit	$2,5 \cdots 50 \cdot 10^3$
Glimmer	$10^{-13} \cdots 10^{-15}$
Paraffinöl	10^{-14}
Glas bei 15 °C	$10^{-9} \cdots 10^{-15}$
Quarzglas	$2 \cdot 10^{-18}$

Tafel 3. Magnetische Eigenschaften der Stoffe

Tafel 3A
Suszeptibilität diamagnetischer Stoffe

Stoff	$\varkappa = \mu_r - 1$ 10^{-6}
Steinsalz	$-13,9$
Wismut	-156
Wasser	$-9,0$
Wasserstoff	$-0,002$

Tafel 3B
Suszeptibilität paramagnetischer Stoffe

Stoff	$\varkappa = \mu_r - 1$ 10^{-6}
Palladium	782
Platin	264
Aluminium	21
Flüssiger Sauerstoff	3620
Gasförmiger Sauerstoff	1,8

Tafel 3C. Eigenschaften weichmagnetischer Stoffe

Stoff	Curie-temperatur Θ °C	Anfangs- Permeabilität μ_r 10^3	Maximal- Permeabilität μ_r 10^3	Flußdichte bei $1\,A\,m^{-1}$ in $Vs\,m^{-2}$	Flußdichte bei $10^2\,A\,m^{-1}$ in $Vs\,m^{-2}$	Flußdichte bei $10^4\,A\,m^{-1}$ in $Vs\,m^{-2}$
Hyperm 50	470	5···8	40···60	0,011	0,143	
Permalloy C	430···460	10···40	70···250	0,02···0,03	0,80	0,84
Supermalloy C	400	55···150	100···900	0,4···0,52	bis 0,78	
Mümetall E I	410	25···35	100	0,08	0,72	0,79

Tafel 3D. Sättigungsinduktion, Remanenz, Koerzitivfeldstärke
weich- und hartmagnetischer Werkstoffe sowie von Ferriten und Pulvermagneten

Material	Sättigungsinduktion B_S in $Vs\,m^{-2}$	Remanenz B_R in $Vs\,m^{-2}$	Koerzitivfeldstärke H_c in $A\,m^{-1}$
Eisen (technisch rein)	2,1	0,9···1,4	8···120

Fortsetzung Tafel 3 D

Material	Sättigungsinduktion B_S in Vs m^{-2}	Remanenz B_R in Vs m^{-2}	Koerzitivfeldstärke H_c in A m^{-1}
Nickel (technisch rein)	0,61	bis 0,38	50···220
Kobalt (technisch rein)	1,67···1,89	0,5···0,9	640···880
Hyperm (50% Ni, Fe)	1,5···1,6	0,6···1,2	5···8
Permalloy C (Fe, Ni, Mo)	0,8···0,9	0,5	3
Supermalloy (Fe, Ni, Mo)	0,68···0,8	0,4···0,5	0,2···0,7
Chrom—Nickel—Stahl		0,3	30000
Platin—Eisen		0,45···0,63	120000···350000
Magnetit Fe_3O_4	bis 0,6	0,32	170
Siferrit 1100 N 22 (MnO, ZnO, Fe_2O_3)	0,4	0,14	24
Kobaltferrit		0,16	70000
Mangan—Wismut (Bismanol, Pulvermagnet)		0,43···0,48	290000

Tafel 4. Physikalische Konstanten

Elektrische Feldkonstante	ε_0	$8{,}8542 \cdot 10^{-12}$ As V^{-1} m^{-1}
Magnetische Feldkonstante	μ_0	$1{,}257 \cdot 10^{-6}$ Vs A^{-1} m^{-1}
BOLTZMANN-Konstante	k	$1{,}3807 \cdot 10^{-23}$ J K^{-1}
Elektrisches Elementarquantum	e	$1{,}602 \cdot 10^{-19}$ As
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c_0	$2{,}99792 \cdot 10^{8}$ m s^{-1}
AVOGADROsche Konstante	N_A	$6{,}0220 \cdot 10^{26}$ kmol^{-1}
Ruhmasse des Elektrons	m_e	$9{,}109 \cdot 10^{-31}$ kg
Ruhmasse des Protons	m_p	$1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ kg
Ruhmasse des Neutrons	m_n	$1{,}6749 \cdot 10^{-27}$ kg
Gaskonstante, allgemeine	R	$8{,}3144 \cdot 10^{3}$ J kmol^{-1} K^{-1}
PLANCKsches Wirkungsquantum	h	$6{,}6262 \cdot 10^{-34}$ Js
FARADAYsche Konstante	F	$9{,}6485 \cdot 10^{7}$ As kmol^{-1}

Tafel 5. Formelzeichen und Kurzzeichen

A	Ampere
A	Amplitude
	Fläche
A_r	relative Atommasse (früher Atomgewicht)
$\mathfrak{A}$	Flächenvektor
	Vektorpotential

a	Abstand, geometrische Länge, Lagekoordinate
B	Basis, Basiselektrode
B	Amplitude
$\mathfrak{B}$	magnetische Flußdichte oder Induktion
b	Dicke, geometrische Länge, Lagekoordinate
	Dämpfung in dB
	Beweglichkeit
C	Coulomb
	Kollektor, Kollektorelektrode
C	Amplitude
	Kapazität
	Wegkurve
c	Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen im Medium
	Konzentration
c_0	Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen im Vakuum
$\mathfrak{D}$	dielektrische Erregung oder Verschiebungsdichte
d	Eindringtiefe
E	Emitter, Emitterelektrode
$\mathfrak{E}$	elektrische Feldstärke
e	Elementarladung
$\mathfrak{e}$	Einheitsvektor
F	Farad
F	Rauschzahl
$\mathfrak{F}$	Kraft
f	Frequenz
G	Ableitung
$\mathfrak{G}$	Leitwert
g	Gewinn einer Antenne
	Übertragungsmaß
H	HANKELsche Funktion
$\mathfrak{H}$	magnetische Feldstärke
h	effektive Höhe, geometrische Abmessung
	hybrider Vierpolparameter
	Übertragungsparameter
I	Stromstärke
i	imaginäre Einheit
$\mathfrak{i}$	Einheitsvektor
J	Joule
J	BESSEL-Funktion
	Trägheitsmoment
$\mathfrak{J}$	Stromdichtevektor des gesamten Stromes
$\mathfrak{j}$	Einheitsvektor
	Stromdichtevektor einer Ionenart
$\mathfrak{K}$	Oberflächenstromdichte in A m^{-1}
k	BOLTZMANN-Konstante
	elektrochemisches Äquivalent
	Wellenzahl
$\mathfrak{k}$	Einheitsvektor
L	Induktivität
$\mathfrak{L}$	Drehimpuls
l	geometrische Länge
M	molare Masse

M_r	relative Molekülmasse (früher Molekulargewicht)
$\mathfrak{M}$	Drehmoment
	Magnetisierung
m	Anpassung
	Dipolzahl
	Masse
$\mathfrak{m}_e$	elektrisches Moment
$\mathfrak{m}_m$	magnetisches Moment
N	Entmagnetisierungsfaktor
	NEUMANNsche Funktion
	Teilchenzahl
n	Brechzahl
	Dipolzahl
	Teilchenzahl
	Windungszahl
$\mathfrak{n}$	Normalenvektor (Einheitsvektor)
P	Leistung
	Polstärke
	Punkt
$\mathfrak{P}$	elektrische Polarisation
p	Druck
	Rauschleistung
Q	Ladung
q	Ladung
	Linienladungsdichte
R	elektrischer Widerstand
	Radius eines Spulenquerschnitts, Zylinderradius
$\mathfrak{R}$	Impedanz
$\mathfrak{R}_A$, $\mathfrak{R}_L$	Abschluß-, Last- bzw. Nutzwiderstand
$\mathfrak{R}_E$	Eingangswiderstand einer Leitung oder eines Vierpols
$\mathfrak{R}_i$	Innenwiderstand
$\mathfrak{R}_1$	Eingangswiderstand eines Transistors
$\mathfrak{R}_2$	Ausgangswiderstand eines Transistors
r	Radius, Zylinder- bzw. Kugelkoordinate
$\mathfrak{r}$	Radius- bzw. Abstandsvektor
S	Verzweigungsschnitt
$\mathfrak{S}$	POYNTING-Vektor
s	Spin
$\mathfrak{s}$	Leiterelement
T	thermodynamische Temperatur
t	Zeit
U	Spannung
U_M	magnetische Spannung
u, v	Koordinaten bei konformer Abbildung
V	Volt
V	Volumen
V_L	Leistungsverstärkung
v	Driftgeschwindigkeit, Teilchengeschwindigkeit
W	Watt
W	Energie
w	Energiedichte
	komplexe Variable bei konformer Abbildung

x, y	Abmessungen, Koordinaten, Variable
Z	Ladungszahl
	Wellenwiderstand
	Zylinderfunktion
Z_0	Wellenwiderstand des Vakuums
$\mathfrak{Z}$	HERTZscher Vektor
	komplexer Wellenwiderstand
z	Abmessung, komplexe Variable, Zylinderkoordinate
α	Dissoziationsgrad
	Kurzschlußstromverstärkung in Basisschaltung
	Phasenmaß
	Winkel
β	Dämpfung in Np
	Kurzschlußstromverstärkung in Emitterschaltung
	Winkel
γ	elektrische Leitfähigkeit
	Fortpflanzungskonstante
	Kurzschlußstromverstärkung in Kollektorschaltung
ε	Dielektrizitätskonstante (absolute) oder Permittivität
	numerische Exzentrizität
ε_r	Dielektrizitätszahl (relative Dielektrizitätskonstante)
ε_0	elektrische Feldkonstante
ζ	komplexe Variable bei konformer Abbildung, Lagekoordinate
η	Koordinate
	Zähigkeit
Θ	CURIE-Temperatur
ϑ	Kugelkoordinate
$\varkappa$	Suszeptibilität
Λ	Wellenlänge im Hohlleiter
λ	Wellenlänge
μ	Permeabilität (absolute)
μ_r	Permeabilitätszahl (relative Permeabilität)
μ_0	magnetische Feldkonstante
ν	Laufzahl
ξ, η	Koordinaten
ϱ	Raumladungsdichte
	Massendichte
	Störabstand
σ	Fläche
	Flächenladungsdichte
τ	Zeitkoordinate
Φ	Potential
φ	Phasenverschiebung
	Winkel, Zylinder- bzw. Kugelkoordinate
Ψ, ψ	magnetisches Potential
	Potentialfunktion
Ω	Ohm
ω	Kreisfrequenz

Literaturverzeichnis

[1] Brdička, R.: Grundlagen der Physikalischen Chemie. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1970
[2] Bronstein, I. N., u. K. A. Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1969
[3] Claussnitzer, H.: Einführung in die Elektrotechnik. Berlin: VEB Verlag Technik 1966
[4] Feynman, R. P., R. P. Leighton u. M. Sands: The Feynman Lectures on Physics. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley 1964
[5] Fischer, H.-J.: Transistortechnik. Berlin: Deutscher Militärverlag 1967
[6] Frühauf, H., u. E. Trzeba: Synthese und Analyse linearer Hochfrequenzschaltungen. Basel: Pfalz-Verlag 1966
[7] Grimsehl, E.: Lehrbuch der Physik. Bd. 2: Elektromagnetisches Feld. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1967
[8] Haberditzl, W.: Magnetochemie. Berlin: Akademie-Verlag, Oxford: Pergamon Press, Braunschweig: Friedr. Vieweg + Sohn 1968
[9] Halbleiterwerk Frankfurt/Oder: Transistoren-Kataloge Silizium-Transistoren, Germanium-Transistoren. Frankfurt/Oder: RFT electronic 1969
[10] Heber, G., u. B. Kozik: Physik. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1970
[11] Holzmüller, W.: Technische Physik. Bd. 2/2: Elektrotechnik. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1966
[12] Hütte: Des Ingenieurs Taschenbuch. Bd. IV: Elektrotechnik, Teil B: Fernmeldetechnik. Berlin, München: Wilhelm Ernst & Sohn 1962
[13] Joos, G.: Lehrbuch der Theoretischen Physik. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig 1964
[14] Landau, L. D., u. E. M. Lifschitz: Lehrbuch der Theoretischen Physik. Bd. II: Klassische Feldtheorie. Bd. VIII: Elektrodynamik der Kontinua. Berlin: Akademie-Verlag 1967
[15] Lange, F. H.: Signale und Systeme. Berlin: VEB Verlag Technik 1968
[16] Michlin, S. G.: Lehrgang der mathematischen Physik. Berlin: Akademie-Verlag 1972
[17] Mierdel, G.: Elektrophysik. Berlin: VEB Verlag Technik 1970
[18] Orear, J.: Grundlagen der modernen Physik. München: Carl Hanser Verlag 1971
[19] Paul, R.: Transistormeßtechnik. Berlin: VEB Verlag Technik 1966
[20] Pohl, R. W.: Einführung in die Physik. 3 Bände. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1967 u. 1969
[21] Philippow, E.: Taschenbuch Elektrotechnik. Berlin: VEB Verlag Technik 1969
[22] Pitsch, H.: Lehrbuch der Funkempfangstechnik. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig 1960

[23] RINT, C.: Handbuch für Hochfrequenz- und Elektro-Techniker. Berlin: Verlag für Radio—Foto—Kinotechnik 1969
[24] RUMPF, K.-H., u. M. PULVERS: Transistor-Elektronik. Berlin: VEB Verlag Technik 1970
[25] SCHILLING, H.: Statistische Physik in Beispielen. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1972
[26] SCHOLZ, C.: Magnetbandspeichertechnik. Berlin: VEB Verlag Technik 1968
[27] SCHRÖDER, H.: Elektrische Nachrichtentechnik. 3 Bände. Berlin: Verlag für Radio—Foto—Kinotechnik 1959 bis 1972
[28] SCHWERTFEGER, H.-J.: Grundlagen der elektronischen digitalen Schaltungstechnik. Berlin: transpress VEB Verlag für Verkehrswesen 1971
[29] SIMONYI, K.: Theoretische Elektrotechnik. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1971
[30] SOMMERFELD, A.: Vorlesungen über Theoretische Physik. Bd. III: Elektrodynamik. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig 1967
[31] STEINBUCH, K.: Taschenbuch der Nachrichtenverarbeitung. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1962
[32] ВОНСОВСКИЙ, С. В. (Wonsowski, S. W.): Магнетизм микрочастиц (Magnetismus der Mikroteilchen). Moskau: Nauka 1973
[33] WUNSCH, G.: Feldtheorie. Berlin: VEB Verlag Technik 1973
[34] WUNSCH, G.: Systemtheorie der Informationstechnik. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig 1971

Sachwortverzeichnis

Welches magnetische Moment hat ein Elektron, das den Atomkern umkreist? — Wie werden α-Strahlen durch ein Magnetfeld abgelenkt? — Welche Beweglichkeit haben Natriumionen in Lösung? — Wie ist eine Bandleitung zu dimensionieren, welchen Wellenwiderstand hat sie, wie ist der Nutzwiderstand anzupassen? — Welche Leistung strahlt eine Vertikalantenne ab, wie groß ist ihr Gewinn, welche Dämpfung tritt auf, wie groß muß die Verstärkung sein? — Wie wird die Rauschzahl eines Transistors gemessen?
Die Lösung dieser Fragen erfordert die Beherrschung der Gesetze elektrischer und magnetischer Felder. Sie sind für den in der Grundlagenforschung tätigen Wissenschaftler ebenso von Bedeutung wie für den in der Industrie beschäftigten Ingenieur.
Während der Studierende häufig nicht in der Lage ist, die abstrakten mathematischen Gesetze zu veranschaulichen und anzuwenden, bereiten dem Praktiker vielfach die umfangreichen allgemeingültigen Theorien Schwierigkeiten.
Der Verfasser kennt aus seiner Arbeit in der Industrie, an Hochschulen und in der Grundlagenforschung die Probleme des Studierenden ebenso wie die des Praktikers. Sein Buch soll beiden eine Hilfe geben. Es setzt die mit „Hajko: Physik in Beispielen“ und „Schilling: Statistische Physik in Beispielen“ begonnene Reihe fort.
Jeder der 21 Abschnitte des Buches ist dreigeteilt: Der Lehrtext faßt die wichtigsten Gesetze zusammen und zeigt ihre Verknüpfung auf. In den systematisch ausgewählten Beispielen werden Einzelheiten herausgearbeitet und die aufgeworfenen Probleme bis zur numerischen Durchrechnung abgehandelt. Mit den abschließenden Aufgaben erhält der Leser die Möglichkeit, das erworbene Wissen an Hand der angegebenen Lösungen zu überprüfen.
Die Darbietung wichtiger physikalischer Gesetze in Form von Beispielen aus der Elektrotechnik ließ es als zweckmäßig erscheinen, den üblichen Rahmen der klassischen Physik elektromagnetischer Felder zu erweitern und auch die Grundlagen der Vierpoltheorie, der Leitungstheorie, der Sende- und Empfangstechnik sowie der Transistorverstärker zu behandeln.

Leserkreis:

Physiker; Ingenieure für Elektrotechnik, Regelungstechnik, Elektronik, Automatisierungstechnik, Nachrichten- und Informationstechnik; Elektrochemiker; Mathematiker; Studierende, Dozenten, Lehrer mathematisch-naturwissenschaftlicher und technischer Fachrichtungen.

VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG